Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Долгалев, Оценка порядков нулей многочленов от некоторых аналитических функций, *Матем. заметки*, 2008, том 84, выпуск 2, 193–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3779>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 16:54:42

Оценка порядков нулей многочленов от некоторых аналитических функций

А. П. Долгалёв

В статье рассматриваются оценки порядка нулей многочленов от функций, удовлетворяющих системе алгебраических дифференциальных уравнений и обладающих особым D -свойством, определенным в статье. Основным результатом, полученным в статье, являются две теоремы для двух случаев, в которых даются эти оценки. Эти оценки являются улучшениями существовавшей ранее аналогичной оценки для случая алгебраически независимых функций и одной точки. Они были выведены из более общей теоремы об оценках абсолютных величин идеалов в кольце многочленов, доказательство которой, по существу, и составляет основную часть статьи. Доказательство основано на теории идеалов в кольцах многочленов. Подобные оценки бывают полезны при доказательстве алгебраической независимости значений функций в алгебраических точках.

Библиография: 11 названий.

Пусть $f_1(z), \dots, f_m(z)$ – функции, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений

$$y'_j = \frac{A_j(z, y_1, \dots, y_m)}{A_0(z, y_1, \dots, y_m)}, \quad j = 1, \dots, m,$$

где $A_j(z, x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_m]$ – взаимно простые в совокупности многочлены. Для краткости будем в дальнейшем писать $\bar{f}(z) = (f_1(z), \dots, f_m(z))$. Также будем писать $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$ и $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_m)$.

Определим дифференцирование в кольце многочленов $\mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_m]$:

$$D = A_0(z, x_1, \dots, x_m) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=1}^m A_j(z, x_1, \dots, x_m) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

тогда для любого многочлена $P \in \mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_m]$ выполняется тождество

$$DP(z, \bar{f}(z)) = A_0(z, \bar{f}(z)) \frac{d}{dz} P(z, \bar{f}(z)).$$

Пусть $\mathfrak{E}_0$ – идеал в кольце $\mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_m]$, состоящий из многочленов P с условием $P(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) \equiv 0$. Если $f_1(z), \dots, f_m(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, то $\mathfrak{E}_0 = (0)$. Очевидно, $D\mathfrak{E}_0 \subset \mathfrak{E}_0$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00359).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$ – фиксированные точки, функции $f_1, \dots, f_m$ удовлетворяют перечисленным выше условиям и аналитичны в точках z_j . Будем говорить, что эти точки и функции обладают *D-свойством*, если существует постоянная $c > 0$, зависящая только от набора функций, такая, что для любого простого идеала $\mathfrak{p}$, строго содержащего $\mathfrak{E}_0$ и выдерживающего дифференцирование D (т.е. $D\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$), имеем

$$\min_{E \in \mathfrak{p}} \sum_{j=1}^N \text{ord}_{z=z_j} E(z, \bar{f}(z)) \leq c.$$

В работе [1] для совокупности функций, удовлетворяющих указанным выше условиям с $\mathfrak{E}_0 = (0)$ и $N = 1$, доказано, что для любого многочлена $P \in \mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_m] \neq 0$ выполняется неравенство

$$\text{ord}_{z=z_1} P(z, \bar{f}(z)) \leq c(\deg_z P + \deg_{\bar{x}} P + 1)(\deg_{\bar{x}} P)^m.$$

Такого рода оценки бывают полезны при доказательстве алгебраической независимости значений функций в алгебраических точках. Результаты в этой области были получены Шидловским в [2], Нестеренко в [3]–[5], Броунвеллом и Массером в [6], Нгуеном Тьен Таем в [7].

В настоящей статье оценка из [1] обобщена на случай алгебраически зависимых функций; кроме того, оценка получена не для одной, а для многих точек. Ниже доказываются следующие две теоремы.

Пусть q – максимальное количество функций $f_j(z)$, алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$.

ТЕОРЕМА 1. Если функции $f_1(z), \dots, f_m(z)$ и точки $z_1, \dots, z_N$ обладают *D-свойством*, то для любого многочлена $A \in \mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_m] \notin \mathfrak{E}_0$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^N \text{ord}_{z=z_i} A(z, \bar{f}(z)) \leq c_3((\deg_z(A) + \deg_{\bar{x}} A + N)(\deg_{\bar{x}} A)^q + N \deg_z(A)),$$

где константа $c_3 > 0$ зависит только от функций $\bar{f}(z)$.

При некоторых дополнительных ограничениях оценка теоремы 1 может быть уточнена.

ТЕОРЕМА 2. Если выполнены условия теоремы 1 и идеал $\mathfrak{E}_0$ имеет базис из многочленов, не зависящих от переменной z , то для любого многочлена $A \in \mathbb{C}[z, x_1, \dots, x_m] \notin \mathfrak{E}_0$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^N \text{ord}_{z=z_i} A(z, \bar{f}(z)) \leq c_4((\deg_z(A) + N)(\deg_{\bar{x}} A)^q + N \deg_z(A)),$$

где $c_4 > 0$ – некоторая константа, зависящая только от функций $\bar{f}(z)$.

Эти утверждения будут выведены из более общей теоремы об оценках абсолютных величин идеалов в кольце $\mathbb{C}[z, x_0, \dots, x_m]$.

Введем обозначения, которые будем использовать на протяжении всей дальнейшей работы.

Пусть $\mathfrak{E} \subset \mathbb{C}[z][x_0, \dots, x_m]$ – идеал, порожденный многочленами

$$P(z, x_0, \dots, x_m) = x_0^{\deg_{\bar{x}} Q} Q\left(z, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_m}{x_0}\right),$$

где $Q(z, \bar{x}) \in \mathfrak{E}_0$. Заметим, что $\mathfrak{E}_0$ – простой идеал. Значит, прост и $\mathfrak{E}$. Кроме того, по построению $\mathfrak{E}$ однороден. Также заметим, что $q = \dim \mathfrak{E}$ (проективная размерность идеала).

Для краткости будем далее писать $K = \mathbb{C}(z)$. Далее, пусть K_i , где $i = 1, \dots, N$, – пополнение K в топологии, порожденной абсолютной величиной $|a|_i = e^{-\text{ord}_{z=z_i} a}$, и $\mathfrak{K}_i$ – соответствующее алгебраическое замыкание, тогда абсолютную величину $|\cdot|_i$ можно на него продолжить. Пусть, далее, I – идеал в $K[x_0, \dots, x_m]$, а $\bar{\omega} = (1, f_1, \dots, f_m) \in \mathfrak{K}_i^{m+1}$. Для любого однородного несмешанного идеала J кольца $K[x_0, \dots, x_m]$ в [1] определены некоторые характеристики $\deg J$ и $h(J)$. По своей роли в дальнейшем изложении они аналогичны $\deg_{\bar{x}} P$ и $\deg_z P$ для многочленов $P \in \mathbb{C}[z, x_0, \dots, x_m]$. Кроме того, там еще указывается, как определить абсолютные значения $|J(\bar{\omega})|_i$, и описаны свойства всех этих характеристик.

