Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

У. А. Розиков, У. У. Жамилов, F -квадратичные стохастические операторы, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 4, 606–612

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3778>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 16:42:51

F -квадратичные стохастические операторы

У. А. Розиков, У. У. Жамилов

В статье мы вводим понятие F -квадратичного стохастического оператора. Показано, что каждый F -квадратичный оператор имеет единственную неподвижную точку. Также доказано, что любая траектория F -квадратичного стохастического оператора экспоненциально быстро сходится к этой неподвижной точке.

Библиография: 18 названий.

1. Введение. Квадратичный стохастический оператор часто возникает во многих моделях математической генетики [1]–[6]. Квадратичный стохастический оператор (КСО), отображающий симплекс

$$S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\} \quad (1)$$

в себя, имеет вид

$$V: x'_k = \sum_{i,j=1}^m p_{ij,k} x_i x_j, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2)$$

где $p_{ij,k}$ – коэффициент наследственности и

$$p_{ij,k} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^m p_{ij,k} = 1, \quad i, j, k = 1, \dots, m. \quad (3)$$

Заметим, что каждый элемент $x \in S^{m-1}$ является распределением вероятности на $E = \{1, \dots, m\}$.

Для данного $x^{(0)} \in S^{m-1}$ траектория $\{x^{(n)}\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, под действием КСО (2) определяется так: $x^{(n+1)} = V(x^{(n)})$, где $n = 0, 1, 2, \dots$.

Одна из главных проблем в математической биологии состоит в изучении асимптотического поведения траекторий. Эта проблема была полностью решена для вольтерровских КСО (см. [2], [4], [7]), которые определены равенствами (2), (3) и дополнительным предположением

$$p_{ij,k} = 0, \quad \text{если } k \notin \{i, j\}. \quad (4)$$

Биологический смысл соотношения (3) ясен: индивид повторяет генотип одного из его родителей. В статье [2] для вольтерровского КСО

$$V: x = (x_1, \dots, x_m) \in S^{m-1} \rightarrow V(x) = x' = (x'_1, \dots, x'_m) \in S^{m-1}$$

дается следующая общая формула:

$$x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), \quad (5)$$

где $a_{ki} = 2p_{ik,k} - 1$ для $i \neq k$ и $a_{kk} = 0$. Кроме того $a_{ki} = -a_{ik}$ и $|a_{ki}| \leq 1$.

В статьях [2], [4] теория КСО (5) была развита с использованием теории функции Ляпунова и турниров. Но невольтерровские КСО (т.е. не удовлетворяющие условию (4)) не были полностью изучены, поскольку нет общей теории, которая может быть применена для исследования невольтерровских операторов. Есть немного статей, посвященных таким операторам. Опишем кратко историю невольтерровских операторов, что позволит легко выделить место операторов, введенных в данной статье, среди невольтерровских операторов.

В [8] рассматривается следующее семейство КСО:

$$V_\lambda: S^2 \rightarrow S^2, \quad V_\lambda = (1 - \lambda)V_0 + \lambda V_1, \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

где

$$V_0(x) = (x_1^2 + 2x_1x_2, x_2^2 + 2x_2x_3, x_3^2 + 2x_1x_3)$$

– вольтерровский оператор,

$$V_1(x) = (x_1^2 + 2x_2x_3, x_2^2 + 2x_1x_3, x_3^2 + 2x_1x_2)$$

– невольтерровский оператор. Заметим, что поведение траектории оператора V_0 нерегулярно [9], [10].

Также известен класс бистохастических КСО, который содержит вольтерровские и невольтерровские операторы. В [3], [11] описан класс таких операторов.

В [12] введен класс квазивольтерровских операторов. Для таких операторов условие (4) не выполняется для немногих значений i, j, k . Работы [13]–[15] посвящены изучению невольтерровских операторов, которые получены из вольтерровских операторов (5) циклической перестановкой координат, т.е.

$$V_\pi: x'_{\pi(i)} = x_i \left(1 + \sum_{k=1}^m a_{ik} x_k \right), \quad i = 1, \dots, m,$$

где π – циклическая перестановка на наборе индексов E .

