Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Н. Подоксенов, Нормальная подгруппа транзитивной группы конформных преобразований, имеющая орбиту коразмерности $k > 1$, несущественна, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 2, 317–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3786>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 11:13:17

Нормальная подгруппа транзитивной группы конформных преобразований, имеющая орбиту коразмерности $k > 1$, несущественна

М. Н. Подоксенов

Группа G конформных преобразований риманова или псевдориманова многообразия (M, g) называется *несущественной*, если существует такая метрика $\tilde{g}$ на M , конформно эквивалентная g , что G будет группой изометрий многообразия $(M, \tilde{g})$, и *существенной* в противном случае.

Алексеевский [1] доказал, что риманово многообразие, обладающее связной существенной группой конформных преобразований, конформно эквивалентно сфере или евклидову пространству. Существует много примеров псевдоримановых многообразий с существенной группой конформных преобразований и полная их классификация до сих пор не получена. Лоренцевы многообразия, обладающие однопараметрической группой гомотетий, были описаны Алексеевским [2]. Некоторые частные результаты, описывающие топологическую структуру и метрику рассматриваемых многообразий, были получены автором [3], [4]. В работах [5]–[7] лишь доказывалось, что при определенных предположениях группы конформных преобразований являются либо несущественными, либо являются группами гомотетий данной метрики или конформно эквивалентной ей метрики.

В работе [7] автором было доказано, что нормальная подгруппа транзитивной группы конформных преобразований, обладающая неизотропной орбитой, несущественна. В настоящей работе мы отбросим требование неизотропности орбиты, но при этом необходимо будет установить ограничение на ее размерность. Список работ, в которых исследуются четырехмерные лоренцевы многообразия, допускающие инфинитезимальные группы гомотетий, можно найти в [2]. В настоящей статье будет доказана следующая

ТЕОРЕМА. Пусть (M, g) – риманово или лоренцево многообразие, G – группа Ли конформных преобразований, действующая транзитивно на нем, H – ее нормальная подгруппа. Предположим, что для некоторого $p \in M$ орбита H_p замкнута и имеет коразмерность $k > 1$, а стационарная подгруппа H_p связна. Тогда H – несущественная группа конформных преобразований.

Следующий пример показывает, что в случае $k = 1$ данная теорема для лоренцевых многообразий не имеет места.

Пусть M – двумерное пространство Минковского с координатами (u, v) и метрикой $ds = du dv$. Пусть $\Phi = \{\varphi_t\}$ – однопараметрическая группа преобразований, действующая по формуле

$$\varphi_t(u, v) = (e^{2t}u, v).$$

Пусть $\Psi = \{\psi_t\}$ и $\Theta = \{\theta_t\}$ – группы переносов: $\psi_t(u, v) = (u + t, v)$ и $\theta_t(u, v) = (u, v + t)$. Нетрудно убедиться, что группа Θ коммутирует с Φ и с Ψ . Пусть H – группа преобразований, порожденная группами Φ и Ψ . Тогда H будет группой гомотетий, и причем, существенной. Пусть G – группа преобразований, порожденная группами H и Θ . Тогда G является группой конформных преобразований, и H является нормальной подгруппой в G . При этом все орбиты группы H изотропны и имеют коразмерность 1. Нетрудно построить аналогичный пример и для пространства Минковского большей размерности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Если $\dim H_p = 0$, то каждая орбита группы H состоит только из одной точки и все они должны быть инвариантны относительно действия группы H . Значит, H состоит только из тождественных преобразований и поэтому несущественна.

Пусть теперь $\dim Hp \neq 0$. Если Hp – неизотропное подмногообразие в (M, g) , то данная теорема доказана в [7].

Пусть (M, g) – лоренцево многообразие, $n = \dim M$, а Hp – изотропное подмногообразие в M . Поскольку H является нормальной подгруппой, то любой элемент из G переводит орбиты группы H в орбиты группы H . Поэтому все орбиты Hq , $q \in M$, замкнуты, имеют одинаковую размерность и на всех орбитах индуцируется полуриманово скалярное произведение, а стационарная подгруппа H_q связна для любого $q \in M$.

Пусть $p \in M$ – произвольная точка, $N = Hp$ – ее орбита группы H . Пусть $h \in H_p$ – произвольный элемент, который можно соединить с единицей группы с помощью однопараметрической подгруппы $\Phi = \{\varphi_t\} \subset H_p$, и пусть $h = \varphi_{t_1}$. Тогда согласно [2] преобразование $(\varphi_{t*})_p: T_p M \rightarrow T_p M$ задается одной из следующих матриц в соответствующем базисе $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset T_p M$:

$$A(t) = e^{\mu t} \begin{pmatrix} e^{t\nu} & & \\ & S(t) & \\ & & e^{-t\nu} \end{pmatrix}, \quad B(t) = e^{\mu t} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ t & 1 & 0 & \\ t^2/2 & t & 1 & \\ \hline & & & S_1(t) \end{array} \right),$$

где $S(t) \in O(n-2)$, $S_1(t) \in O(n-3)$. При этом матрицы скалярных произведений данных базисов имеют вид

$$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & E_1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline & & & E_2 \end{pmatrix},$$

где E_1 и E_2 – единичные матрицы порядков $n-2$ и $n-3$ соответственно.

