Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Седлецкий, Асимптотика нулей вырожденной гипергеометрической функции, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 2, 262–271

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3787>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 13:54:06

Асимптотика нулей вырожденной гипергеометрической функции

А. М. Седлецкий

Найдена асимптотика нулей вырожденной гипергеометрической функции (функции Куммера) $\Phi(a, c; z)$ и указан способ нумерации всех ее нулей, согласованной с асимптотикой. Это сделано на всем классе параметров a и c таких, что множество нулей бесконечно. В качестве следствия получен класс функций типа синуса с не встречавшейся ранее асимптотикой нулей. Также доказан ряд неасимптотических свойств нулей функции Φ .

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Рассматривается *вырожденная гипергеометрическая функция (функция Куммера)*

$${}_1F_1(a, c; z) = \Phi(a, c; z) := 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a(a+1) \cdots (a+s-1)}{c(c+1) \cdots (c+s-1)} \frac{z^s}{s!}, \quad c \notin -\mathbb{Z}_+ \quad (1)$$

(см., например, [1]–[3]), как функция переменной z при фиксированных значениях параметров $a, c \in \mathbb{C}$. Если $a \in -\mathbb{Z}_+$, то ряд (1) обрывается, т.е. Φ есть многочлен. Поэтому мы примем условие $a \notin -\mathbb{Z}_+$, равносильное тому, что Φ есть целая трансцендентная функция.

Класс целых функций (1) достаточно широк; многие известные специальные функции при соответствующих значениях параметров a и c выражаются через функцию (1) (например, модифицированная функция Бесселя при $c = 2a$, см. [3]) или совпадают с ней (например, $\Phi(1, c; z) = \Gamma(c)E_1(z, c)$, где $E_\rho(z, \mu)$ – функция типа Миттаг-Леффлера, см. [4]).

В настоящей статье решена задача об отыскании асимптотики нулей функции $\Phi(a, c; z)$ и нумерации всех ее нулей, согласованной с асимптотикой. Ответ был известен в некоторых частных случаях, например, в только что упомянутых (см. соответственно [5] и [6], [7]). Однако на всем классе допустимых параметров a и c таких, что множество нулей функции (1) бесконечно, этот вопрос, насколько известно автору, ранее не рассматривался.

В качестве следствия получен класс функций типа синуса с (по-видимому) не встречавшейся ранее асимптотикой нулей.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00326) и программы “Ведущие научные школы” (грант № 4564.2006.1)

Кроме того, доказана теорема о неасимптотических свойствах нулей функции (1), а именно, об их распределении в правой или левой полуплоскости, а также в горизонтальных полосах $(2n-1)\pi < |\operatorname{Im} z| < 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$ (то и другое – для вещественных параметров a и c из вполне определенных множеств).

2. Основной результат. Пусть последовательность $Z = (z_n) \subset \mathbb{C}$ имеет асимптотику

$$z_n = \varphi(n) + o(1), \quad n \rightarrow \pm\infty, \quad (2)$$

где $\varphi(n) \rightarrow \infty$. Скажем, что нумерация последовательности Z согласована с асимптотикой (2) при помощи множества индексов T , если существует биекция $T \leftrightarrow Z$, сохраняющая эту асимптотику.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $a, c \in \mathbb{C}$, $a, c, c-a \notin -\mathbb{Z}_+$. Тогда

- 1) все нули z_n функции $\Phi(a, c; z)$ просты и для них верна асимптотическая формула

$$z_n = 2\pi in + \left((c-2a) \log 2\pi |n| + \log \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c-a)} \pm i \frac{\pi}{2} (c-2) \right) \left(1 + \frac{c-2a}{2\pi in} \right) + \frac{2a(a-c)-c}{2\pi in} + O\left(\frac{\log |n|}{n^2} \right), \quad n \rightarrow \pm\infty; \quad (3)$$

- 2) нумерация всех нулей функции $\Phi(a, c; z)$ согласована с асимптотикой (3) при помощи множества индексов $T = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Так как функция $w = \Phi(a, c; z)$ при всех $z \in \mathbb{C}$ является решением уравнения

$$zw'' + (c-z)w' - aw = 0$$

[3; гл. 7, § 9], то отсутствие кратных нулей у нее доказывается так же, как и для функции Бесселя [3; гл. 7, § 6], т.е. на основании единственности решения задачи Коши. Во избежание повторов детали опускаем.