Заметим, что каждый квадратичный оператор V может быть единственным образом определяться кубической матрицей $\mathbf{P} \equiv \mathbf{P}(V) = \{p_{ij,k}\}_{i,j,k=1}^m$ с условием (3). Обычно (см. [1]–[8], [10]–[16]) матрица $\mathbf{P}$ известна. В [17], [18] дается конструктивное описание $\mathbf{P}$. Эта конструкция зависит от вероятностной меры μ , которая дается на фиксированном графе G . В [17] доказано, что КСО, построенный этой конструкцией, вольтерровский тогда и только тогда, когда G – связанный граф. В [9] с использованием конструкции КСО для общего конечного графа и вероятностной меры μ (здесь μ является произведением мер, определенных на максимальных подграфах графа G) описан класс невольтерровских КСО. Показано, что если μ дается произведением вероятностных мер, тогда соответствующий невольтерровский оператор может быть изучен с помощью N вольтерровских операторов (где N – число максимальных связанных подграфов).

Недавно авторами настоящей статьи был введен новый класс невольтерровских операторов. Эти операторы удовлетворяют условию

$$p_{ij,k} = 0, \quad \text{если } k \in \{i, j\}. \quad (6)$$

Такие операторы называются *строго невольтерровскими* КСО. Для произвольного строго невольтерровского КСО, определенного на S^2 , нами доказано, что такой оператор имеет единственную неподвижную точку. Также было доказано, что такие операторы имеют циклическую траекторию и почти все траектории сходятся к этой циклической траектории. Это поведение весьма существенно отличается от поведения вольтерровских операторов, так как последние не имеют никаких циклических траекторий.

В этой работе мы рассматриваем другой тип невольтерровских операторов. Эти операторы мы называем *F-квадратичными стохастическими операторами*. Для любого такого оператора мы покажем единственность неподвижной точки и то, что все траектории стремятся к этой неподвижной точке экспоненциально быстро. Таким образом, эти операторы эргодические.

2. Определение F-КСО. Расширяем множество E , добавляя элемент “0”, т.е. мы рассматриваем $E_0 = \{0, 1, \dots, m\}$. Фиксируем множество $F \subset E$ и называем его множеством “женщин”, и множество $M = E \setminus F$ будем называть множеством “мужчин”. Элемент 0 будет играть роль “пустого тела”.

Коэффициенты $p_{ij,k}$ матрицы $\mathbf{P}$ определим следующим образом:

$$p_{ij,k} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0, i, j \in F \cup \{0\} \text{ или } i, j \in M \cup \{0\}; \\ 0, & \text{если } k \neq 0, i, j \in F \cup \{0\} \text{ или } i, j \in M \cup \{0\}; \\ \geq 0, & \text{если } i \in F, j \in M, k - \text{любое}. \end{cases} \quad (7)$$

Биологическая интерпретация коэффициентов (7) ясна: “ребенок” k может родиться, если его родители взяты из различных классов F и M . Вообще, $p_{ij,0}$ может быть строго положительной для $i \in F$ и $j \in M$, это соответствует, к примеру, случаю, когда “женщина” i с “мужчиной” j не может иметь “ребенка”, так как один из них болен или оба они больны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для любого фиксированного $F \subset E$ КСО с условиями (2), (3) и (7) называется *F-квадратичным стохастическим оператором* (F -КСО).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Любой F -КСО невольтерровский, так как $p_{ii,0} = 1$ для любого $i \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что класс F -КСО для данного F не совпадает с классами невольтерровских КСО, упомянутых выше (во введении).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для $m = 1$ существует единственный F -КСО (не зависимо от $F = \{1\}$ и $F = \emptyset$), который является постоянным, т.е. $V(x) = (1, 0)$ для любого $x \in S^1$.