Заметим, что идеал $\mathfrak{E}_0$ имеет базис из многочленов, не зависящих от переменной z , тогда и только тогда, когда $h(\mathfrak{E}_0) = 0$.

ТЕОРЕМА 3. *Существует постоянная $\tau > 0$, зависящая только от дифференциального оператора D и функций $f_j(z)$, такая, что для любого однородного несмешанного идеала $I \subset K[x_0, \dots, x_m]$ с условием $\dim I = r - 1 < q$ выполняется неравенство*

$$\sum_{i=1}^N \log |I(\bar{\omega})|_i \geq -\tau^{mr} (h(I)(\deg I)^{r/(q+1-r)} + N(\deg I)^{q/(q+1-r)}).$$

Эта теорема усиливает [1; гл. 10, теорема 2.2], где рассмотрен случай, когда $N = 1$ и функции алгебраически независимы.

Вывод ТЕОРЕМ 1 и 2 из ТЕОРЕМЫ 3. Применим [8; предложение 1.4] к идеалу $\mathfrak{E}$ и многочлену

$$P = x_0^{\deg_{\bar{x}} A} A\left(z, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_m}{x_0}\right),$$

получим идеал J , для которого верны оценки

$$\begin{aligned} r &= \dim J + 1 = q, \\ \deg J &\leq \deg \mathfrak{E} \deg P \leq c_7 M, \\ h(J) &\leq h(P) \deg \mathfrak{E} + h(\mathfrak{E}) \deg P \leq c_7 (L + M), \\ \sum_{i=1}^N \log |J(\bar{\omega}_i)|_i &\leq \sum_{i=1}^N \log |P(\bar{\omega})|_i + c_7 N(M + L), \end{aligned}$$

где $M = \deg_{\bar{x}} P$ и $L = h(P) = \deg_z P$. С другой стороны, применяя теорему 3 при $r = q$, получаем

$$\sum_{i=1}^N \log |J(\bar{\omega})|_i \geq -\tau^{m^2} (h(J)(\deg J)^q + N(\deg J)^q) \geq -c_8 (L + M + N) M^q,$$

отсюда и получается теорема 1.

Если $h(\mathfrak{E}) = 0$, то

$$h(J) \leq h(P) \deg \mathfrak{E} + h(\mathfrak{E}) \deg P = h(P) \deg \mathfrak{E} \leq c_7 L,$$

отсюда получается оценка из теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вообще говоря, точно не только теорема 1, но и теорема 2, т.е. ее результат нельзя улучшить до результата теоремы 1 без требования $h(\mathfrak{E}) = 0$. Действительно, приведем такой пример. Пусть $m = 1$, $f_1(z) = z$, $A(z, x_1) = x_1^n$, тогда, очевидно, $q = 0$, $\text{ord}_{z=0} A(z, f_1(z)) = n$, $\deg_z A = 0$, $\deg_{\bar{x}} A = n$, и при достаточно большом n будем иметь

$$c_4(\deg_z A + 1)(\deg_{\bar{x}} A + 1)^q = c_4 < n,$$

а вот оценка из теоремы 1 как раз выполняется и достигается по порядку. Таким образом, оценки в обеих теоремах неулучшаемы.

Итак, наша задача свелась к доказательству теоремы 3.

Докажем сначала несколько вспомогательных утверждений.

Пусть $\mathfrak{G}$ – однородный идеал в $K[\underline{x}]$, $\nu \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{Z}$, $\mu \geq 0$. Определим $\mathfrak{L}(\mu, \nu)$ как множество однородных по $\underline{x}$ многочленов P из $\mathbb{C}[z, \underline{x}]$, удовлетворяющих оценкам на степени

$$\deg_z P \leq \mu, \quad \deg_{\bar{x}} P = \nu.$$

Далее, положим $\mathfrak{L}_{\mathfrak{G}}(\mu, \nu) = \mathfrak{L}(\mu, \nu)/\mathfrak{G}$ и $\chi_{\mathfrak{G}}(\mu, \nu) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{L}_{\mathfrak{G}}(\mu, \nu)$.

ЛЕММА 1. В приведенных выше терминах для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ выполняется неравенство

$$\chi_{\mathfrak{p}}(\mu, \nu) \leq c_1((\mu + 1)\nu^{r-1} \deg \mathfrak{p} + \nu^r h(\mathfrak{p})),$$

где $c_1 = c_1(m) \geq 1$ и $r = \dim \mathfrak{p} + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [1; гл. 9, теорема 2.1], $c_1 = m$.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{p}$ – однородные идеалы в $K[\underline{x}]$, $\mathfrak{p}$ прост, $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{p}$. Пусть $r = \dim \mathfrak{p} + 1 \geq 1$ и $g = \dim \mathfrak{G}$. Пусть c_2 – некоторая вещественная постоянная, большая, чем $2 \cdot g! c_1$, где c_1 – константа из леммы 1, а μ и ν – натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\nu^{g-r+1} \geq c_2 \deg \mathfrak{p}, \quad (\mu + 1)\nu^{g-r} \geq c_2 h(\mathfrak{p}).$$

Тогда найдется однородный по $\bar{x}$ многочлен $P \in \mathfrak{p}$, не лежащий в $\mathfrak{G}$ и удовлетворяющий следующим оценкам:

$$\deg_{\bar{x}} P = \nu, \quad \deg_z P \leq \mu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы равносильно строгому неравенству для размерностей: $\chi_{\mathfrak{p}}(\mu, \nu) < \chi_{\mathfrak{G}}(\mu, \nu)$. Оценим $\chi_{\mathfrak{G}}$ снизу. По определению размерности найдется простой идеал $\mathfrak{q}$ размерности g , содержащий $\mathfrak{G}$. Тогда среди многочленов $x_0, x_1, \dots, x_m$ найдутся $g + 1$ таких, что их образы в кольце $\mathbb{C}[z, x_0, \dots, x_m]/\mathfrak{q}$ однородно алгебраически независимы. Значит, тем более будут однородно алгебраически независимы их образы в более широком кольце $\mathbb{C}[z, x_0, \dots, x_m]/\mathfrak{G}$. Пусть это

будут $x_0, \dots, x_g$. Тогда никакая линейная комбинация мономов вида $z^i x_0^{i_0} \dots x_g^{i_g}$, где $i = 0, \dots, \mu$ и $i_0 + \dots + i_g = \nu$, не лежит в $\mathfrak{E}$. Их количество оценивает $\chi_{\mathfrak{E}}(\mu, \nu)$ снизу. Получаем

$$\chi_{\mathfrak{E}}(\mu, \nu) \geq (\mu + 1) \binom{\nu + g}{g} > (g!)^{-1} (\mu + 1) \nu^g.$$

Из определения μ и ν и леммы 1 получим

$$\chi_{\mathfrak{p}}(\mu, \nu) \leq c_1((\mu + 1)\nu^{r-1} \deg \mathfrak{p} + \nu^r h(\mathfrak{p})) \leq \frac{2c_1}{c_2} (\mu + 1) \nu^g < \frac{1}{g!} (\mu + 1) \nu^g \leq \chi_{\mathfrak{E}}(\mu, \nu).$$

Значит, найдется многочлен, удовлетворяющий условию леммы. Лемма 2 доказана.