Для вывода формулы (3) исходим из известной асимптотики (см. [1], [2])

$$\Phi(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} \left(1 - \frac{a(1+a-c)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2} \right) \right) + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} z^{a-c} e^z \left(1 + \frac{(1-a)(c-a)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2} \right) \right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (4)$$

$$-\pi < \arg z \leq \pi, \quad -\pi < \arg(-z) \leq \pi, \quad (5)$$

Для сокращения записи введем обозначения

$$\gamma = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c-a)}, \quad A = 2a(a-c) - c.$$

Если $a, c-a \notin -\mathbb{Z}_+$, то γ имеет смысл и $\gamma \neq 0$. Так как

$$\left(1 - \frac{a(a-c+1)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2} \right) \right) / \left(1 + \frac{(1-a)(c-a)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2} \right) \right) = 1 + \frac{A}{z} + O\left(\frac{1}{z^2} \right),$$

то формула (4) дает следующее уравнение для достаточно больших по модулю нулей z_n функции $\Phi(z) = \Phi(a, c; z)$:

$$z^{a-c}(-z)^a e^z = -\gamma \left(1 + \frac{A}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right). \quad (6)$$

Отсюда следует, что такие нули расположены на множестве

$$\arg z \mp \frac{\pi}{2} = O\left(\frac{\log |z|}{|z|}\right), \quad |z| \geq r_0.$$

Если $0 < \arg z < \pi$ (соответственно $-\pi < \arg z < 0$), то по условию (5) $-\pi < \arg(-z) < 0$ (соответственно $0 < \arg(-z) < \pi$). Поэтому

$$(-z)^a = z^a e^{\mp i\pi a}, \quad \operatorname{Im} z \gtrless 0. \quad (7)$$

Учитывая это и полагая $-1 = e^{\mp i\pi}$ соответственно в случаях $\operatorname{Im} z \gtrless 0$, уравнение (6) записываем в виде

$$e^{z+(2a-c)\log z} = \gamma e^{\mp i\pi(1-a)} \left(1 + \frac{A}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right). \quad (8)$$

Отсюда следует, что при достаточно больших $|n|$

$$z_n + (2a - c) \log z_n = 2\pi i n \mp i\pi(1 - a) + \log \gamma + \frac{A}{z_n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Дважды итерируя эту формулу, получаем (3). Утверждение 1) доказано.

2) Шаг 1. Считая $r_0 > 0$ достаточно большим и обозначив $K(r_0) = (z : |z| > r_0)$, введем множества

$$\begin{aligned} P_+ &= (z : |z^{a-c}(-z)^a e^z| > 2|\gamma|) \cap K(r_0), \\ P_- &= \left(z : |z^{a-c}(-z)^a e^z| < \frac{1}{2}|\gamma| \right) \cap K(r_0), \\ P &= \left(z : \frac{1}{2}|\gamma| \leq |z^{a-c}(-z)^a e^z| \leq 2|\gamma| \right) \cap K(r_0), \end{aligned}$$

являющиеся соответственно правой и левой криволинейными полуплоскостями и объединением двух криволинейных полуполос, расположенных в верхней и нижней полуплоскостях. Ясно, что $\mathbb{C} \setminus (z : |z| \leq r_0) = P_+ \cup P_- \cup P$. Нам нужны удобные оценки $|\Phi(z)|$ на этих множествах. Для их получения перейдем к функции

$$\Phi_1(z) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)} (-z)^a \Phi(a, c; z).$$

Из (4) следует, что

$$\Phi_1(z) = z^{a-c}(-z)^a e^z \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) + \gamma \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (9)$$

На множествах P_+ , P_- оценки $|\Phi_1(z)|$ получаются сразу из (9), неравенства треугольника и определения этих множеств. Действительно, при достаточно большом r_0 из (9) получаем неравенства

$$|\Phi_1(z)| \leq \frac{3}{2} |z^{a-c}(-z)^a e^z| + 2|\gamma|, \quad (10)$$

$$|\Phi_1(z)| \geq \frac{3}{4} |z^{a-c}(-z)^a e^z| - \frac{5}{4} |\gamma|, \quad (11)$$

$$|\Phi_1(z)| \geq -\frac{5}{4} |z^{a-c}(-z)^a e^z| + \frac{3}{4} |\gamma|. \quad (12)$$

