Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Майоров, Е. А. Тимофеев, Статистическая оценка обобщенных размерностей, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 5, 697–712

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm378>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 13:20:56

УДК 517.987

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ОБОБЩЕННЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

В. В. Майоров, Е. А. Тимофеев

Для нахождения обобщенных размерностей множества $A \subset \mathbb{R}^m$ приведена статистическая оценка, основанная на вычислении средних расстояний до ближайших точек между элементами выборки точек из A . Для гладких многообразий с лебеговыми мерами и для самоподобных фракталов с самоподобными мерами доказано, что предлагаемая оценка является состоятельной.

Библиография: 16 названий.

Пусть дана последовательность точек $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ из евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Предположим, что эта последовательность является реализацией независимых случайных величин, одинаково распределенных по мере μ на компактном множестве $A \subset \mathbb{R}^m$, и рассмотрим задачу нахождения размерности множества A с мерой μ по заданной последовательности.

Одним из основных определений размерности, которые используются для характеристики фракталов [1], [2] и странных аттракторов [3], [4], являются обобщенные размерности (называемые также размерностями Реньи, корреляционными размерностями, q -размерностями) и $f(\alpha)$ -спектр (спектр размерностей), введенные в [5], [6] (их определение приведено ниже).

В работе предлагается следующая статистическая оценка обобщенных размерностей меры μ , являющаяся обобщением оценки, описанной в [7]. Точнее, предлагается семейство оценок, зависящих от целого параметра k .

Пусть дана последовательность независимых случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_n$, одинаково распределенных по мере μ с компактным носителем $A \subset \mathbb{R}^m$ ($\mu(A) = 1$). Пусть дано целое число k . Находим вспомогательную случайную величину, зависящую от параметра β ,

$$r_n(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\min_{i \neq j}^{(k)} |x_i - x_j| \right)^\beta, \quad (1)$$

где $\min^{(k)} \{X_1, \dots, X_N\} = X_k$, если $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_N$.

Затем находим случайную величину $\beta_n(q)$ как корень уравнения

$$q = 1 + \frac{\log r_n(\beta)}{\log n} \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 98-01-00214 и № 99-01-00309.

и полагаем оценкой обобщенных размерностей множества A с мерой μ (говорят также об обобщенных размерностях меры μ) случайную величину

$$D_n(q) = \frac{\beta_n(q)}{1 - q}. \quad (3)$$

Отметим, что случайную величину $\beta_n(q)$ можно находить и как корень уравнения

$$q = 1 + \log_2 \frac{r_n(\beta)}{r_{n/2}(\beta)}.$$

Отметим также, что увеличение параметра k позволяет находить обобщенные размерности и для отрицательных значений β .

Обобщенные размерности служат для описания локальных сингулярностей мер или функций. Введенные в [5], [6], [8] для изучения турбулентности, они нашли применение и в других областях физики, химии и биологии. Математическое обоснование этих работ дало новое направление – мультифрактальный анализ [1], [2], [9], [10].

Численное нахождение обобщенных размерностей множеств (странных аттракторов [3], [4]) основывается на построении ε -разбиения или ε -покрытия и нахождении предела при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предлагаемый в настоящей работе подход позволяет убрать эти дополнительные вычисления и существенно их упростить.

Далее в работе будут описаны общие (не строгие) рассуждения, на основе которых была получена оценка (3), и будет доказана ее состоятельность при довольно общих условиях. Для двух классов: гладких многообразий с лебеговскими мерами и самоподобных фракталов с самоподобными мерами, будет доказано, что оценка (3) является состоятельной оценкой обобщенной размерности для каждого q (естественно, что для гладких многообразий все обобщенные размерности совпадают с размерностью многообразия).

1. Определения и известные результаты. Пусть дано множество $A \subset \mathbb{R}^m$ и мера μ на A . Будем считать, что мера μ регулярная борелевская [11] и вероятностная (т.е. $\mu(A) = 1$).

Приведем определения, введенные в [5], [6], [8] (их можно найти и в других работах, например, в [1], [2], [9], [10]).

Функцией разбиения $\beta(q)$ меры μ называется

$$\beta(q) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\log \varepsilon} \log \sum_{i: \mu(K_i) > 0} \mu(K_i)^q, \quad (4)$$

где предел берется по всем разбиениям пространства $\mathbb{R}^m$ (фактически – окрестности A) сеткой размера ε так, чтобы K_i – i -ая ячейка сетки, удовлетворяла условию

$$\exists x_0 \in K_i: B(x_0, \varepsilon/a) \subset K_i \subset B(x_0, \varepsilon), \quad \mu(K_i) > 0.$$

Здесь и далее через $B(x, \varepsilon)$ обозначается открытый шар с центром в точке x и радиуса ε ($a > 1$ – некоторая константа).

Отметим, что более часто функцией разбиения (свободной энергией) меры μ называют функцию $\tau(q) = -\beta(q)$.

Если $\beta(q)$ существует, то *обобщенные размерности* определяются по формуле, аналогичной (3):

$$D(q) = \frac{\beta(q)}{1 - q}. \quad (5)$$

Отметим, что при $q = 1$ этому выражению также можно придать смысл, если считать его равным минус формальной производной числителя по q . Эта производная совпадает с энтропией разбиения K_i , а $D(1)$ называется *информационной размерностью*.

Для самоподобных фракталов ниже будет показано, что функция $\beta_n(q)$, определенная в (2), при $n \rightarrow \infty$ сходится к функции $\beta(q)$, определенной в (4).

Второе определение обобщенных размерностей введено в [12]:

$$D(q) = \frac{1}{q - 1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \sum_{i=1}^n \mu(B(x_i, \varepsilon))^q}{\log \varepsilon}, \quad (6)$$

где $A \subset \bigcup_i B(x_i, \varepsilon)$ и суммирование идет по тем i , для которых $\mu(B(x_i, \varepsilon)) > 0$.