Предположим сначала, что $(\varphi_{t*})_p$ задается матрицей $A(t)$. Мы докажем, что $\mu = 0$, и тем самым покажем, что $(h_*)_p$ изометрично.

Подпространство $T_p N$ является изотропным в $T_p M$, и оно инвариантно относительно $(\varphi_{t*})_p$. Это подпространство содержит единственное изотропное направление I_2 , и это направление тоже должно быть инвариантно относительно действия $(\varphi_{t*})_p$. Значит, $I_2 = Re_1$ или $I_2 = Re_n$. Будем считать, что $I_2 = Re_n$, и пусть $I_1 = Re_1$.

Обозначим $L = (I_1 \oplus I_2)^\perp$ – $(n-2)$ -мерное подпространство в $T_p M$. На нем индуцируется евклидово скалярное произведение. Поскольку $\text{codim } T_p N = k > 1$, то заведомо можно утверждать, что $L \not\subset T_p N$. Пусть $L' = T_p N \cap L$, а L'' – его ортогональное дополнение в L . Тогда оба подпространства L' и L'' инвариантны относительно действия $(\varphi_{t*})_p$, и это преобразование действует на L' и L'' как растягивающее или сжимающее, если $\mu \neq 0$.

Пусть G' – множество всех однопараметрических подгрупп, касательный вектор к которым принадлежит L' , а $\mathcal{L}$ – объединение орбит всех таких подгрупп. В силу гладкости действия группы G на M множество $\mathcal{L}$ будет гладким подмногообразием в M . Используя замкнутость орбиты N , можно доказать, что существует такая окрестность U точки p в $\mathcal{L}$, что в U нет других точек из N . В силу гладкости действия группы G на M найдется такая окрестность U_1 точки p в U , что $T_q(Hq) \cap T_q \mathcal{L} = \{\vec{0}\}$ выполнено для каждого $q \in U_1$.

Введем на U_1 вспомогательную риманову метрику, и пусть ρ – функция расстояния этой метрики. Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что открытый шар $B(p, \varepsilon) \subset U_1$ предкомпактен, и пусть U_2 – его компактное замыкание. В силу замкнутости каждой орбиты группы H и гладкости действия G у каждой точки $q \in U_2$ существует шаровая δ -окрестность, в которой нет других точек орбиты Hq , кроме q . Далее легко доказать, что можно выбрать δ_0 единое для всех $q \in U_2$. Пусть теперь $V = B(p, \delta_0) \in U_2$.

Пусть $q \in V$ – произвольная точка. Тогда существуют однопараметрическая подгруппа $\Psi = \{\psi_\tau\} \in G'$ и число τ_0 такие, что $q = \psi_{\tau_0} p$. Тогда $\psi_{\tau_0}(N) = Hq$. Выберем $n \in \mathbb{Z}$ достаточно большим, чтобы для $t_0 = t_1/n$ выполнялось $\varphi_{t_0} q \in V$ и $\varphi_{-t_0} q \in V$.

Пусть $h_o = \varphi_{t_o}$. Пусть $\theta_\tau = h_o^{-1}\psi_\tau h_o$. Тогда $\Theta = \{\theta_\tau\}$ тоже будет однопараметрической подгруппой и $\Theta \in G'$, поскольку L' инвариантно относительно $(h_{o*})_p$. Имеем $\theta_{\tau_o}p = h_o^{-1}q \in Hq$, и в то же время $\theta_{\tau_o}p \in V$. Но $Hq \cap V = \{q\}$, следовательно, $h_o^{-1}q = q$ и $h_oq = q$. Тогда $hq = (h_o)^n q = q$. Поскольку q была произвольной точкой из V , то h действует на V тождественно и $\mu = 0$. Значит, $(h_*)_p$ изометрично.

Если теперь $h' \in H_p$ – произвольный элемент, который нельзя соединить с единицей с помощью однопараметрической подгруппы, то $h' = h_m \cdot h_{m-1} \cdots h_1$, где каждый из h_i , $i = 1, \dots, m$, можно соединить с единицей. Поэтому $(h'_*)_p$ тоже изометрично для любого $h' \in H_p$.