3. F-КСО для $m = 2$. В этом пункте мы рассматриваем $m = 2$, т.е. $E_0 = \{0, 1, 2\}$. Возьмем $M = \{1\}$ и $F = \{2\}$. Мы обобщим выводы этого пункта в следующем пункте для любого $F \subset E$. Причиной рассмотрения случая $m = 2$ отдельно являются:

- (i) в случае $m = 2$ число “женщин” равно числу “мужчин”;

- (ii) в этом случае все вычисления могут быть сделаны явно;
 (iii) в этом примере мы хотим проиллюстрировать наши определения и результаты.

Для $m = 2$, $M = \{1\}$ и $F = \{2\}$ F -КСО определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} p_{00,0} = 1 & p_{01,0} = 1 & p_{02,0} = 1 & p_{11,0} = 1 & p_{12,0} = a & p_{22,0} = 1 \\ p_{00,1} = 0 & p_{01,1} = 0 & p_{02,1} = 0 & p_{11,1} = 0 & p_{12,1} = b & p_{22,1} = 0 \\ p_{00,2} = 0 & p_{01,2} = 0 & p_{02,2} = 0 & p_{11,2} = 0 & p_{12,2} = c & p_{22,2} = 0 \end{pmatrix},$$

где

$$a, b, c \geq 0, \quad a + b + c = 1. \quad (8)$$

Соответственно, F -КСО имеет вид

$$V_0 : \begin{cases} x'_0 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + 2x_0x_1 + 2x_0x_2 + 2ax_1x_2 = 1 - 2(1-a)x_1x_2, \\ x'_1 = 2bx_1x_2, \\ x'_2 = 2cx_1x_2. \end{cases} \quad (9)$$

Неподвижная точка для V определяется как решение уравнения $V(x) = x$.

Следующая теорема полностью описывает поведение траектории оператора (9).

ТЕОРЕМА 1. 1) Для любых a, b, c с условием (8) оператор (9) имеет единственную неподвижную точку $(1, 0, 0)$.

2) Для любого $x^{(0)} \in S^2$ траектория $\{x^{(n)}\}$ стремится к неподвижной точке $(1, 0, 0)$ экспоненциально быстро.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Легко видеть, что решением уравнения $V_0(x) = x$ являются только $x = e_1 = (1, 0, 0)$ и

$$x = x^* = (x_0^*, x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{2bc - b - c}{2bc}, \frac{1}{2c}, \frac{1}{2b} \right), \quad \text{если } bc \neq 0,$$

$$x = e_1, \quad \text{если } bc = 0.$$

Заметим, что $x^* \notin S^2$. Действительно из $0 \leq 1/(2b) \leq 1$ и $0 \leq 1/(2c) \leq 1$ получим $b \geq 1/2$ и $c \geq 1/2$. Тогда из (8) имеем $b = c = 1/2$, т.е. $x_1^* = x_2^* = 1$; это противоречит условию $x_0^* + x_1^* + x_2^* = 1$.

2) Для $x \in S^2$ обозначим $\varphi(x) = x_1x_2$. Имеем

$$\varphi(x^{(n)}) = \begin{cases} 0, & \text{если } bc = 0, \\ (2bc)^{-1}(4bcx_1x_2)^{2^n}, & \text{если } bc \neq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Теперь оценим $4bcx_1x_2$. Имеем

$$0 \leq 4bcx_1x_2 \leq 4 \frac{(b+c)^2}{4} \cdot \frac{(x_1+x_2)^2}{4} \leq \frac{1}{4}. \quad (11)$$

Из второго равенства (9) получим

$$x_1^{(n)} = 2b\varphi(x^{(n-1)}). \quad (12)$$

Из (9)–(12) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = 0.$$

Теорема доказана.