Совпадение этих определений для диаметрально регулярных [11] мер доказано в [13].

Обратимся к идее *мультифрактального разложения*. Для каждой точки x множества A вводится *точечная размерность* меры μ :

$$d_\mu(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, \varepsilon))}{\log 2\varepsilon}. \quad (7)$$

Используя точечную размерность, множество A можно разбить на подмножества

$$A = \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}, \quad (8)$$

где $A_{\alpha} = \{x \in A: d_\mu(x) = \alpha\}$.

Далее для каждого множества A_{α} находим $f(\alpha) = \dim_H A_{\alpha}$, где $\dim_H$ – размерность Хаусдорфа.

Напомним определение размерности Хаусдорфа (см., например, [11]).

Для подмножества $M \subset \mathbb{R}^m$ определим внешнюю меру Хаусдорфа размерности s , положив

$$H^s(M) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(A_i)^s : M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, 0 < \text{diam}(A_i) < \delta \right\}. \quad (9)$$

Для множества $M \subset \mathbb{R}^m$ существует единственное число $\dim_H M$, $0 \leq \dim_H M \leq m$, такое, что

$$\begin{aligned} H^t(M) &= \infty, & \text{если } t < \dim_H M, \\ H^t(M) &= 0, & \text{если } t > \dim_H M, \end{aligned}$$

которое и называется *размерностью Хаусдорфа* множества M .

Нахождение размерности Хаусдорфа является очень трудной задачей. Однако в ряде случаев она может быть вычислена через функцию $\beta(q)$.

Напомним, что *преобразованием Лежандра* функции $\beta(q)$ называется функция

$$\beta^*(\alpha) = \inf_{q \in \mathbb{R}} (q\alpha + \beta(q)). \quad (10)$$

Если существует производная $\beta'(q)$ и $\beta(q)$ выпукла, то

$$\beta^*(\alpha) = q\alpha + \beta(q), \quad \text{где } \alpha = -\beta'(q).$$

Центральная идея работы [8] и состоит в том, что

$$f(\alpha) = \beta^*(\alpha). \quad (11)$$

В общем случае доказано, что (см., например, [9], [14])

$$f(\alpha) \leq \beta^*(\alpha).$$

Приведем описание ряда множеств и мер, для которых найдена функция $f(\alpha)$ и доказано равенство (11), которое называется *мультифрактальным формализмом*:

- 1) для самоподобных фракталов с самоподобной мерой [1];
- 2) для более общего класса фракталов (digraph recursive fractals) [2];
- 3) для случайных самоподобных фракталов [10];
- 4) для канторовских множеств на прямой, построенных нелинейными гладкими сжатиями (cookie-cutter sets) [15].

2. Неформальный вывод оценки размерностей. В этом разделе будут описаны общие (не строгие) рассуждения, из которых будет получена оценка (3) обобщенных размерностей. Будем считать, что $\beta > 0$ и k не зависит от n .

Положим

$$\rho_{n,i}^{(k)} = \min_{j: j \neq i}^{(k)} |x_j - x_i| \quad (12)$$

и рассмотрим набор шаров $B(x_i, \rho_{n,i}^{(k)})$. Предположим, что при достаточно большом n шары образуют покрытие множества A , и рассмотрим сумму

$$S_n(\beta) = \sum_{j=1}^n (\rho_{n,i}^{(k)})^\beta \quad (\beta > 0) \quad (13)$$

как сумму в определении меры Хаусдорфа (9). Выдвинем гипотезу, что при $n \gg 1$ значение случайной величины

$$S_n(\beta) = n^{q+o(1)}, \quad (14)$$

где $o(1)$ – слагаемые, стремящиеся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Отметим, что равенство (14) эквивалентно

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log S_n(\beta)}{\log n}.$$

Выдвинутое предположение не противоречит идее определения размерности Хаусдорфа: при достаточно большом положительном значении β в пределе сумма Хаусдорфа равна нулю, а при малом β – бесконечности. Инфимум тех значений β , при которых сумма равна нулю, и есть размерность множества.

В этой связи за оценку размерности предлагается принять корень уравнения $S_n(\beta) = 1$ (т.е. в (14) $q = 0$).

Обсудим элементарные свойства функции $S_n(\beta)$. Ее производная

$$S'_n(\beta) = \sum_{i=1}^n (\rho_{n,i}^{(k)})^\beta \ln \rho_{n,i}^{(k)} < 0$$

при $\rho_{n,i}^{(k)} < 1$ (что выполняется при большом n). Поэтому из уравнения (14) после отбрасывания членов $o(1)$ можно найти корень $\beta_n(q)$. Ясно, что $\beta_n(1) = 0$ и $\beta_n(q) \rightarrow \infty$ при $q \rightarrow -\infty$. Тем самым, $\beta_n(0)$ – оценка размерности Хаусдорфа, может быть вычислена.

За оценку обобщенных размерностей примем функцию (3), в которой $\beta_n(q)$ – корень уравнения (14).

Переформулируем построения несколько в другом виде. От суммы $S_n(\beta)$ перейдем к ее среднему $r_n(\beta)$, определенному в (1). В соответствии с выдвинутой гипотезой (14) имеем

$$r_n(\beta) = n^{q-1+o(1)}.$$

Логарифмируя последнее равенство, получим уравнение (2), которое и было предложено выше для определения функции $\beta_n(q)$.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Вывод статистической оценки базируется на определении размерности Хаусдорфа и опирается на предположение $\beta > 0$. Однако формально сумма $S_n(\beta)$ определена и для $\beta < 0$. Если при этом асимптотическое равенство (14) имеет место, то ясно, что в нем $q > 1$ и оценка размерности будет определена для $q > 1$. Пусть в (1) и в (12) целое число $k > 1$; тогда шары $B(x_i, \rho_{n,i}^{(k)})$ заведомо перекрываются. В работе [9] приводятся примеры, демонстрирующие, что покрытия такого рода позволяют определить обобщенные размерности для $q > 1$. Ниже для гладких многообразий и самоподобных фракталов будет доказана справедливость равенства (14) при $\beta > \beta^{(k)}$, где $\beta^{(k)} \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow \infty$.