Подпространство I_2 инвариантно относительно $(\varphi_{t*})_p$. Поэтому, применяя к I_2 дословно такие же рассуждения, как и к L' , мы получим, что $(\varphi_{t*})_p$ действует на I_2 тождественно. Поэтому $\nu = 0$. Значит, $(\varphi_{t*})_p$ действует тождественно на подпространстве $P = L' \oplus I_2 \subset T_p M$. При этом, $P \oplus T_p N = T_p M$.

Пусть $\mathcal{P}$ – объединение орбит всех однопараметрических подгрупп, касательные векторы к которым принадлежат P , а G'' – совокупность всех таких подгрупп. В силу гладкости действия G на M множество $\mathcal{P}$ представляет собой гладкое подмногообразие в M . Так же, как мы построили $V \subset L$, мы можем построить предкомпактную окрестность W точки p в P , обладающую следующими свойствами: для каждой точки $q \in W$ орбита Hq пересекает W только в точке q и при этом подпространства $T_q Hq$ и $T_q W$ трансверсальны в $T_q M$. Тогда множество W представляет собой срез или слайс (терминология Алексеевского [1; с. 284]), т.е. оно обладает следующими свойствами:

- 1) HW содержит окрестность точки p ;
- 2) если для $x, y \in W$ выполнено $ax = y$, $a \in H$, то $a \in H_p$.

Заметим, что W инвариантно относительно действия однопараметрической подгруппы Φ , но оно может быть не инвариантно относительно подгруппы H_p в целом.

Пусть $\widetilde{W} = \bigcup_{q \in W} Hq$ – трубчатая окрестность точки p , содержащая W . Тогда $H\widetilde{W} = \widetilde{W}$. Определим на $\widetilde{W}$ новую метрику $\tilde{g}$ следующим образом. Пусть $q \in W$, а $r \in Hq$. Пусть $a \in H$ – такой элемент, что $r = aq$. Пусть $f_a(q)$ – коэффициент гомотетии преобразования a в точке q . Тогда положим $\tilde{g} = f_a(q)g_r$. Если $b \in H$ – другой элемент такой, что $r = bq$, то $b = ah$, для некоторого $h \in H_q$. В силу того, что всякое преобразование $h \in H_q$ изометрично в точке q , то $f_a(q) = f_b(q)$. Поэтому определение $\tilde{g}_r$ корректно. А гладкость действия H на M приводит к тому, что новая метрика на $\widetilde{W}$ тоже будет гладкой.

Пусть $M' = H \backslash M$ – пространство орбит группы H , и пусть $\pi: M \rightarrow M'$ – естественная проекция. Используя существование среза для любой точки $p \in M$, легко доказать, что M' хаусдорфово, локально компактно и паракомпактно (и нормально); см. [1; с. 285]. Для каждого $p \in M$ построим свой срез W_p . Тогда множества $\widetilde{W}_p = \pi(\widetilde{W}_p)$ образуют покрытие пространства M' , и можно доказать, что каждое из этих множеств предкомпактно. Впишем в это покрытие локально конечное покрытие $\{\widetilde{W}_\alpha\}$ (для удобства обозначений мы используем ту же букву) и построим разложение единицы $\{\omega_\alpha\}$ на M' , подчиненное этому покрытию. Оно естественным образом определяет H -инвариантное разложение единицы $\{\tilde{\omega}_\alpha\}$ на M .

Пусть $\widetilde{W}_i$ и $\widetilde{W}_j$ – две пересекающиеся трубчатые окрестности, а $\widetilde{W}_{ij} = \widetilde{W}_i \cap \widetilde{W}_j$. Пусть $\tilde{g}^i$ и $\tilde{g}^j$ – две метрики, определенные на $\widetilde{W}_i$ и $\widetilde{W}_j$ соответственно согласно описанному выше правилу. Обе эти метрики конформно эквивалентны g , а значит, они эквивалентны друг другу: их компоненты пропорциональны. Поэтому мы можем легко определить метрический тензор $\tilde{g}^{ij}$ на $\widetilde{W}_{ij}$: $\tilde{g}^{ij} = \omega_i \tilde{g}^i + \omega_j \tilde{g}^j$ (без суммирования по i и j). Метрика $\tilde{g}^{ij}$ конформно эквивалентна каждой из рассмотренных выше метрик. Поскольку группа H действует на $\widetilde{W}_{ij}$ изометрично относительно $\tilde{g}^i$ и относительно $\tilde{g}^j$, то она действует изометрично и относительно $\tilde{g}^{ij}$.

Нетрудно доказать по индукции, что метрика $\tilde{g} = \sum_\alpha \omega_\alpha \tilde{g}^\alpha$, определенная на M , конформно эквивалентна g и группа H действует на M изометрично относительно $\tilde{g}$.