4. Случай произвольного F . В этом пункте мы обобщаем теорему 1, но теперь мы не имеем явной формулы для $\varphi(x^{(n)})$.

Рассмотрим

$$E_0 = \{0, 1, \dots, m\}, \quad F = \{1, 2, 3, \dots, m_1\}, \quad M = \{m_1 + 1, \dots, m\}.$$

Не трудно видеть, что соответствующий F -КСО имеет вид (ср. с оператором (9))

$$V_1 : \begin{cases} x'_0 = 1 - 2 \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=m_1+1}^m (1 - p_{ij,0}) x_i x_j, \\ x'_k = 2 \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=m_1+1}^m p_{ij,k} x_i x_j, \quad k = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$p_{ij,k} = p_{ji,k} \geq 0, \quad k \in E_0, \quad \sum_{k=0}^m p_{ij,k} = 1 \quad \forall i \in F, j \in M. \quad (14)$$

ТЕОРЕМА 2. Для любых значений $p_{ij,k}$ с условиями (14) оператор (13) имеет единственную неподвижную точку $(1, 0, 0, \dots, 0)$ (с m нулями). Кроме того, для любого $x^{(0)} \in S^m$ траектория $\{x^{(n)}\}$ стремится к этой неподвижной точке экспоненциально быстро.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $x \in S^m$ определим

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=m_1+1}^m x_i x_j. \quad (15)$$

Используя (13), (14), получим

$$x_k^{(n+1)} = 2 \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=m_1+1}^m p_{ij,k} x_i^{(n)} x_j^{(n)} \leq 2 \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=m_1+1}^m x_i^{(n)} x_j^{(n)} = 2\varphi(x^{(n)}), \quad (16)$$

где $k = 1, 2, \dots, m$.

Теперь оценим $\varphi(x^{(n+1)})$:

$$\begin{aligned} \varphi(x^{(n+1)}) &= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=m_1+1}^m x_i^{(n+1)} x_j^{(n+1)} \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^{m_1} x_i^{(n+1)} + \sum_{j=m_1+1}^m x_j^{(n+1)} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(1 - x_0^{(n+1)} \right)^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя выражение $x_0^{(n+1)}$, из (17) получим

$$\begin{aligned} \varphi(x^{(n+1)}) &= \left(\sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=m_1+1}^m (1 - p_{ij,0}) x_i^{(n)} x_j^{(n)} \right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=m_1+1}^m x_i^{(n)} x_j^{(n)} \right)^2 = \left(\varphi(x^{(n)}) \right)^2, \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Заметим, что $\varphi(x^{(0)}) \leq 1/4$. Таким образом, из (18) получаем

$$\varphi(x^{(n)}) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{2^n}. \quad (19)$$

Из (16) и (19) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(n)} = 0$ для любых $k = 1, 2, \dots, m$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = (1, 0, \dots, 0) \quad \text{для любых } x^{(0)} \in S^m. \quad (20)$$

Очевидно, что точка $(1, 0, \dots, 0)$ – единственная неподвижная точка, так как (20) имеет место для любых $x^{(0)} \in S^m$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. КСО V удовлетворяет эргодической теореме, если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x^{(j)}$$

для любого $x^{(0)} \in S^m$. На основе численных вычислений Улам высказал гипотезу [6], [10] о том, что эргодическая теорема верна для любого КСО. В [16] доказано, что эта гипотеза является вообще ложной. Из теоремы 2 следует, что эргодическая теорема имеет место для любого F -КСО.

Розиков У. А. благодарит Institute des Hautes Etudes Scientifiques (IHES), Bures-sur-Yvette, Франция, за финансовую поддержку во время пребывания в IHES в октябре–декабре 2006 г., а также International Center for Theoretical Physics (ICTP), Trieste, Италия, за финансовую поддержку пребывания в ICTP в мае–августе 2006 г.