3. Состоятельность оценки.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – компакт в $\mathbb{R}^m$ с борелевской вероятностной мерой μ , пусть случайные величины $x_1, x_2, \dots, x_n$ независимы и одинаково распределены на A по этой мере, и пусть $F(t, y)$ – функция распределения величины $|x_i - y|$, непрерывна и удовлетворяет ограничениям

$$C_1 t^{\alpha_1} \leq F(t, y) \leq C_2 t^{\alpha_2} \quad \forall t > 0, \quad \forall y \in A, \quad (15)$$

где $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$ – некоторые константы.

Пусть величины k и β , применяющиеся в (1)–(3), не зависят от n и удовлетворяют ограничению

$$(k-2)\alpha_2 + 2\beta > 0. \quad (16)$$

Тогда существуют $E(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta, D(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta$.

Пусть, кроме этого, существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log E(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta}{\log n} = q(\beta) - 1, \quad (17)$$

где $q(\beta)$ не зависит от k и удовлетворяет неравенству

$$q(2\beta) < 2q(\beta) \quad \forall \beta; \quad (18)$$

тогда

$$D(r_n(\beta)n^{1-q(\beta)}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (19)$$

где случайные величины $\rho_{n,i}^{(k)}$ определены в (12), а $r_n(\beta)$ в (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем моменты и ковариацию случайных величин $\rho_{n,i}^{(k)}$, определенных в (12).

Обозначим через $\Phi_{n,k}(u, y)$ функцию распределения случайной величины $\rho_{n,i}^{(k)}$, определенной в (12), при условии, что $x_i = y$ (ясно, что распределение не зависит от i). В силу независимости случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_n$ имеем

$$d_u \Phi_{n,k}(u, y) = (n-1) \binom{n-2}{k-1} F(u, y)^{k-1} (1 - F(u, y))^{n-k-1} d_u F(u, y). \quad (20)$$

Прежде чем перейти к нахождению моментов величин $\rho_{n,i}^{(k)}$, докажем простую лемму.

ЛЕММА 1. Пусть функция $F(t) = F(t, y)$ удовлетворяет условию (15), и пусть константы β и $k \geq 1$ удовлетворяют ограничению

$$\beta + \alpha_2 k > 0.$$

Тогда существуют константы $a_1, a_2, C'_3, C'_4, C_5 > 0$ (не зависящие от N) такие, что

$$C'_3 N^{-(a_1 \beta + k)} \leq \int_0^\infty t^\beta F(t)^{k-1} (1 - F(t))^N dF(t) \leq C'_4 N^{-(a_2 \beta + k)}$$

и при $\varepsilon_N = (\tau \ln N / (C_1 N))^{1/\alpha_1}$

$$\int_{\varepsilon_N}^\infty t^\beta F(t)^{k-1} (1 - F(t))^N dF(t) \leq C_5 N^{-\tau}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия (15) следует, что

$$C_2^{-1/\alpha_2} F(t)^{1/\alpha_2} \leq t \leq C_1^{-1/\alpha_1} F(t)^{1/\alpha_1}.$$

Положим

$$(a_1, a_2) = \begin{cases} (1/\alpha_1, 1/\alpha_2), & \beta \geq 0, \\ (1/\alpha_2, 1/\alpha_1), & \beta < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$C'_1 F^{a_1 \beta} \leq t^\beta \leq C'_2 F^{a_2 \beta}.$$

Подставляя в интеграл $\int_0^\infty t^\beta F(t)^{k-1} (1 - F(t))^N dF(t)$ вместо t эти оценки и делая замену переменной $x = F(t)$, получим интегралы вида $\int_0^1 x^{\gamma-1} (1-x)^N dx$. По условию леммы $\gamma = k + a_i \beta > 0$, поэтому этот интеграл существует и сводится к бета-функции. Отсюда следует первая оценка.

Вторая оценка получается при замене $1 - F(t) \leq \exp(-C_1 \varepsilon_N^{\alpha_1}) = N^{-\tau/N}$.

Лемма доказана.

Применяя эту лемму для оценки β -момента и 2β -момента случайных величин $\rho_{n,i}^{(k)}$, получим, что существуют их условные математические ожидания при $x_i = y$. В силу непрерывности функции $F(t, y)$ отсюда следует существование $E(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta$ и $D(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta$.

Оценим ковариацию величин $\rho_{n,i}^{(k)}$ и $\rho_{n,j}^{(k)}$.

ЛЕММА 2. Пусть функция $F(t) = F(t, y)$ удовлетворяет условию (15), а β и k – условию (16). Тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует константа C_6 такая, что

$$E[(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta (\rho_{n,j}^{(k)})^\beta \mid x_i = y, x_j = z] \leq C_6 n^\varepsilon E[(\rho_{n,i}^{(k_0)})^\beta \mid x_i = y] E[(\rho_{n,j}^{(k_0)})^\beta \mid x_j = z]. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\Phi_{n,k}(u, v, y, z)$ функцию совместного распределения случайных величин $\rho_{n,i}^{(k)}, \rho_{n,j}^{(k)}$ при условии, что $x_i = y, x_j = z$ (ясно, что распределение не зависит от i, j).