Значит, если $z \in P_+$, то из (10), (11) следуют оценки

$$\frac{1}{8} |z^{a-c}(-z)^a e^z| \leq |\Phi_1(z)| \leq \frac{5}{2} |z^{a-c}(-z)^a e^z|, \quad z \in P_+, \quad (13)$$

а если $z \in P_-$, то из (10), (12) следуют оценки

$$\frac{1}{8} |\gamma| \leq |\Phi_1(z)| \leq \frac{11}{4} |\gamma|, \quad z \in P_-. \quad (14)$$

Если $z \in P$, то (10) дает оценку сверху

$$|\Phi_1(z)| \leq 5|\gamma|, \quad z \in P. \quad (15)$$

Однако оценку снизу мы не сможем получить столь же просто, как на множествах P_+ , P_- , – ведь множество P содержит нули функции $\Phi_1(z)$. Поэтому мы прибегнем к отображению

$$w = z + (2a - c) \log z. \quad (16)$$

Из (7) следует, что

$$\operatorname{Re} w = \operatorname{Re}(z + (2a - c) \log z) = \log |z^{a-c}(-z)^a e^z| \mp \pi \operatorname{Im} a$$

соответственно при $\operatorname{Im} z \geq 0$; поэтому образы компонент множества P при достаточно больших $|\operatorname{Im} w|$ будут совпадать с полуполосами

$$\log \frac{1}{2} |\gamma| \mp \pi \operatorname{Im} a \leq \operatorname{Re} w \leq \log 2 |\gamma| \mp \pi \operatorname{Im} a, \quad \operatorname{Im} w \geq 0, \quad |\operatorname{Im} w| > v_0. \quad (17)$$

В силу (9) образ $\psi(w)$ функции $\Phi_1(z)$ при отображении (16) будет иметь вид

$$\psi(w) = e^w e^{\mp i\pi a} (1 + o(1)) + \gamma(1 + o(1)), \quad \operatorname{Im} w \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Im} w \geq 0.$$

Очевидно, что в полуполосах (17), но вне кружков фиксированного радиуса δ с центрами в нулях функции $\psi(w)$ (т.е. в точках $w_n = 2\pi i n + \log \gamma \mp i\pi(1 - a) + o(1)$, $n \rightarrow \pm\infty$) верна оценка

$$|\psi(w)| \geq C(\delta) > 0.$$

Так как δ можно взять сколь угодно малым, то отсюда следует существование последовательности $r_k \uparrow +\infty$ такой, что

$$|\Phi_1(z)| \geq C_0 > 0, \quad z \in P, \quad |z| = r_k. \quad (18)$$

Теперь на основании (13)–(15) и (18) напомним результирующие оценки для функции $\Phi(z)$:

$$|\Phi(z)| \asymp e^x r^{\operatorname{Re}(a-c)}, \quad z = x + iy = re^{i\theta} \in P_+, \quad (19)$$

$$|\Phi(z)| \asymp r^{-\operatorname{Re} a}, \quad z \in P_-, \quad (20)$$

$$|\Phi(z)| \asymp r^{-\operatorname{Re} a}, \quad z \in P, \quad r = r_k \uparrow +\infty. \quad (21)$$

Шаг 2. Из определения множества P_+ следует, что на его границе $x \asymp \log r$ при $\operatorname{Re}(2a - c) \neq 0$ и $x = O(1)$ при $\operatorname{Re}(2a - c) = 0$ (для $r > r_0$), откуда

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = O\left(\frac{\log r}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Значит, $\cos \theta \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$ и $\theta \rightarrow \pm\pi/2$, $r \rightarrow \infty$ соответственно для $\operatorname{Im} z \gtrless 0$. Обозначим через $r \exp(i\theta^\pm)$ точки пересечения границы множества P_+ с окружностью $|z| = r > r_0$, $\theta^\pm \gtrless 0$. Тогда для $\theta = \theta^\pm$ верно соотношение (22) и, применяя формулы приведения $\cos \theta^\pm = \sin(\pi/2 \mp \theta^\pm)$, получаем, что

$$\theta^\pm = \pm \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{\log r}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Шаг 3. Завершающий шаг доказательства основан на формуле Йенсена