Положим $d = \max_{0 \leq j \leq m} \deg_{\bar{x}} A_j(z, \bar{x})$ и

$$B_j(z, \underline{x}) = x_0^d A_j\left(z, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_m}{x_0}\right). \quad (1)$$

Тогда можно определить в $K[x_0, \dots, x_m]$ аналог оператора D :

$$T = B_0(z, \underline{x}) \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=1}^m B_j(z, \underline{x}) x_0 \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Очевидно, T переводит однородный по $\underline{x}$ многочлен в однородный по $\underline{x}$ и $Tx_0 = 0$.

ЛЕММА 3. Для любого идеала $I \subset K[\bar{x}]$ с условием $DI \subset I$ справедливы следующие утверждения:

- 1) $D\sqrt{I} \subset \sqrt{I}$;
- 2) если I – радикальный идеал, I разлагается в неприводимое пересечение простых идеалов $I_1, \dots, I_k$, то $DI_j \subset I_j$ для любого j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО полностью повторяет доказательство аналогичного утверждения [9; лемма 2]. Там рассмотрен случай линейной системы дифференциальных уравнений, но при доказательстве утверждения это нигде не используется.

ЛЕММА 4. Пусть $\mathfrak{p}$ – простой однородный идеал в $K[\bar{x}]$, причем

$$\sum_{j=1}^N \log |\mathfrak{p}(\bar{\omega})|_j < -h(\mathfrak{p}) - cm \deg \mathfrak{p},$$

где c – константа из определения D -свойства, тогда $x_0 \notin \mathfrak{p}$ и для любого однородного простого идеала $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ с условием $T\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}$ выполняется включение $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [10; лемма 6] существуют нули $\bar{\beta}_j$ идеала $\mathfrak{p}$, $j = 1, \dots, N$, такие, что

$$\deg \mathfrak{p} \sum_{j=1}^N \log \|\bar{\omega} - \bar{\beta}_j\|_j \leq \frac{1}{r} \left(\sum_{j=1}^N \log |\mathfrak{p}(\bar{\omega})|_j + h(\mathfrak{p}) \right) < -c \deg \mathfrak{p}.$$

Отсюда $\sum_{j=1}^N \log \|\bar{\omega} - \bar{\beta}_j\|_j < -c$. Но тогда из [8; следствие 1] для любого $Q \in \mathfrak{p}$ выполняется

$$\sum_{j=1}^N \log \|Q\|_j \leq \sum_{j=1}^N \log \|\bar{\omega} - \bar{\beta}_j\|_j < -c. \quad (2)$$

Поскольку $\sum_{j=1}^N \log \|x_0\|_j = 0$, получаем, в частности, что $x_0 \notin \mathfrak{p}$.

Теперь докажем утверждение про идеал $\mathfrak{q}$. Предположим противное. Пусть такой $\mathfrak{q}$ существует. Пусть сначала $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{q}$. Обозначим буквой $\mathfrak{a}$ идеал в кольце $K[x_1, \dots, x_m]$, состоящий из многочленов A с условием

$$x_0^{\deg A} A\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_m}{x_0}\right) \in \mathfrak{q}.$$

Поскольку $\mathfrak{q}$ прост и не содержит x_0 (так как $\mathfrak{p}$ не содержит x_0), то $\mathfrak{a}$ прост. Кроме того, из-за вложения $T\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}$ выполняется $D\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$.

Из D -свойства следует, что существует многочлен $E \in \mathfrak{a}$, не содержащийся в идеале $\mathfrak{E}_0$ и удовлетворяющий неравенству

$$\sum_{j=1}^N \text{ord}_{z=z_j} E(\bar{f}(z)) \leq c.$$

Значит, существует неотрицательное $n \in \mathbb{Z}$, для которого

$$E_0 = x_0^n E\left(z, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_m}{x_0}\right) \in \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}.$$

Из приведенного выше неравенства следует

$$\sum_{j=1}^N \log \|E_0\|_j \geq -c,$$

что противоречит (2).

Итак, этот случай невозможен. Теперь докажем утверждение леммы в общем случае.

Обозначим $\mathfrak{b} = (\mathfrak{q}, \mathfrak{E})$. Предположим, что $\mathfrak{q} \not\subset \mathfrak{E}$. Тогда включение $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{q}$ будет строгим. Идеал $\mathfrak{b}$ представляется в виде неприводимого пересечения примарных компонент $\mathfrak{b}_j$, $j = 1, \dots, k$. Поскольку $T\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}$ и $T\mathfrak{E} \subset \mathfrak{E}$, то $T\mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}$. Отсюда по первому утверждению леммы 3 имеем $T\sqrt{\mathfrak{b}} \subset \sqrt{\mathfrak{b}}$. Так как $\sqrt{\mathfrak{b}} \subset \mathfrak{p}$, то среди простых идеалов, ассоциированных с $\sqrt{\mathfrak{b}}$, найдется простой идеал $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}$. По второму утверждению леммы 3 имеем $T\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_0$, но $\mathfrak{p}_0 \supset \sqrt{\mathfrak{b}} \supset \mathfrak{b} \supset \mathfrak{E}$, что по доказанному выше невозможно. Противоречие. Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $I \subset J \subset K[\bar{x}]$ – однородные несмешанные идеалы, $\dim J = \dim I - 1$; пусть $Q \in K[\bar{x}]$ – однородный многочлен, не лежащий ни в одном из простых идеалов, ассоциированных с I . Если $(I, Q) \subset J$, то

- 1) $\deg J \leq \deg I \deg Q$;
- 2) $h(J) \leq h(I) \deg_{\bar{x}} Q + h(Q) \deg I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [10; лемма 4].