Оценим двойной дифференциал (по u, v) функции $\Phi_{n,k}(u, v, y, z)$. Для этого нужно оценить вероятность того, что из $n - 2$ точек две попали на границу шаров $B(y, u)$, $B(z, v)$ и по $k - 1$ точек попало внутрь каждого шара. Для краткости записи введем обозначения

$$\begin{aligned} \mu_u &= P\{x_k \in B(y, u)\} = F(u, y), & \mu_v &= P\{x_k \in B(z, v)\} = F(v, z), \\ \mu_{uv} &= P\{x_k \in B(y, u) \cap B(z, v)\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Обозначим через $P_m^{a,b}$ ($a, b = 0, 1$) вероятность того, что ровно m точек из $n - 4$ попало внутрь шаров $B(y, u) \cup B(z, v)$ по $k - 1$ точке в каждом шаре при условии, что две точки лежат на границах шаров так, что при $a = 0$ ($b = 0$) точка, попавшая на границу шара $B(z, v)$ ($B(y, u)$), лежит внутри второго шара, а при $a = 1$ ($b = 1$) точка, попавшая на границу шара $B(z, v)$ ($B(y, u)$), не лежит внутри второго шара. В этом случае $m - k + a$ точек лежат внутри $B(y, u) \setminus B(z, v)$, $m - k + b$ точек – внутри $B(z, v) \setminus B(y, u)$ и $2k - m - 2$ точек – внутри $B(z, v) \cap B(y, u)$.

В силу независимости случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_n$ вероятности $P_m^{a,b}$ можно оценить как

$$\begin{aligned} P_m^{a,b} &\leq \binom{n-4}{m-2+a+b} \binom{m-2+a+b}{m-k+a} \binom{k-2+b}{m-k+b} \\ &\quad \times \varphi_{2k-m-2, n-2-m-a-b}^{m-k+a, m-k+b}(u, v, y, z), \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\varphi_{m,N}^{k,l}(u, v, y, z) = (\mu_u - \mu_{uv})^k (\mu_v - \mu_{uv})^l \mu_{uv}^m (1 - \mu_u - \mu_v + \mu_{uv})^N. \quad (24)$$

Оценим $\varphi_{m,N}^{k,l}(u, v, y, z)$ как

$$\varphi_{m,N}^{k,l}(u, v, y, z) \leq \mu_u^{k+\delta} \mu_v^{l+m-\delta} (1 - \mu_u)^{N/2} (1 - \mu_v)^{N/2}, \quad 0 \leq \delta \leq m.$$

Заменяя $n - 2 - m - a - b$ на $n - 2k - 4 \leq n - 2 - m - a - b$, для вероятностей $P_m^{a,b}$ получаем следующую оценку:

$$P_m^{a,b} \leq C_7 n^{m-2+a+b} \mu_u^{m-k+a+\delta} \mu_v^{k-2+b-\delta} (1 - \mu_u)^{n/2-k-2} (1 - \mu_v)^{n/2-k-2},$$

где δ – пока произвольный параметр, $0 \leq \delta \leq 2k - m - 2$, C_7 – не зависящая от n константа.

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_u^\infty u^\beta v^\beta P_m^{a,b} d_v F(v, z) d_u F(u, y) \\ & \leq C_7 n^{m-2+a+b} \int_0^\infty u^\beta \mu_u^{m-k+a+\delta} (1-\mu_u)^{n/2-k-2} d_u F(u, y) \\ & \quad \times \int_0^\infty v^\beta \mu_v^{k-2+b-\delta} (1-\mu_v)^{n/2-k-2} d_v F(v, z). \end{aligned}$$

Поскольку $m-2+a+b \geq k-2$, то можно выбрать целое значение δ так, чтобы

$$k_1 = m - k + a + \delta + 1 \geq \frac{k}{2} - 1, \quad k_2 = k - 1 + b - \delta \geq \frac{k}{2} - 1.$$

Поэтому интегралы в правой части неравенства существуют. Выражая их через условные математические ожидания $E[(\rho_{n,i}^{(k_1)})^\beta \mid x_i = y]$ и $E[(\rho_{n,j}^{(k_2)})^\beta \mid x_j = z]$, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_u^\infty u^\beta v^\beta P_m^{a,b} d_v F(v, z) d_u F(u, y) \\ & \leq C_9 n^{-2} E[(\rho_{n/2-k-2,i}^{(k_1)})^\beta \mid x_i = y] E[(\rho_{n/2-k-2,j}^{(k_2)})^\beta \mid x_j = z]. \end{aligned}$$

По условию (17) $\forall \varepsilon > 0$ в этой оценке можно заменить $n/2 - k - 2$ на n и k_1, k_2 на k , взяв вместо C_9 величину $C_{10} n^\varepsilon$, где C_{10} – новая константа. Тогда получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_u^\infty u^\beta v^\beta P_m^{a,b} d_v F(v, z) d_u F(u, y) \\ & \leq C_{10} n^{-2+\varepsilon} E[(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta \mid x_i = y] E[(\rho_{n,j}^{(k)})^\beta \mid x_j = z]. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} & E[(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta (\rho_{n,j}^{(k)})^\beta \mid x_i = y, x_j = z] \\ & = n(n-1) \sum_{a,b,m} \int_0^\infty \int_u^\infty u^\beta v^\beta P_m^{a,b} d_v F(v, z) d_u F(u, y), \end{aligned}$$

подставляя выведенную оценку, получим (21).

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть функция $F(t) = F(t, y)$ удовлетворяет условию (15), а β и k – условию (16), и пусть $|y - z| > C_0 n^{-a}$, где $0 < a < 1/\alpha_1$. Тогда существуют константы C_7 и $b > 0$ такие, что

$$E[(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta (\rho_{n,j}^{(k)})^\beta \mid x_i = y, x_j = z] \leq (1 + C_7 n^{-b}) E[(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta \mid x_i = y] E[(\rho_{n,j}^{(k)})^\beta \mid x_j = z]. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если шары радиусов u, v с центрами в точках z и y не пересекаются, то двойной дифференциал (по u, v) функции $\Phi_{n,k}(u, v, y, z)$ совместного распределения случайных величин $\rho_{n,i}^{(k)}, \rho_{n,j}^{(k)}$ при условии, что $x_i = y, x_j = z$, можно существенно упростить:

$$d_u d_v \Phi_{n,k}(u, v, y, z) = (n-2)(n-3) \binom{n-4}{k-1} \binom{n-k-3}{k-1} F(u, y)^{k-1} F(v, z)^{k-1} \times (1 - F(u, y) - F(v, z))^{n-2k-2} d_u F(u, y) d_v F(v, z). \quad (26)$$