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |\Phi(re^{i\theta})| d\theta, \quad (24)$$

где $n(t)$ – число нулей функции $\Phi(z) = \Phi(a, c; z)$ в круге $|z| < t$. Запишем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log |\Phi(re^{i\theta})| d\theta = \int_{\theta^-}^{\theta^+} + \int_{\theta^+}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\theta^-} =: J_1 + J_2 + J_3. \quad (25)$$

С помощью оценки (19) и соотношений (23) имеем

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{\theta^-}^{\theta^+} (r \cos \theta + \operatorname{Re}(a - c) \log r) d\theta + O(1) \\ &= r(\sin \theta^+ - \sin \theta^-) + (\theta^+ - \theta^-) \operatorname{Re}(a - c) \log r + O(1) \\ &= 2r + \pi \operatorname{Re}(a - c) \log r + O(1), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Для оценки J_2, J_3 применяем оценки (20), (21) и формулу (23). Получаем

$$\begin{aligned} J_2 + J_3 &= \left(\int_{\theta^+}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\theta^-} \right) (-\operatorname{Re} a \log r + O(1)) d\theta \\ &= \left(\pi + O\left(\frac{\log r}{r}\right) \right) (-\operatorname{Re} a \log r + O(1)) = -\pi \operatorname{Re} a \log r + O(1), \end{aligned}$$

где $r = r_k$ – последовательность из оценки (21). Подставляя найденные оценки для J_k в формулу (25), а затем полученное – в (24), приходим к следующей асимптотике:

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t} dt = \frac{r}{\pi} - \frac{\operatorname{Re} c}{2} \log r + O(1), \quad r = r_k \rightarrow +\infty. \quad (26)$$

С другой стороны, левую часть в (26) мы оценим с помощью формулы (3). В силу (3) найдется целое m такое, что если Z – последовательность всех нулей функции $\Phi(z)$, то

$$Z = Z_+ \cup Z_-, \quad Z_+ = (z_n^+)_{n=m}^{+\infty}, \quad Z_- = (z_n^-)_{n=-1}^{-\infty}, \quad Z_+ \cap Z_- = \emptyset, \quad (27)$$

и соотношение (3) будет верно для $z_n^\pm$ при $n \rightarrow \pm\infty$. Таким образом, нумерация (27) согласована с асимптотикой (3), и нам остается доказать, что $m = 1$.

Из (3) следует, что

$$\begin{aligned} |z_n| &= ((\operatorname{Im} z_n)^2 + (\operatorname{Re} z_n)^2)^{1/2} \\ &= |\operatorname{Im} z_n| \left(1 + O\left(\left(\frac{\operatorname{Re} z_n}{\operatorname{Im} z_n} \right)^2 \right) \right) = |\operatorname{Im} z_n| + o(1), \quad n \rightarrow \pm\infty. \end{aligned}$$

Учитывая это и снова пользуясь формулой (3), получаем

$$\begin{aligned} |z_n^\pm| &= 2\pi|n| \pm \operatorname{Im}(c - 2a) \log |n| + \pi \left(\frac{\operatorname{Re} c}{2} - 1 \right) \\ &\quad \pm (\operatorname{Im}(c - 2a) \log 2\pi + \arg \gamma) + o(1), \quad n \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \quad (28)$$

Воспользуемся следующей леммой [7]: если положительная последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n=m}^{+\infty}$ имеет вид

$$\lambda_n = a_1 n + a_2 \log n + a_3 + o(1), \quad a_1 > 0, \quad a_2, a_3 \in \mathbb{R}, \quad n \rightarrow +\infty,$$

а $\Lambda(t)$ – число точек λ_n на $(0, t)$, то при $r \rightarrow \infty$

$$\int_0^r \frac{\Lambda(t)}{t} dt = \frac{r}{a_1} - \frac{a_2}{2a_1} \log^2 r + \left(\frac{1}{2} - m - \frac{a_3}{a_1} + \frac{a_2}{a_1} \log a_1 \right) \log r + o(\log r). \quad (29)$$