Теперь мы можем доказать главное предложение, из которого выведем теорему 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathfrak{p} \subset K[\bar{x}]$ – простой однородный идеал, $\mathfrak{p}$ строго содержит $\mathfrak{E}$, $r = \dim \mathfrak{p} + 1 \geq 1$, $r \leq q$ и

$$\sum_{j=1}^N \log |\mathfrak{p}(\bar{\omega})|_j < -h(\mathfrak{p}) - c \deg \mathfrak{p},$$

где c – константа из определения D -свойства. Тогда существует однородный мно-

многочлен $B \notin \mathfrak{p}$, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) $\deg_x B \leq (1/2)\sqrt{\tau}(\deg \mathfrak{p})^{1/(q+1-r)}$;
- 2) $\deg_z B \leq (1/2)\sqrt{\tau}(h(\mathfrak{p})(\deg \mathfrak{p})^{-1+1/(q+1-r)} + 1)$,

где τ – достаточно большая постоянная, зависящая только от системы дифференциальных уравнений и от самих функций $f_j(z)$;

- 3) $B = TA$, где A – некоторый многочлен из $\mathfrak{p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть λ – достаточно большая константа и $\tau = \lambda^{2^{m+2}}$. Среди всех многочленов идеала $\mathfrak{p}$, не содержащихся в $\mathfrak{E}$, выберем многочлен E , на котором достигает своего минимума выражение

$$\deg \mathfrak{p} \deg_z E + (h(\mathfrak{p}) + 1) \deg_x E.$$

Очевидно, E неприводим. Положим

$$L = \deg_x E, \quad M = \deg_z E.$$

Из леммы 2 для достаточно большого λ имеем

$$M \deg \mathfrak{p} + L(h(\mathfrak{p}) + 1) \leq \mu \deg \mathfrak{p} + \nu(h(\mathfrak{p}) + 1) \leq \lambda(h(\mathfrak{p}) + 1)(\deg \mathfrak{p})^{1/(q+1-r)},$$

откуда получаем

$$L \leq \lambda(\deg \mathfrak{p})^{1/(q+1-r)}, \quad M \leq \lambda(h(\mathfrak{p}) + 1)(\deg \mathfrak{p})^{-1+1/(q+1-r)}.$$

Теперь докажем существование такого многочлена $A \in \mathfrak{p}$, что $C = TA \notin \mathfrak{p}$ и оценки степеней C имеют тот же порядок, что и в пп. 1), 2) предложения.

Положим, как и в [1; гл. 10],

$$a_j = \lambda^{2^{j+2}-4}, \quad b_j = \lambda^{2^{j+1}-1}, \quad g_j = \lambda^{2^{j+1}-2}, \quad j = 0, \dots, m.$$

Легко видеть, что для $j = 0, \dots, m-1$ верны такие неравенства:

$$a_{j+1} \geq 2a_j b_{j+1}, \quad b_{j+1} \geq b_j + 2\lambda^2 a_j, \quad g_{j+1} \geq g_j + 2\lambda a_j. \quad (3)$$

Согласно [11; гл. 4, теорема 31] найдется идеал $\mathfrak{G}$, порождаемый $m-q$ многочленами и имеющий $\mathfrak{E}$ своим изолированным простым идеалом. Тогда $\dim \mathfrak{G} = q$. Пусть $(E_{-(m-q)}, \dots, E_{-1})$ – его базис. Для любого $i = 0, \dots, q-1$ определим идеал $J_i \subset K[x]$, порожденный идеалом $\mathfrak{G}$ и многочленами $T^j E$, $j = 0, \dots, g_i$. Пусть n – наибольшее целое такое, что $J_n \subset \mathfrak{p}$ и существуют однородные многочлены $E_0, \dots, E_n$, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $\deg_x E_j \leq b_j(L+1)$, $\deg_z E_j \leq b_j(M+1)$, $j = 0, \dots, n$;
- 2) идеал $\mathfrak{a}_n = (\mathfrak{G}, E_0, \dots, E_n) \subset J_n$;
- 3) все примарные компоненты $\mathfrak{a}_n$, содержащиеся в $\mathfrak{p}$, имеют размерность $q-n-1$ и если $\mathfrak{u}_n$ – несмешанный идеал, являющийся их пересечением, то

$$\deg \mathfrak{u}_n \leq a_n(L+1)^{n+1}, \quad h(\mathfrak{u}_n) \leq a_n(M+1)(L+1)^n. \quad (4)$$

Положим $E_0 = E$, тогда из определения L и M и [8; предложение 1.3] следует, что условия 1)–3) выполнены при замене n на 0. Значит, во всяком случае $n \geq 0$. С другой стороны, $\mathfrak{u}_n \subset \mathfrak{p}$, значит, $r-1 = \dim \mathfrak{p} \leq \dim \mathfrak{u}_n = q-n-1$ и $n \leq q-r$.

Докажем, что вложение $J_{n+1} \subset \mathfrak{p}$ невозможно. Предположим противное. Пусть $\mathfrak{b}$ – любая примарная компонента $\mathfrak{u}_n$, $\mathfrak{q} = \sqrt{\mathfrak{b}}$ и l – показатель $\mathfrak{q}$. Докажем, что $l \leq 2\lambda a_n$.

Предположим противное: $l > 2\lambda a_n$, тогда из (4) и [8; предложение 1.2] получим

$$a_n(L+1)^{n+1} \geq \deg \mathfrak{u}_n \geq l \deg \mathfrak{q} \geq l > 2\lambda a_n.$$

Значит, $(L+1)^q \geq (L+1)^{n+1} > 2\lambda$, поэтому при достаточно большом λ имеем $L-1 > 5q$. Тогда

$$\left(\frac{L+1}{L-1}\right)^q = \left(1 + \frac{2}{L-1}\right)^q < \left(1 + \frac{2}{5q}\right)^q < 2$$

и $(L+1)^n < 2(L-1)^n$. Из [8; предложение 1.2] и (4) имеем

$$\begin{aligned} \lambda h(\mathfrak{q}) &\leq \frac{\lambda h(\mathfrak{u}_n)}{l} \leq \frac{h(\mathfrak{u}_n)}{2a_n} \leq \frac{1}{2}(M+1)(L+1)^n < (M+1)(L-1)^n, \\ \lambda \deg \mathfrak{q} &\leq \frac{\lambda \deg \mathfrak{u}_n}{l} \leq \frac{\deg \mathfrak{u}_n}{2a_n} \leq \frac{1}{2}(L+1)^{n+1} < (L-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Положим $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{E}$, тогда $g = \dim \mathfrak{G}_1 \geq \dim \mathfrak{E} = q$. Но мы знаем, что $\dim \mathfrak{q} = q - n - 1$. Применим к идеалам $\mathfrak{q}$ и $\mathfrak{G}_1$ лемму 2, выбрав $\nu = L-1$ и $\mu = M$. Это возможно, потому что при достаточно большом λ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} (L-1)^{g-(q-n-1)} &\geq (L-1)^{n+1} \geq \lambda \deg \mathfrak{q} \geq c_2 \deg \mathfrak{q}, \\ (M+1)(L-1)^{g-(q-n-1)-1} &\geq (M+1)(L-1)^n \geq \lambda h(\mathfrak{q}) \geq c_2 h(\mathfrak{q}). \end{aligned}$$

По лемме 2 найдется многочлен $P \in \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ такой, что $P \notin \mathfrak{G}_1$ (отсюда $P \notin \mathfrak{E}$), $\deg_{\underline{x}} P = L-1 < L$ и $\deg_z P \leq M$, что противоречит определению многочлена E .