Аналогично доказательству леммы 1 отсюда получаем, что

$$\mathbb{E}[(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta (\rho_{n,j}^{(k)})^\beta \mid x_i = y, x_j = z] \geq C_3 n^{-2\alpha_1 \beta}.$$

Для получения оценки

$$\iint_{u > \varepsilon \vee v > \varepsilon} u^\beta v^\beta d_u d_v \Phi_{n,k}(u, v, y, z) = \mathcal{O}(n^{-n^c}),$$

где $\varepsilon = C_0 n^{-a}/2, c > 0$, воспользуемся неравенством

$$\Phi_{n,k}(u, v, y, z) \leq \min\{\Phi_n(u, y), \Phi_n(v, z)\}$$

и применим лемму 1. Нетрудно видеть, что для параметра τ из этой леммы при $\varepsilon = C_0 n^{-a}/2$ имеем $\tau = \mathcal{O}(n^c)$, где $0 < c < 1 - a\alpha_1$.

Следовательно, при нахождении условных математических ожиданий

$$\mathbb{E}[(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta (\rho_{n,j}^{(k)})^\beta \mid x_i = y, x_j = z]$$

достаточно рассматривать шары с радиусом $< C_0 n^{-a}/2$, которые не пересекаются.

Применяя для оценки распределения (26) неравенство

$$1 - F(u, y) - F(v, z) \leq (1 - F(u, y))(1 - F(v, z))$$

и подставляя $\Phi_n(u, y)$ из (20), получим

$$d_u d_v \Phi_{n,k}(u, v, y, z) \leq (1 + C_8 n^{-1})(1 - F(\varepsilon, x))^{-k-1} \times (1 - F(\varepsilon, y))^{-k-1} d_u \Phi_{n,k}(u, y) d_v \Phi_{n,k}(v, z),$$

где C_8 – некоторая константа. Подставляя $\varepsilon = C_0 n^{-a}/2$ и оценку (15), получим оценку (25) с $b = a\alpha_2$.

Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать (19). Для дисперсии $r_n(\beta)$ имеем

$$\mathbb{D}(r_n(\beta)) = \frac{1}{n} \mathbb{D}[(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta] + \frac{1}{n^2} \sum_{i \neq j} \text{Cov}((\rho_{n,i}^{(k)})^\beta, (\rho_{n,j}^{(k)})^\beta).$$

Из условий (17) и (18) следует, что

$$\frac{1}{n} D[(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta] = o(1) [E(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta]^2, \quad n \rightarrow \infty.$$

Для оценки ковариаций выберем a_1 так, чтобы $0 < a_1 < 1/\alpha_1$ и для каждого i разобьем сумму ковариаций по j на две части:

$$J_1 = \{j: |x_j - x_i| \leq C_0 n^{-a_1}\}, \quad J_2 = \{j: |x_j - x_i| > C_0 n^{-a_1}\}.$$

Для оценки ковариаций в первой сумме применим лемму 2, а для оценки ковариаций во второй сумме применим лемму 3. Пусть ν – число слагаемых в первой сумме; тогда

$$P\{\nu > C_4 n^{1-a_2}\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $C_4, a_2 > 0$ – некоторые константы. Таким образом, для некоторого $\delta > 0$ вклад ковариаций в $D(r_n(\beta))$ равен $\theta(n^{-\delta}) [E(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta]^2$ при $n \rightarrow \infty$.

В силу условия (17) для некоторого $\varepsilon > 0$ имеем $E(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta = \theta(n^{q(\beta)-1+\varepsilon})$.

Следовательно, $D(r_n(\beta) n^{1-q(\beta)}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема доказана.

Таким образом, в силу теоремы случайная величина $r_n(\beta) n^{1-q(\beta)}$ сходится по вероятности к константе при $n \rightarrow \infty$.

4. Гладкие многообразия.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A – гладкое компактное многообразие в $\mathbb{R}^m$, имеющее размерность s . Пусть на A задана лебегова мера с плотностью $f(x)$ такой, что

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in A. \quad (27)$$

Пусть случайные величины $x_1, x_2, \dots, x_n$ независимы и одинаково распределены по этой мере, и пусть величины k и β , применяющиеся в (1)–(3), не зависят от n и удовлетворяют ограничению

$$(k-2)s + 2\beta > 0. \quad (28)$$

Тогда для каждого q последовательность случайных величин $D_n(q)$, определенных в (1)–(3), сходится по вероятности к константе s при $n \rightarrow \infty$.

Отметим, что предположение (27) не ограничивает общности, поскольку оно означает, что вероятности попадания в малую окрестность любой точки из A одинаковы по порядку.

Отметим также, что предположение (28) позволяет находить обобщенные размерности и при отрицательных значениях β , но в этом случае k должно быть достаточно большим, т.е. покрытие множества A шарами с центрами в точках x_i будет иметь существенные перекрытия (см. [9]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем моменты случайных величин $\rho_{n,i}^{(k)}$, определенных в (12).

Поскольку A – гладкое многообразие размерности s , а $x_1, x_2, \dots, x_n$ – независимые случайные величины, имеющие плотность распределения $f(x)$, то функция $F(u, y)$ ($y \in A, u \in \mathbb{R}$) распределения случайной величины $|x_i - y|$ задается как

$$F(u, y) = P\{|x_i - y| < u\} = f(y)V_s u^s + \mathcal{O}(u^{s+1}) \quad \forall y \in A, \quad (29)$$

где $V_s = \Gamma(1/2)^s / \Gamma(s/2 + 1)$ – объем единичного s -мерного шара, $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Следовательно, лемма 1 применима с $\alpha_1 = \alpha_2 = s$, поэтому β -момент величин $\rho_{n,i}^{(k)}$ существует. Найдем его с точностью до $\mathcal{O}(n^{-1/s})$.