Пусть теперь $(\varphi_{t*})_p$ определяется матрицей $B(t)$. Тогда единственным изотропным направлением, инвариантным относительно действия $(\varphi_{t*})_p$, является $I_3 = Re_3$. Поскольку изотропное направление в $T_p N$ должно быть инвариантно, то $e_3 \in T_p N$. Векторы $e_{k+2}, \dots, e_n$ можно выбрать так, чтобы они лежали в $T_p N$, а $e_2, e_4, \dots, e_{k+1}$ – чтобы были ортогональны $T_p N$ (изотропный вектор e_1 хоть и не лежит в $T_p N$, но ему не ортогонален).

Пусть $\Psi = \{\psi_\tau\} \subset G$ – однопараметрическая подгруппа, орбита Ψp которой имеет начальный вектор e_1 . Введем в некоторой окрестности U точки p в M гладкую систему координат так, чтобы $\Psi p \cap U$ задавалась системой уравнений $x_2 = \dots = x_n = 0$ (это возможно в силу [8; лемма 1, с. 22]), а $T_p N$ имела в качестве базиса $\{e_3 = \partial/\partial x^3, e_{k+2} = \partial/\partial x^{k+2}, \dots, e_n = \partial/\partial x^n\}$ (если последнее не выполняется, то можем совершить линейную замену координат). При необходимости можем совершить гладкую замену координат, изменив только x^1 , так, чтобы $\psi_\tau p$ имела координаты $(\tau, 0, \dots, 0)$. Пусть τ достаточно мало и $q = \psi_\tau p$ – близкая к p точка. Тогда в силу гладкости действия группы G на M касательное пространство к $Hq = \psi_\tau(N)$ в точке q будет иметь в качестве базисных векторы, отличающиеся от $\{\partial/\partial x^3, \partial/\partial x^{k+2}, \dots, \partial/\partial x^n\}$ на векторные величины порядка не выше τ . Пусть t также мало. Разложим координатные функции, представляющие отображение φ_t , в ряд Тейлора в окрестности точки p :

$$\varphi_t^i(x) = b_i^i(t)x^i + (1/2)d_{jk}^i(t)x^j x^k + o_i^i((x^1)^2 + \dots + (x^n)^2), \quad i = 1, \dots, n,$$

где $o_i^i(x)$ – бесконечно малые величины по сравнению с x . Тогда применительно к точке q имеем

$$\varphi_t^i(q) = b_1^i(t)\tau + (1/2)d_{11}^i(t)\tau^2 + o_i^i(\tau^2), \quad i = 1, \dots, n.$$

Значит, $\varphi_t(q)$ имеет координаты

$$(e^{\mu t}\tau + O_t^1(\tau^2), e^{\mu t}\tau + O_t^2(\tau^2), (1/2)e^{\mu t}t^2\tau + O_t^2(\tau^2), O_t^4(\tau^2), \dots, O_t^n(\tau^2)),$$

где $O_t^i(\tau^2)$, $i = 1, \dots, n$, – величины порядка не ниже, чем τ^2 . Дифференцируя при $t = 0$, получаем, что касательный вектор к траектории $c(t) = \varphi_t q$ имеет в точке q координаты, отличающиеся от $(\mu\tau, \tau, 0, \dots, 0)$ на величину порядка не ниже, чем τ^2 . Следовательно, при малых τ вектор $\dot{c}'(0)$ не может содержаться в $T_q(Hq)$, а значит, траектория $c(t)$ точки q не может содержаться в Hq . Но $\Phi \subset H_p$, поэтому $c(t) \subset Hq$. Полученное противоречие означает, что $(\varphi_{t*})_p$ не может задаваться матрицей $B(t)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. В. Алексеевский, *Матем. сб.*, **89:2** (1972), 280–296. [2] D. Alekseevski, *Ann. Global Anal. Geom.*, **3:1** (1985), 59–84. [3] М. Н. Подоксенов, *Сиб. матем. журн.*, **30:5** (1989), 135–137. [4] М. Н. Подоксенов, *Сиб. матем. журн.*, **34:2** (1993), 146–153. [5] C. Barbance, *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A*, **291:5** (1980), 347–350. [6] M. N. Podoksenov, *Differential Geometry and Applications*, Proceedings of the 6th international conference (Brno, Czech Republic, August 28–September 1, 1995), 1996, 61–64. [7] М. Н. Подоксенов, *Вестн. Витебского гос. ун-та*, 2001, № 4(22), 75–77. [8] Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер, *Риманова геометрия в целом*, Мир, М., 1971.

М. Н. Подоксенов

Витебский государственный университет, Беларусь

E-mail: geom@vsu.by

Поступило

16.07.2004

Исправленный вариант

22.02.2007