Итак, мы доказали, что $l \leq 2\lambda a_n$.

Теперь докажем, что найдутся i и j такие, что $-(m-q) \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq 2\lambda a_n$ и $T^j E_i \notin \mathfrak{q}$. Предположим противное. Идеал $\mathfrak{q}$ – один из ассоциированных с $\mathfrak{a}_n$. Значит, существует $H \notin \mathfrak{q}$ такой, что для любого $G \in \mathfrak{q}$ имеем $G^l H \in \mathfrak{a}_n$. Тогда по нашему предположению и так как $l \leq 2\lambda a_n$, имеем $T^l(G^l H) \in \mathfrak{q}$. Поскольку $G \in \mathfrak{q}$, имеем $(TG)^l H \in \mathfrak{q}$, из простоты $\mathfrak{q}$ и условия $H \notin \mathfrak{q}$ имеем $TG \in \mathfrak{q}$. Таким образом, получаем $T\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}$, что означает $\mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{E}$ согласно лемме 4. С другой стороны, по построению $E_0 = E \notin \mathfrak{E}$, поэтому $\mathfrak{a}_n = (\mathfrak{G}, E_0, \dots, E_n) \not\subset \mathfrak{E}$. Противоречие. Существование i и j доказано.

Пусть $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_s$ – простые идеалы, ассоциированные с $\mathfrak{u}_n$. Мы знаем, что для всех $v = 1, \dots, s$ существуют i_v, j_v такие, что $-(m-q) \leq i_v \leq n$, $0 \leq j_v \leq 2\lambda a_n$, $T^{j_v} E_{i_v} \notin \mathfrak{q}_v$. Положим

$$E_{n+1} = \sum_{v=1}^s \eta_v x_0^{r_v} T^{j_v} E_{i_v},$$

где $\eta_1, \dots, \eta_s \in \mathbb{C}$ выбраны так, чтобы $E_{n+1} \notin \mathfrak{q}_v$ для любого v , а r_v таковы, что многочлен E_{n+1} однороден и при этом имеет минимальную степень по $\underline{x}$. Докажем, что $E_0, \dots, E_{n+1}$ удовлетворяют условиям 1)–3). Тогда предположение $J_{n+1} \subset \mathfrak{p}$ приведет нас к противоречию.

Положим $d_0 = \max_{0 \leq j \leq m} (\deg_z B_j, \deg_x B_j)$. Из (4) и $d_0 \leq \lambda$ получим

$$\begin{aligned} \deg_x E_{n+1} &\leq b_n(L+1) + 2d_0\lambda a_n \leq b_{n+1}(L+1), \\ \deg_z E_{n+1} &\leq b_n(M+1) + 2d_0\lambda a_n \leq b_{n+1}(M+1), \end{aligned}$$

а это и есть аналог первого условия в определении n . Условие 2) следует из определения E_{n+1} и (3).

Докажем третье условие. Пусть $\mathfrak{c}$ – ассоциированный с $\mathfrak{a}_{n+1}$ простой идеал, лежащий в $\mathfrak{p}$. Такой идеал найдется, так как $\mathfrak{a}_{n+1} \subset J_{n+1} \subset \mathfrak{p}$. Поскольку $\mathfrak{a}_{n+1} = (\mathfrak{a}_n, E_{n+1}) \subset \mathfrak{c}$, имеем $\mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{c} \subset \mathfrak{p}$. Но поскольку все ассоциированные с $\mathfrak{a}_n$ простые идеалы, лежащие в $\mathfrak{p}$, – это $\mathfrak{q}_v$, получаем, что существует $\mathfrak{q}_j \subset \mathfrak{c}$. Значит, $\dim \mathfrak{c} \leq \dim \mathfrak{q}_j = q - n - 1$; если $\dim \mathfrak{c} = q - n - 1$, то $\mathfrak{c} = \mathfrak{q}_j$, что невозможно, поскольку $E_{n+1} \notin \mathfrak{q}_j$. Значит, $\dim \mathfrak{c} \leq q - n - 2$.

Докажем теперь, что $\dim \mathfrak{c} \geq q - n - 2$. Проведем локализацию по идеалу $\mathfrak{p}$ (см. [11]). Тогда, очевидно, все простые идеалы, ассоциированные с $(\mathfrak{a}_{n+1})_{\mathfrak{p}}$ – локализацией $\mathfrak{a}_{n+1}$, имеют вид $(\mathfrak{d})_{\mathfrak{p}}$, где $\mathfrak{d}$ – некоторый ассоциированный с $\mathfrak{a}_{n+1}$ идеал, лежащий в $\mathfrak{p}$. Поэтому $\dim(\mathfrak{a}_{n+1})_{\mathfrak{p}} \leq q - n - 2$. Но идеал $(\mathfrak{a}_{n+1})_{\mathfrak{p}}$ порождается $m - q + n + 2$ многочленами, поэтому $\dim(\mathfrak{a}_{n+1})_{\mathfrak{p}} = q - n - 2$ и по теореме Мэколя [11; гл. 7, теорема 26] он будет несмешанным, значит, $(\mathfrak{c})_{\mathfrak{p}}$ – его изолированный простой. Из [11; гл. 4, теорема 30] получим $\dim \mathfrak{c} = \dim(\mathfrak{c})_{\mathfrak{p}} = q - n - 2$. Первая часть третьего условия доказана.