Положим $u = tn^{-1/s}$. Тогда

$$F(tn^{-1/s}, y) = n^{-1}(f(y)V_s t^s + \mathcal{O}(n^{-1/s})).$$

Поэтому $d_u \Phi_{n,k}(u, y)$ (где $\Phi_{n,k}(u, y)$ – функция распределения случайной величины $\rho_{n,i}^{(k)}$ при условии, что $x_i = y$), определенную в (20), можно записать в более простом виде:

$$d_u \Phi_{n,k}(tn^{-1/s}, y) = \frac{1}{(k-1)!} s f(y)^k V_s^k n^{-1/s} t^{sk-1} e^{-f(y)V_s t^s} (1 + \mathcal{O}(n^{-1/s})) dt. \quad (30)$$

Отсюда для условного математического ожидания случайной величины $(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta$ получаем

$$E[(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta | x_i = y] = \frac{1}{(k-1)!} n^{-\beta/s} s f(y)^k V_s^k \int_0^\infty t^{sk+\beta-1} e^{-f(y)V_s t^s} dt (1 + \mathcal{O}(n^{-1/s})).$$

При выполнении условия (28) интеграл существует и заменой $\tau = f(y)V_s t^s$ сводится к гамма-функции, поэтому

$$E[(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta | x_i = y] = (f(y)V_s)^{-\beta/s} n^{-\beta/s} \frac{\Gamma(k + \beta/s)}{(k-1)!} (1 + \mathcal{O}(n^{-1/s})).$$

Следовательно, для случайной величины $\rho_{n,i}^{(k)}$ имеем

$$E(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta = n^{-\beta/s} V_s^{-\beta/s} \frac{\Gamma(k + \beta/s)}{(k-1)!} \int_M f(y)^{1-\beta/s} dy (1 + \mathcal{O}(n^{-1/s})). \quad (31)$$

Отметим, что полученная формула (31) достаточно проста и ранее была известна для случая, когда A является областью в пространстве $\mathbb{R}^s$ ([16] – первая из известных нам работ).

Для доказательства состоятельности покажем, что можно применить теорему 1.

Условие (15) выполнено с $\alpha_1 = \alpha_2 = s$, поэтому условие (16) совпадает с (28).

Из (31) следует, что условие (17) выполнено с $q(\beta) = 1 - \beta/s$. Неравенство (18) очевидно.

Следовательно, случайные величины $D_n(q)$ при $q < 1 - k/2$ сходятся по вероятности к константе s при $n \rightarrow \infty$.

Теорема доказана.

Итак, оценка размерности, найденная по (1)–(3), является состоятельной и не зависит от распределения случайных величин.

5. Самоподобные фракталы. Напомним определение самоподобного фрактала [1].

Пусть даны: K – компактное множество в $\mathbb{R}^m$ такое, что $K = \overline{\text{int } K}$, где $\text{int } K$ – внутренность K , и $T = \{T_1, T_2, \dots, T_l\}$ – конечное семейство подобий (т.е. $T_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $|T_i(x) - T_i(y)| = t_i|x - y| \forall x, y \in \mathbb{R}^m, 0 < t_i < 1$) таких, что

$$T_i(\text{int } K) \subset \text{int } K, \quad T_i(\text{int } K) \cap T_j(\text{int } K) = \emptyset, \quad 1 \leq i < j \leq l. \quad (32)$$

Тогда аттрактор A , полученный применением подобий $T_1, \dots, T_l$ к множеству K , и называется *самоподобным фракталом* (self-similar) A .

Отметим, что A будет единственным (не пустым) компактным множеством таким, что

$$A = \bigcup_{i=1}^l T_i(A). \quad (33)$$

Для данных чисел $\theta_i > 0$ ($i = 1, \dots, l$) таких, что $\sum_{i=1}^l \theta_i = 1$, существует [1] (единственная) *самоподобная мера* μ с носителем $\text{supp } \mu = A$ и

$$\mu = \sum_{i=1}^l \theta_i \mu \circ T_i^{-1}. \quad (34)$$

Функция $\beta = \beta(q)$, определяющая обобщенные размерности по формуле (5), находится как решение уравнения (см. [1])

$$\sum_{i=1}^l t_i^\beta \theta_i^q = 1, \quad (35)$$

при этом $\beta(0) = \dim_H A$. Функция $\beta = \beta(q)$ является аналитической, выпуклой и монотонно убывающей (см. [1]). Нетрудно проверить, что функция $\beta(q)$ и обратная функция $q = q(\beta)$ являются строго субаддитивными, т.е.

$$q(\beta_1 + \beta_2) < q(\beta_1) + q(\beta_2) \quad \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}. \quad (36)$$

Отметим следующее свойство самоподобной меры, вытекающее из (32) и (34):

$$\mu(T_i M) = \theta_i \mu(M) \quad \forall M \subset \text{int } K, \quad 1 \leq i \leq l. \quad (37)$$

Для упрощения дальнейших выкладок будем рассматривать самоподобные фракталы, которые удовлетворяют более сильному условию, чем второе условие в (32):

$$T_i(K) \cap T_j(K) = \emptyset, \quad 1 \leq i < j \leq l. \quad (38)$$

В этом случае

$$d_0 = \min_{i \neq j} \min_{x \in T_i A, y \in T_j A} |x - y| > 0. \quad (39)$$

Тогда из (37) и (38) вытекает, что

$$\mu B(T_i y, t_i r) = \theta_i \mu B(y, r), \quad r \leq d_0, \quad 1 \leq i \leq l. \quad (40)$$

Из (37) следует, что существуют такие константы $C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$, что для функции $F(r, y) = \mu(B(y, r))$ выполняется условие (15).