Применим эту лемму к последовательностям $|Z_+| = (|z_n^+|)_{n=m}^{+\infty}$ и $|Z_-| = (|z_n^-|)_{n=1}^{-\infty}$ с содержащимися в (28) параметрами

$$a_1 = 2\pi, \quad a_2 = \pm \operatorname{Im}(c - 2a), \quad a_3 = \pi \left(\frac{\operatorname{Re} c}{2} - 1 \right) \pm (\operatorname{Im}(c - 2a) \log 2\pi + \arg \gamma). \quad (30)$$

То есть соотношение (29) запишем сначала для $\Lambda = |Z_+|$, а затем – для $\Lambda = |Z_-|$, причем в последнем случае мы должны положить $m = 1$ в связи с нумерацией (27). После чего сложим почленно полученные соотношения. В правой части взаимно уничтожатся те члены, которые отвечают слагаемым в (30) с разными знаками, и мы получим

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t} dt = \frac{r}{\pi} + \left(1 - m - \frac{\operatorname{Re} c}{2} \right) \log r + o(\log r), \quad r \rightarrow \infty.$$

Сопоставляя это с формулой (26), видим, что $m = 1$. Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Выбор значения $\log \gamma$ ($\gamma = \Gamma(a)/\Gamma(c - a)$) в формуле (3) не важен.

Действительно, замена одного значения $\log \gamma$ другим повлечет лишь перенумерацию последовательности нулей при помощи того же множества индексов, после которой асимптотика (3) сохранится.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условия теоремы 1 на a и c задают все множество параметров, при которых функция (1) имеет бесконечно много нулей.

Действительно, по формуле Куммера (см. [3])

$$e^{-z} \Phi(a, c; z) = \Phi(c - a, c, -z) \quad (31)$$

и, если $a - c \in \mathbb{Z}_+$, то правая часть есть многочлен, что следует из определения (1).

3. Функции типа синуса и их обобщения. Обозначим через S_α , $\alpha \in \mathbb{R}$, класс целых функций экспоненциального типа, для которых выполняется оценка

$$|F(z)| \asymp |z|^{-\alpha} e^{\pi |\operatorname{Im} z|}, \quad |\operatorname{Im} z| \geq h = h(F) > 0. \quad (32)$$

Класс S_0 состоит из так называемых *функций типа синуса*, введенных в анализ Левиным [8]. Классы S_α и в особенности класс S_0 играют важную роль в негармоническом анализе (см. [9]).

Функция

$$F(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} d\sigma(t), \quad \operatorname{var} \sigma(t) < +\infty, \quad (33)$$

тогда и только тогда является функцией типа синуса, когда $\sigma(t)$ имеет скачки в обеих точках $\pm\pi$ [9]; в этом случае нули z_n функции $F(z)$ удовлетворяют условию

$$z_n = n + O(1), \quad n \rightarrow \pm\infty. \quad (34)$$

В ряде работ строились функции типа синуса, не являющиеся преобразованием Фурье–Стилтьеса, т.е. не представимые в виде (33) (об этом см. [9]); во всех случаях нули построенной функции также удовлетворяли условию (34).

Известно [9], что целая функция вида

$$F(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} \frac{k(t) dt}{(\pi^2 - t^2)^{1-a}}, \quad 0 < \operatorname{Re} a < 1, \quad \operatorname{var} k(t) < +\infty, \quad k(\pm\pi \mp 0) \neq 0, \quad (35)$$

принадлежит классу $S_{\operatorname{Re} a}$ и ее нули также имеют вид (34).

Оказывается, что при определенных условиях на a и c функция

$$F(z) = e^{-i\pi z} \Phi(a, c; 2\pi iz) \quad (36)$$

принадлежит классу $S_{\operatorname{Re} a}$ и обладает рядом дополнительных свойств. Верна

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a, c \in \mathbb{C}$ и $a, c, c - a \notin -\mathbb{Z}_+$, причем

$$\operatorname{Re} c = 2 \operatorname{Re} a. \quad (37)$$

Тогда

- 1) функция (36) принадлежит классу $S_{\operatorname{Re} a}$;
- 2) для нулей z_n функции (36) верна асимптотика

$$z_n = n + \left(\frac{\operatorname{Im}(c - 2a)}{2\pi} \log 2\pi |n| - \frac{i}{2\pi} \log \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c - a)} \pm \frac{c - 2}{4} \right) \left(1 + \frac{\operatorname{Im}(c - 2a)}{2\pi n} \right) - \frac{2a(c - a) - c}{4\pi^2 n} + O\left(\frac{\log |n|}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \pm\infty; \quad (38)$$