Пусть теперь $\mathfrak{a}'$ – пересечение примарных компонент $\mathfrak{a}_n$, не входящих в $\mathfrak{u}_n$, тогда $\mathfrak{a}_n$ представляется в виде пересечения $\mathfrak{u}_n$ и $\mathfrak{a}'$. Если I – примарная компонента $\mathfrak{u}_{n+1}$ и $\mathfrak{c} = \sqrt{I}$, то включение $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{c}$ влечет $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{c} \subset \mathfrak{p}$, что невозможно. Значит, $\mathfrak{a}' \not\subset \mathfrak{c}$. Поскольку $\mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{a}_{n+1} \subset I$, то $\mathfrak{u}_n \subset I$. Отсюда имеем $\mathfrak{u}_n \subset \mathfrak{u}_{n+1}$ и из леммы 5, (3) и (4) находим

$$\begin{aligned} \deg \mathfrak{u}_{n+1} &\leq \deg \mathfrak{u}_n \deg_x E_{n+1} \leq a_{n+1}(L+1)^{n+1}, \\ h(\mathfrak{u}_{n+1}) &\leq h(\mathfrak{u}_n) \deg_x E_{n+1} + \deg \mathfrak{u}_n \deg_z E_{n+1} \leq a_{n+1}M(L+1)^n, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Третье свойство доказано полностью.

Полученное противоречие означает, что предположение $J_{n+1} \subset \mathfrak{p}$ неверно. Отсюда видно, что $J_m \not\subset \mathfrak{p}$. Значит, существует индекс $i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq i < g_m - 1$, такой, что $A = T^i E \in \mathfrak{p}$, но $B = TA \notin \mathfrak{p}$.

Из оценок для L и M будем иметь

$$\begin{aligned} \deg_x B &\leq \deg_x E + g_m d_0 \leq \frac{1}{2} \lambda^{2^{m+1}} (\deg \mathfrak{p})^{1/(q+1-r)}; \\ \deg_z B &\leq \deg_z E + g_m d_0 \leq \frac{1}{2} \lambda^{2^{m+1}} (h(\mathfrak{p})(\deg \mathfrak{p})^{-1+1/(q+1-r)} + 1). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

ЛЕММА 6. Пусть i – натуральное число, не превосходящее N . Пусть V и W – однородные многочлены из кольца $K[\underline{x}]$, имеющие одинаковую степень по $\underline{x}$, а $\bar{\varphi}, \bar{\psi} \in K_i^{m+1}$. Тогда справедливо неравенство

$$\log |V(\bar{\varphi})W(\bar{\psi}) - V(\bar{\psi})W(\bar{\varphi})|_i \leq \log \|\bar{\varphi} - \bar{\psi}\|_i + (\log |\bar{\varphi}|_i + \log |\bar{\psi}|_i) \deg_x V,$$

где

$$\|\bar{\varphi} - \bar{\psi}\|_i = \max_{0 \leq j < k \leq m} |\varphi_j \psi_k - \varphi_k \psi_j|_i |\bar{\psi}|_i^{-1} |\bar{\varphi}|_i^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [10; лемма 1].

Зафиксируем некоторый ненулевой вектор $\bar{\varphi} = (\varphi_0, \dots, \varphi_m) \in K_i^{m+1}$ и так же, как при определении значения идеала в точке $|J(\bar{\omega})|$ (см., например, [8] или [1]), определим гомоморфизм

$$\varkappa_i: \mathbb{C}[z, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{r-1}] \rightarrow K_i[S^{(1)}, \dots, S^{(r-1)}],$$

вкладываемый $\mathbb{C}[z]$ в поле K_i и отображающий переменную u_{jk} в $\sum_{l=0}^m s_{kl}^{(j)} \varphi_l$, где $s_{kl}^{(j)}$ – элементы кососимметрической матрицы $S^{(j)}$.

Далее, пусть $\mathfrak{p}$ – однородный простой идеал кольца $K[x]$ и $B \notin \mathfrak{p}$ – однородный многочлен из того же кольца. По ним можно построить результат $G(z, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{r-1})$, как это делается, например, в [8; лемма 1.5]. Пусть

$$G = a^{\deg_x B} \prod_{j=1}^{\deg \mathfrak{p}} B(1, \alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_m^{(j)}),$$

где алгебраические над $\mathbb{C}(z, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{r-1})$ функции $\alpha_j^{(k)}$ и $a \in \mathbb{C}[z, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{r-1}]$ взяты из [8; лемма 1.4].

ЛЕММА 7. Если $\mathfrak{p} \cap \mathbb{C}[z] = (0)$, $x_0 \notin \mathfrak{p}$ и $\varkappa_i(a) \neq 0$, то существует гомоморфизм

$$\tau_i: \mathbb{C}[z, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{r-1}, \alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_m^{(\deg \mathfrak{p})}][a^{-1}] \rightarrow K_i$$

такой, что для $\beta_{ij}^{(k)} = \tau_i(\alpha_j^{(k)})$ векторы

$$\bar{\beta}_{ij} = (\beta_{i0}^{(j)}, \dots, \beta_{im}^{(j)}), \quad \text{где } j = 1, \dots, \deg \mathfrak{p},$$

будут нулями идеала $\mathfrak{p}$ и будут удовлетворять оценкам

$$\log |\varkappa_i(a)|_i + \sum_{j=1}^{\deg \mathfrak{p}} \log |\bar{\beta}_{ij}|_i \leq (r-1) \deg \mathfrak{p} \log |\bar{\varphi}|_i,$$

$$\log |\varkappa_i(a)|_i + \sum_{j=1}^{\deg \mathfrak{p}} (\log \|\bar{\varphi} - \bar{\beta}_{ij}\|_i + \log |\bar{\beta}_{ij}|_i) \leq \log |\mathfrak{p}(\bar{\varphi})|_i + (r-1) \deg \mathfrak{p} \log |\bar{\varphi}|_i.$$

При этом для каждого многочлена $H \in \mathbb{C}[z, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{r-1}]$ такого, что $\varkappa_i(H) \neq 0$, гомоморфизм τ_i можно выбрать удовлетворяющим следующим условиям:

$$|\varkappa_i(H)|_i = |\tau_i(H)|_i, \quad |\varkappa_i(a)|_i = |\tau_i(a)|_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [10; лемма 5].