Отметим, что можно взять α_1, α_2 равными

$$\alpha_2 = \min_{1 \leq i \leq l} \frac{\log \theta_i}{\log t_i}, \quad \alpha_1 = \max_{1 \leq i \leq l} \frac{\log \theta_i}{\log t_i}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть самоподобный фрактал $A \subset \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условиям (32), (38). Пусть случайные величины $x_1, x_2, \dots, x_n$ независимы и равномерно распределены на A по самоподобной мере μ , удовлетворяющей условиям (34) (а следовательно, и (15)). Пусть величины k и β , применяющиеся в (1)–(3), не зависят от n и удовлетворяют ограничению (16).

Тогда для каждого q последовательность случайных величин $\beta_n(q)$, определенных в (2), сходится по вероятности (при $n \rightarrow \infty$) к константе $\beta(q)$, являющейся корнем уравнения (35).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наметим схему доказательства. В отличие от доказательства теоремы 2 нахождение моментов случайных величин $\rho_{n,i}^{(k)}$, определенных в (12), является более трудной задачей, полное решение которой нам неизвестно. Поэтому будут найдены только оценки для их моментов (лемма 4), которые позволят найти предел $\log E(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta / \log n$ при $n \rightarrow \infty$. Доказательство справедливости оценок опирается на основное рекуррентное линейное соотношение (44), связывающее величины, пропорциональные моментам, для различных значений n .

Для доказательства состоятельности оценки будет применена теорема 1. Полученные оценки гарантируют сходимость по вероятности к константе случайной величины $1 + \log r_n(\beta) / \log n$. Будет показано, что эта константа является решением уравнения (35) при заданной β .

Перейдем к доказательству теоремы.

Поскольку случайные величины x_i распределены по мере μ , то

$$F(u, y) = P\{|x_i - x_j| < u \mid x_j = y\} = \mu(B(y, u)).$$

Основное свойство распределения (29), использованное в предыдущем случае, заменяется на свойство (40).

Найдем моменты случайной величины $\rho_{n,i}^{(k)}$, определенной в (12).

Функция распределения $\Phi_{n,k}(t, y)$ случайной величины $\rho_{n,i}^{(k)}$ при условии, что $x_i = y$, задана в (20), поэтому

$$E(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta = \int_A \int_0^\infty t^\beta (n-1) \binom{n-2}{k-1} F(t, y)^{k-1} (1 - F(t, y))^{n-k-1} dt F(t, y) d\mu(y). \quad (41)$$

По лемме 1 интеграл в (41) существует при β , удовлетворяющем условию (16).

Положим

$$Z_n^k(\beta) = \int_A \int_0^\infty u^\beta F(u, y)^k (1 - F(u, y))^n du F(u, y) d\mu(y) \quad (42)$$

и выведем рекуррентное уравнение для величин $Z_n^k(\beta)$.

Заметим, что интеграл по бесконечному интервалу основной вклад имеет около 0, поэтому из (15) следует, что (для некоторой константы $0 < \gamma < 1$)

$$Z_n^k(\beta) = \int_A \int_0^{d_0} v^\beta F(v, x)^k (1 - F(v, x))^n dv F(v, x) d\mu(x) + \mathcal{O}(\gamma^n), \quad (43)$$

где d_0 определено в (39).

В силу (33) величину $Z_n^k(\beta)$ можно переписать как

$$Z_n^k(\beta) = \sum_{i=1}^l \int_{T_i A} \int_0^\infty u^\beta F(u, y)^k (1 - F(u, y))^n d_u F(u, y) d\mu(y).$$

Сделаем в каждом интеграле замену переменных, положив $y = T_i(x)$, $u = t_i v$. Тогда получим

$$Z_n^k(\beta) = \sum_{i=1}^l t_i^\beta \int_A \int_0^\infty v^\beta F(t_i v, T_i x)^k (1 - F(t_i v, T_i x))^n d_v F(t_i v, T_i x) d\mu(T_i x).$$

Так же, как и в переходе от (42) к (43) перепишем величину $Z_n^k(\beta)$ как

$$Z_n^k(\beta) = \sum_{i=1}^l t_i^\beta \int_A \int_0^{d_0} v^\beta F(t_i v, T_i x)^k (1 - F(t_i v, T_i x))^n d_v F(t_i v, T_i x) d\mu(T_i x) + \mathcal{O}(\gamma^n),$$

где d_0 определено в (39). Поэтому можно применить (40) и тогда получим (возвращаясь к интегрированию по бесконечному промежутку по (43))

$$Z_n^k(\beta) = \sum_{i=1}^l t_i^\beta \theta_i^{k+2} \int_A \int_0^\infty v^\beta F(v, x)^k (1 - \theta_i F(v, x))^n d_v F(v, x) d\mu(x) + \mathcal{O}(\gamma^n).$$

Разлагая $(1 - \theta_i F(v, x))^n = [(1 - \theta_i) + \theta_i(1 - F(v, x))]^n$ по биному Ньютона и подставляя (42), получим рекуррентное уравнение

$$Z_n^k(\beta) = \sum_{i=1}^l t_i^\beta \theta_i^{k+2} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (1 - \theta_i)^{n-j} \theta_i^j Z_j^k(\beta) + \mathcal{O}(\gamma^n). \quad (44)$$

Опираясь на это рекуррентное уравнение (44), выведем верхнюю и нижнюю оценки.

ЛЕММА 4. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют константы C_3, C_4 (не зависящие от n) такие, что

$$C_3 n^{\alpha-\varepsilon} \leq Z_n^k(\beta) \leq C_4 n^{\alpha+\varepsilon}, \quad \alpha = q(\beta) - k - 2,$$

где $q(\beta)$ – корень уравнения (35) при заданном β (обратная функция к $\beta(q)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем оценку сверху индукцией по n . Ясно, что при начальных значениях n оценка справедлива при соответствующем выборе константы C_4 .