Авторы выражают глубокую признательность профессору Р. Н. Ганиходжаеву за полезную дискуссию по работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Н. Бернштейн, “Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследованности”, *Ученые записки научно-исслед. каф. Укр. (отд. матем.)*, **1** (1924), 83–115.
- [2] Р. Н. Ганиходжаев, “Квадратичные стохастические операторы, функция Ляпунова и турниры”, *Матем. сб.*, **83**:8 (1992), 119–140.
- [3] Р. Н. Ганиходжаев, “К определению квадратичных бистохастических операторов”, *УМН*, **48**:4 (1993), 231–232.
- [4] Р. Н. Ганиходжаев, “Карта неподвижных точек и функции Ляпунова для одного класса дискретных динамических систем”, *Матем. заметки*, **56**:5 (1994), 40–49.
- [5] H. Kesten, “Quadratic transformations: a model for population growth. I”, *Adv. in Appl. Probab.*, **2**:1 (1970), 1–82; “Quadratic transformations: a model for population growth. II”, *Adv. in Appl. Probab.*, **2**:1 (1970), 179–228.
- [6] Yu. I. Lyubich, *Mathematical Structures in Population Genetics*, Biomathematics, **22**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [7] Р. Н. Ганиходжаев, Д. Б. Эшмаматова, “Квадратичные автоморфизмы симплекса и асимптотическое поведение их траекторий”, *Владикавказ. матем. журн.*, **8**:2 (2006), 12–28; http://vmj.ru/articles/2006_2.2.pdf.
- [8] Р. Н. Ганиходжаев, “Семейство квадратичных стохастических операторов действующих на S^2 ”, *Докл. АН УзССР*, 1989, № 1, 3–5.

- [9] U. A. Rozikov, N. B. Shamsiddinov, *On Non-Volterra Quadratic Stochastic Operators Generated by a Product Measure*, [arXiv: math/0608201v1](#).
- [10] P. R. Stein, S. M. Ulam, *Nonlinear Transformations Studies on Electronic Computers*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.), **39**, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1964.
- [11] Р. Н. Ганиходжаев, А. И. Эшниязов, “Бистохастические квадратичные операторы”, *Узбек. матем. журн.*, 2004, № 3, 29–34.
- [12] Н. Н. Ганиходжаев, Р. Т. Мухитдинов, “Об одном классе квазивольтерровских операторов”, *Узбек. матем. журн.*, 2003, № 3–4, 9–12.
- [13] Р. Н. Ганиходжаев, А. М. Журабоев, “Множество равновесных состояний квадратичных стохастических операторов типа V_π ”, *Узбек. матем. журн.*, 1998, № 3, 23–27.
- [14] Р. Н. Ганиходжаев, А. З. Каримов, “О числе вершин множества бистохастических операторов”, *Узбек. матем. журн.*, 1999, № 6, 29–35.
- [15] Р. Н. Ганиходжаев, Р. Э. Абдурахманова, “Описание квадратичных автоморфизмов конечно-мерного симплекса”, *Узбек. матем. журн.*, 2002, № 1, 7–16.
- [16] М. И. Захаревич, “О поведении траекторий и эргодической гипотезе для квадратичных отображений симплекса”, *УМН*, **33**:6 (1978), 207–208.
- [17] Н. Н. Ганиходжаев, “Применение теории гиббсовских мер к математической генетике”, *Докл. РАН*, **372**:1 (2000), 13–16.
- [18] N. N. Ganikhodjaev, U. A. Rozikov, “On quadratic stochastic operators generated by Gibbs distributions”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **11**:4 (2006), 467–473.

У. А. Розиков

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз,
Ташкент, Узбекистан

E-mail: rozikovu@yandex.ru, rozikovu@mail.ru

Поступило

28.02.2007

Исправленный вариант

10.04.2007

У. У. Жамилов

Лицей № 43, г. Ромитан Бухарской обл.

E-mail: jamilovu@yandex.ru