Теперь мы уже можем доказывать теорему 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Проведем доказательство от противного. Пусть I – однородный несмешанный идеал с наименьшей размерностью, для которого не выполняется утверждение теоремы. Пусть $r = \dim I + 1$. Тогда

$$\sum_{j=1}^N \log |I(\bar{\omega})|_j < -\tau^{mr} (h(I)(\deg I)^{r/(q+1-r)} + N(\deg I)^{q/(q+1-r)}). \quad (5)$$

Пусть $I_1, \dots, I_s$ – примарные компоненты I , $\mathfrak{p}_k = \sqrt{I_k}$ и t_k – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию $\mathfrak{p}_k^{t_k} \subset I_k$. Если для всех k выполняется

$$\sum_{j=1}^N \log |\mathfrak{p}_k(\bar{\omega})|_j \geq -\tau^{mr} (h(\mathfrak{p}_k) (\deg \mathfrak{p}_k)^{r/(q+1-r)} + N (\deg \mathfrak{p}_k)^{q/(q+1-r)}),$$

то из [8; предложение 1.2] имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \log |I(\bar{\omega})|_j &= \sum_{k=1}^s t_k \sum_{j=1}^N \log |\mathfrak{p}_k(\bar{\omega})|_j \\ &\geq -\tau^{mr} \sum_{k=1}^s t_k h(\mathfrak{p}_k) (\deg \mathfrak{p}_k)^{r/(q+1-r)} - \tau^{mr} N \sum_{k=1}^s t_k (\deg \mathfrak{p}_k)^{q/(q+1-r)} \\ &\geq -\tau^{mr} (\deg I)^{r/(q+1-r)} \sum_{k=1}^s t_k h(\mathfrak{p}_k) - \tau^{mr} N \left(\sum_{k=1}^s t_k \deg \mathfrak{p}_k \right)^{q/(q+1-r)} \\ &= -\tau^{mr} (h(I) (\deg I)^{r/(q+1-r)} + N (\deg I)^{q/(q+1-r)}), \end{aligned}$$

и получившееся неравенство противоречит (5). Значит, существует простой идеал $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_k$, для которого

$$\sum_{j=1}^N \log |\mathfrak{p}(\bar{\omega})|_j < -\tau^{mr} (h(\mathfrak{p}) (\deg \mathfrak{p})^{r/(q+1-r)} + N (\deg \mathfrak{p})^{q/(q+1-r)}). \quad (6)$$

Справедливо равенство $\dim \mathfrak{p} = r - 1$. Пусть сначала $\mathfrak{p}$ строго содержит $\mathfrak{E}$. Применяя предложение 1 к идеалу $\mathfrak{p}$, получим многочлены $A \in \mathfrak{p}$ и $B = TA \notin \mathfrak{p}$, удовлетворяющие оценкам

$$\begin{aligned} \deg_{\bar{x}} B &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\tau} (\deg \mathfrak{p})^{1/(q+1-r)}, \\ \deg_z B &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\tau} (h(\mathfrak{p}) (\deg \mathfrak{p})^{-1+1/(q+1-r)} + 1). \end{aligned}$$

Построим по идеалу $\mathfrak{p}$ и многочлену $B \notin \mathfrak{p}$ результат $G(z, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{r-1})$, как это делается, например, в [8; лемма 1.5]. Пусть

$$G = a^{\deg_{\bar{x}} B} \prod_{j=1}^{\deg \mathfrak{p}} B(1, \alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_m^{(j)}),$$

где алгебраические функции $\alpha_j^{(k)}$ и $a \in \mathbb{C}[z, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{r-1}]$ взяты из [8; лемма 1.4].

Пусть у нас $\varkappa_i$ – набор отображений, определенный перед формулировкой леммы 8 для вектора $\bar{\varphi} = \bar{\omega}$ и идеала $\mathfrak{p}$. Докажем, что $\varkappa_i(a) \neq 0$ и $\varkappa_i(G) \neq 0$. Действительно, если $\varkappa_i(a) = 0$, то $\varkappa_i(F) = 0$, где F – ассоциированная форма $\mathfrak{p}$. Значит,

$$|\mathfrak{p}(\bar{\omega})|_i = |\varkappa_i(F)|_i |F|_i^{-1} |\bar{\omega}|_i^{-r \deg \mathfrak{p}} = 0,$$

отсюда по [1; гл. 3, предложение 4.13] $\bar{\omega}$ – нуль идеала $\mathfrak{p}$, но это не так – противоречие. Если же $\varkappa_i(G) = 0$, то $r \geq 2$ (иначе G не зависит от $\bar{u}_j$, $G \neq 0$, значит,

$\varkappa_i(G) \neq 0$), поэтому по [10; лемма 3] можно построить идеал J с ассоциированной формой, кратной G , и множеством нулей, совпадающим с множеством нулей идеала $(\mathfrak{p}, B)$. Применяя снова [1; гл. 3, предложение 4.13], получим, что $\bar{\omega}$ – нуль J , а значит, и нуль $(\mathfrak{p}, B)$ и, тем более, нуль $\mathfrak{p}$ – снова получаем противоречие.

Значит, мы можем применить лемму 7. Получим гомоморфизмы τ_i , удовлетворяющие следующим условиям:

$$|\tau_i(G)|_i = |\varkappa_i(G)|_i, \quad |\tau_i(a)|_i = |\varkappa_i(a)|_i.$$

В условиях леммы 7 положим

$$W = A, \quad V = x_k^{\deg_{\underline{x}} A}, \quad \bar{\varphi} = \bar{\omega}, \quad \bar{\psi} = \bar{\beta}_{ij};$$

получаем

$$\log |A(\bar{\omega})|_i \leq \log \|\bar{\omega} - \bar{\beta}_{ij}\|_i + \log |\bar{\omega}|_i \deg_{\underline{x}} A.$$

Из определения оператора T видно, что $B = TA$ удовлетворяет таким оценкам:

$$\deg_{\underline{x}} B \geq \deg_{\underline{x}} A, \quad \log |B(\bar{\omega})|_i \leq \log |A(\bar{\omega})|_i + 1.$$

Отсюда получаем

$$\log |B(\bar{\omega})|_i \leq \log \|\bar{\omega} - \bar{\beta}_{ij}\|_i + \log |\bar{\omega}|_i \deg_{\underline{x}} B + 1;$$

если теперь сложить этот результат с утверждением леммы 7 при

$$W = B, \quad V = x_k^{\deg_{\bar{x}} B}, \quad \bar{\varphi} = \bar{\omega}, \quad \bar{\psi} = \bar{\beta}_{ij},$$

где k выбрано так, чтобы $|f_k|_i = |\bar{\omega}|_i$, предварительно прибавив к правой и левой частям исходного неравенства $\log |\beta_{ij}^{(k)}|$, то получим такую оценку:

$$\log |B(\bar{\beta}_{ij})|_i \leq \log \|\bar{\omega} - \bar{\beta}_{ij}\|_i + \log |\bar{\beta}_{ij}|_i \deg_{\bar{x}} B + 1.$$