Перепишем уравнение (44) как верхнюю оценку

$$Z_n^k(\beta) \leq \sum_{i=1}^l t_i^\beta \theta_i^{k+2} \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} (1 - \theta_i)^{n-j} \theta_i^j Z_j^k(\beta) + C_5 \gamma^n.$$

Отметим, что слагаемые в сумме при $j = 0$ и $j = n$, имеющие экспоненциальную оценку, занесены в слагаемое $C_5 \gamma^n$.

Применив предположение индукции, получим оценку

$$Z_n^k(\beta) \leq \sum_{i=1}^l t_i^\beta \theta_i^{k+2} \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} (1 - \theta_i)^{n-j} \theta_i^j C_4 j^{\alpha+\varepsilon} + C_5 \gamma^n.$$

Для нахождения суммы в правой части неравенства применим лемму 2 из [7], в которой методом Лапласа показано, что при $0 < \theta < 1$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} \theta^j (1 - \theta)^{n-j} j^\alpha = \theta^\alpha n^\alpha (1 + \theta(n^{-1/2})). \quad (45)$$

Перепишем уравнение (45) как верхнюю оценку

$$\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \theta^j (1 - \theta)^{n-j} j^\alpha \leq \theta^\alpha n^\alpha (1 + C_6 n^{-1/2}).$$

Подставив эту оценку в полученную верхнюю оценку для $Z_n^k(\beta)$, получим

$$Z_n^k(\beta) \leq \sum_{i=1}^l t_i^\beta \theta_i^{k+2} C_4 \theta_i^{\alpha+\varepsilon} n^{\alpha+\varepsilon} (1 + C_6 n^{-1/2}) + C_5 \gamma^n.$$

Подставляя $\alpha = q(\beta) - k - 2$, где $q(\beta)$ – корень уравнения (35) при заданном β , получим

$$Z_n^k(\beta) \leq C_4 n^{\alpha+\varepsilon} \sum_{i=1}^l t_i^\beta \theta_i^{q(\beta)+\varepsilon} (1 + C_6 n^{-1/2}) + C_5 \gamma^n.$$

При достаточно большом n из этого неравенства следует верхняя оценка леммы, поскольку $q(\beta)$ – корень уравнения (35) при заданном β и поэтому

$$\sum_{i=1}^l t_i^\beta \theta_i^{q(\beta)+\varepsilon} < \sum_{i=1}^l t_i^\beta \theta_i^{q(\beta)} = 1.$$

Оценка снизу доказывается аналогичным образом. Лемма доказана.

Перейдем к оценке $E(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta$.

Из (41) и (42) имеем

$$E(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta = (n-1) \binom{n-2}{k-1} Z_{n-k-1}^{k-1}(\beta).$$

Отсюда и из леммы 4 получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют константы C_4, C_5 (не зависящие от n) такие, что

$$C_5 n^{q(\beta)-1-\varepsilon} \leq E(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta \leq C_4 n^{q(\beta)-1+\varepsilon}, \quad (46)$$

где $q(\beta)$ – корень уравнения (35) при заданном β (обратная функция к $\beta(q)$), C_4, C_5 – не зависящие от n константы.

Для доказательства состоятельности покажем, что можно применить теорему 1.

Условия (15) и (16) являются также и условиями доказываемой теоремы.

Условие (17) следует из (46). Неравенство (18) является частным случаем неравенства (36).

Итак, теорема 1 применима.

Следовательно, случайные величины $D_n(q)$ сходятся по вероятности к обобщенным размерностям $D(q)$, определенным в (5), при $n \rightarrow \infty$.

Теорема доказана.

Отметим, что случайная величина $(\rho_{n,i}^{(k)})^\beta n^{-q(\beta)+1}$ имеет ограниченное математическое ожидание и неограниченную дисперсию при $n \rightarrow \infty$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Falconer K. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. New York: John Wiley, 1990.
- [2] Edgar G. A., Mauldin R. D. Multifractal decomposition of digraph recursive fractals // Proc. London Math. Soc. 1992. V. 65. №3. P. 604–628.
- [3] Странные аттракторы. М.: Мир, 1981.
- [4] Динамические системы–2. Современ. пробл. матем. Фундамент. направления. М.: ВИНТИ, 1985.
- [5] Grassberger P. Generalized dimensions of strange attractors // Phys. Lett. A. 1983. V. 97. P. 227–230.
- [6] Grassberger P., Procaccia I., Hentschell H. On the characterization of chaotic motions // Lect. Notes Phys. 1983. V. 179. P. 212–221.
- [7] Майоров В. В., Тимофеев Е. А. Состоятельная оценка размерности многообразий и самоподобных фракталов // ЖВМиМФ. 1999. Т. 39. №10. С. 1721–1729.
- [8] Halsey C., Jensen M. N., Kadanoff L., Procaccia I., Shraiman B. I. Fractal measures and their singularities. The characterization of strange sets // Phys. Rev. A. 1986. V. 33. №2. P. 1141–1151.
- [9] Riedi R. H. An improved multifractal formalism and self-similar measures // J. Math. Anal. Appl. 1995. V. 189. P. 462–490.
- [10] Arbeiter M., Patzschke N. Self-similar random multifractals // Math. Nachr. 1996. V. 181. P. 5–42.
- [11] Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
- [12] Hentschell H., Procaccia I. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors // Phys. D. 1983. V. 8. P. 435–444.
- [13] Pesin Y. B. On rigorous mathematical definitions of correlation dimension and generalized spectrum for dimensions // J. Stat. Phys. 1993. V. 71. №3/4. P. 529–547.
- [14] Levy Vehel J., Vojak R. Multifractal analysis of Choquet capacities: preliminary results // Adv. Appl. Math. 1998. V. 20. №1. P. 1–43.
- [15] Rand D. The singularity spectrum $f(\alpha)$ for cookie-cutters // Ergod. Theory Dynam. Systems. 1989. V. 9. P. 527–541.
- [16] Beardwood J., Halton J. H., Hammersley J. M. The shortest path through many points // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1959. V. 55. P. 299–328.