- 3) нумерация всех нулей функции (36) согласована с асимптотикой (38) при помощи множества индексов $T = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
- 4) если, кроме того,

$$c \neq 2a, \quad (39)$$

то функция (36) при $\operatorname{Re} a = 0$ не является преобразованием Фурье–Стилтьеса, а при $0 < \operatorname{Re} a < 1$ не может быть представлена в виде (35).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (4), во-первых, следует, что функция (36) имеет экспоненциальный тип. Во-вторых, эта формула вместе с условием (37) показывает, что верны оценки

$$|\Phi(z)| \asymp |z|^{-\operatorname{Re} a}, \quad \operatorname{Re} z \leq -h; \quad |\Phi(z)| \asymp |z|^{-\operatorname{Re} a} e^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Re} z \geq h > 0,$$

если h достаточно велико. Значит, для функции (36) выполняется оценка (32) с $\alpha = \operatorname{Re} a$, т.е. функция (36) принадлежит классу $S_{\operatorname{Re} a}$, и утверждение 1) доказано.

Утверждения 2) и 3) сразу следуют из теоремы 1, где в левой части формулы (3) теперь надо положить $2\pi i z_n$.

Наконец, если выполнено условие (39), то формула (38), по которой $z_n - n \sim C \log |n|$, $n \rightarrow \pm\infty$, $C \neq 0$, несовместима с необходимым условием (34) представимости функции $F(z)$ в виде (33) при $\operatorname{Re} a = 0$ и в виде (35) при $0 < \operatorname{Re} a < 1$. Утверждение 4) также верно. Теорема 2 доказана.

Теорема 2 дает (по-видимому, первые) примеры функций типа синуса с асимптотикой нулей, не укладывающейся в рамки формулы (34).

4. Неасимптотические свойства нулей.

ТЕОРЕМА 3. 1) Пусть $1 \leq a < c \leq a + 1$, причем $c \neq 2$, если $a = 1$. Тогда все нули функции (1) лежат в полуплоскости

$$\operatorname{Re} z < -(\sqrt{a-1} + \sqrt{1-(c-a)})^2. \quad (40)$$

2) Пусть $0 < a \leq 1$, $c \geq 1 + a$, причем $c \neq 2$, если $a = 1$. Тогда все нули функции (1) лежат в полуплоскости

$$\operatorname{Re} z > (\sqrt{c-a-1} + \sqrt{1-a})^2.$$

3) Пусть $0 < a \leq 1$, $a < c \leq 1 + a$, причем $c \neq 2$, если $a = 1$. Тогда все нули функции (1) лежат в горизонтальных полосах

$$(2n-1)\pi < |\operatorname{Im} z| < 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Верна формула

$$\Phi(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt, \quad \operatorname{Re} a, \operatorname{Re}(c-a) > 0 \quad (42)$$

(см. [1]–[3]), что дает возможность применить теоремы Поля [10] и автора [11] о нулях преобразования Лапласа

$$F(z) = \int_0^1 e^{zt} f(t) dt, \quad f \in L^1(0, 1). \quad (43)$$

Пусть функция $f(t) \not\equiv 0$ положительна и дифференцируема в $(0, 1)$ и

$$\frac{f'(t)}{f(t)} \geq -h, \quad 0 < t < 1.$$

Тогда по теореме Поля [10] все нули функции (43) лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z < h$. Значит, в виду формулы (42), нам надо найти минимум функции $f'(t)/f(t)$ на $(0, 1)$, где

$$f(t) = t^\alpha (1-t)^\beta, \quad \alpha = a-1 > -1, \quad \beta = c-a-1 > -1. \quad (44)$$

Мы исключили случай $\alpha = \beta = 0$, когда в силу (42) все нули функции $\Phi(z)$ попадают на границу полуплоскости (40). Имеем

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\alpha - (\alpha + \beta)t}{t(1-t)}. \quad (45)$$