Используем это неравенство и оценки из леммы 7; получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \log |\varkappa_i(G)|_i &= \sum_{i=1}^N \log |\tau_i(G)|_i \\ &= \sum_{i=1}^N \log |\tau_i(a)|_i \deg_{\bar{x}} B + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\deg \mathfrak{p}} \log |B(\bar{\beta}_{ij})|_i \\ &\leq \sum_{i=1}^N \deg_{\bar{x}} B \log |\varkappa_i(a)|_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\deg \mathfrak{p}} (\log \|\bar{\omega} - \bar{\beta}_{ij}\|_i + \log |\bar{\beta}_{ij}|_i \deg_{\bar{x}} B + 1) \\ &\leq \sum_{i=1}^N (\deg_{\bar{x}} B - 1) \left(\log |\tau_i(a)|_i + \sum_{j=1}^{\deg \mathfrak{p}} \log |\bar{\beta}_{ij}|_i \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \log |\mathfrak{p}(\bar{\omega})|_i + (r - 1) \deg \mathfrak{p} \sum_{i=1}^N \log |\bar{\omega}|_i + N \deg \mathfrak{p} \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{i=1}^N \log |\mathfrak{p}(\bar{w})|_i + (r-1) \deg \mathfrak{p} \sum_{i=1}^N \log |\bar{w}|_i + N \deg \mathfrak{p}. \quad (7)$$

Это неравенство будет выполняться и в том случае, если включение $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{E}$ не выполняется, тогда в качестве B можно взять любой многочлен из базиса $\mathfrak{E}$, не лежащий в $\mathfrak{p}$. Его степень и высота будут ограничены константами, а $\log |B(\bar{w})|_i = -\infty$, отсюда легко получается приведенное выше неравенство.

Но, используя [8; лемма 1.5], получаем в случае $r = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \log |\tau_i(G)|_i &\geq -\deg_z G \geq -h(\mathfrak{p}) \deg_{\bar{x}} B - \deg_z B \deg \mathfrak{p} \\ &\geq -\frac{1}{2} \sqrt{\tau} (h(\mathfrak{p})(\deg \mathfrak{p})^{1/q} + h(\mathfrak{p})(\deg \mathfrak{p})^{1/q} + \deg \mathfrak{p}), \end{aligned}$$

Сравнивая это с (7), получаем противоречие с (6). Случай $r = 1$ невозможен.

Если же $r \geq 2$, то пусть J – однородный несмешанный идеал кольца $\mathbb{C}[z, x_0, \dots, x_m]$, построенный в [10; лемма 3] по идеалу $\mathfrak{p}$ и многочлену B ; его ассоциированная форма имеет вид $w^{-1}G$, где $w \in \mathbb{C}[z]$ – некоторый многочлен. Из этой леммы следует

$$\begin{aligned} \deg J &\leq \deg_{\bar{u}_1} G \leq N(\mathfrak{p}) \deg_{\bar{x}} B \leq \frac{1}{2} \sqrt{\tau} (\deg \mathfrak{p})^{1+1/(q+1-r)}, \\ h(J) + \deg_z w &\leq \deg_z G \leq h(\mathfrak{p}) \deg_{\bar{x}} B + \deg_z B \deg \mathfrak{p} \\ &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\tau} (2h(\mathfrak{p})(\deg \mathfrak{p})^{1/(q+1-r)} + \deg \mathfrak{p}), \\ \log |J(\bar{w})|_i &= \log |\tau_i(G)|_i - (r-1) \log |\bar{w}|_i \deg J - \log |w|_i. \end{aligned}$$

Поскольку $\dim J < \dim \mathfrak{p}$, J удовлетворяет утверждению теоремы 3, т.е.

$$\sum_{i=1}^N \log |J(\bar{w})|_i \geq -\tau^{mr} (h(J)(\deg J)^{r/(q+1-r)} + N(\deg J)^{q/(q+1-r)}).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \log |\mathfrak{p}(\bar{w})|_i &\geq \sum_{i=1}^N \log |\tau_i(G)|_i - (r-1) \deg \mathfrak{p} \deg_{\bar{x}} B \sum_{i=1}^N \log |\bar{w}|_i - N \deg \mathfrak{p} \\ &\geq \sum_{i=1}^N \log |w|_i + \sum_{i=1}^N \log |J(\bar{w})|_i - N \deg \mathfrak{p} \\ &\geq -\deg_z w - \tau^{mr} (h(J)(\deg J)^{r/(q+1-r)} + N(\deg J)^{q/(q+1-r)}). \end{aligned}$$

Из определения $\log |J(\bar{w})|_i$ (см., например, [8], обозначение $\varkappa(w)$ отсюда) видно, что эта величина равна

$$\sum_{i=1}^N \log |\mathfrak{p}(\bar{w})|_i - \sum_{i=1}^N \log |\varkappa(w)|_i.$$

Поскольку $\log |\varkappa(w)| \geq \deg \varkappa(w) \geq \deg w$, подставляя это в последнюю выкладку, мы получим утверждение теоремы для $\mathfrak{p}$. Противоречие. Теорема 3 доказана.

Тем самым, теоремы 1 и 2 тоже доказаны.

В заключение автор хотел бы выразить глубокую благодарность Ю. В. Нестеренко за постановку задачи и постоянное научное руководство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Yu. Nesterenko, Ph. Philippon, “Multiplicity estimates for solutions of algebraic differential equations”, *Introduction to Algebraic Independence Theory*, Lecture Notes in Math., **1752**, Springer-Verlag, Berlin, 2001, 149–165.
- [2] А. Б. Шидловский, *Трансцендентные числа*, Наука, М., 1987.
- [3] Ю. В. Нестеренко, “О мере алгебраической независимости значений эллиптической функции”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:4, 155–178.
- [4] Ю. В. Нестеренко, “Оценки порядка нулей аналитических функций некоторого класса и их приложение в теории трансцендентных чисел”, *Докл. АН СССР*, **205**:2 (1972), 292–295.
- [5] Ю. В. Нестеренко, “Оценки порядков нулей функций одного класса и их приложение в теории трансцендентных чисел”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:2 (1977), 253–284.
- [6] W. D. Brownawell, D. W. Masser, “Multiplicity estimates for analytic functions. I”, *J. Reine Angew. Math.*, **314** (1980), 200–216.
- [7] Нгуен Тьен Тай, “Об оценках порядков нулей многочленов от аналитических функций и их приложении к оценкам мер взаимной трансцендентности значений E -функций”, *Матем. сб.*, **120**:1 (1983), 112–142.
- [8] Ю. В. Нестеренко, “О мере алгебраической независимости значений функций Рамануджана”, *Тр. МИАН*, **218** (1997), 299–334.
- [9] Ю. В. Нестеренко, “Об алгебраической зависимости компонент решений системы линейных дифференциальных уравнений”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:3 (1974), 495–512.
- [10] Ю. В. Нестеренко, “Оценки числа нулей функций некоторых классов”, *Acta Arith.*, **53**:1 (1989), 29–46.
- [11] О. Зарисский, П. Самюэль, *Коммутативная алгебра*, ИЛ, М., 1963.

А. П. Долгалёв

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

19.01.2007