Для ограниченности снизу функции (45) на $(0, 1)$ необходима неотрицательность числителя при $t = 0, 1$, что накладывает условие $\beta \leq 0 \leq \alpha$. Итак (см. (44)), мы рассматриваем значения

$$-1 < \beta \leq 0 \leq \alpha. \quad (46)$$

Если $\alpha + \beta = 0$ (т.е. $c = 2$), то $\alpha > 0$ и минимум функции (45) на $(0, 1)$ равен $4\alpha = 4(a - 1)$. По теореме Поля все нули функции $\Phi(z)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 4(1 - a)$, что совпадает с (40) при $c = 2$. Если $\alpha = 0$ (т.е. $a = 1$), $\beta < 0$, то минимум функции (45) на $[0, 1)$ равен $-\beta$. По теореме Поля все нули функции $\Phi(z)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z < \beta$, что при $a = 1$ совпадает с (40). Пусть $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha > 0$. Тогда

$$\left(\frac{f'(t)}{f(t)} \right)' = -\frac{\alpha}{t^2} - \frac{\beta}{(1-t)^2}. \quad (47)$$

Средняя часть этой формулы обращается в нуль в точках

$$t_1 = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{-\beta}}, \quad t_1 = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{-\beta}}.$$

Ясно, что $t_1 \in (0, 1]$, $t_2 \geq 1$ и что минимум функции (45) на $(0, 1]$ достигается в точке t_1 . Подставляя это значение в правую часть (45), получаем

$$\frac{f'(t)}{f(t)} \geq (\sqrt{\alpha} + \sqrt{-\beta})^2, \quad 0 < t < 1.$$

Отсюда и из теоремы Поля следует утверждение 1). При этом надо учесть, что условие (46) переходит в условие $1 \leq a < c \leq a + 1$.

Утверждение 2) вытекает из утверждения 1) и из формулы (31).

Для доказательства утверждения 3) воспользуемся следующим результатом [11]: если функция $f(t) \neq C$ положительна и логарифмически выпукла в $(0, 1)$, то все нули функции (43) лежат в полосах (41). Для этого нам остается выяснить множество параметров $\alpha, \beta > -1$, при которых функция (44) логарифмически выпукла в $(0, 1)$, т.е. функция $\log f(t)$ выпукла в $(0, 1)$. Так как $(\log f(t))''$ есть правая часть формулы (47), то функция $\log f(t)$ выпукла в $(0, 1)$ для тех и только тех значений $\alpha, \beta > -1$, для которых

$$\alpha(1-t)^2 + \beta t^2 \leq 0 \quad (48)$$

при $t \in (0, 1)$, а по непрерывности – и при $t \in [0, 1]$. Подставляя сюда значения $t = 0, 1$, получаем необходимое условие $\alpha, \beta \leq 0$. Ясно, что оно и достаточно для выполнения (48). Остается вспомнить связь (44) между парами параметров α, β и a, b . Утверждение 3) доказано. Теорема 3 верна.

В связи с теоремой 3 отметим статьи Цветкова [12], [13] о нулях функции Уиттера

$$M_{k,m}(z) = e^{-z/2} z^{m+1/2} \Phi\left(\frac{1}{2} + m - k, 1 + 2m; z\right). \quad (49)$$

На основании формулы (49) мы сейчас переформулируем некоторые из результатов [12], [13] для функции $\Phi(a, c; z)$.

Если $0 < c < 2a$ (соответственно $c > \max(0, 2a)$), то у функции (1) нет комплексных нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq c - 2a$ (соответственно $\operatorname{Re} z \leq c - 2a$) [12].

Если $1 < c < 2a$ (соответственно $c > \max(1, 2a)$), то функция (1) имеет комплексные нули только в полуплоскости $\operatorname{Re} z < c - 2a$ (соответственно $\operatorname{Re} z > c - 2a$) [13].

Как видим, результат из [12] охватывает более широкое множество параметров a и c по сравнению с теоремой 3. Зато теорема 3 более точно указывает полуплоскость нулей. Действительно, если $1 < a < c < a + 1$, то

$$-(\sqrt{a-1} + \sqrt{1-(c-a)})^2 < c - 2a,$$

поэтому полуплоскость (40) из теоремы 3 является собственным подмножеством полуплоскости $\operatorname{Re} z < c - 2a$, фигурирующей в [12], [13].

Автор благодарит М. К. Керимова и А. А. Муромского за предоставленную возможность пользоваться редким изданием [1].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Дж. Слейтер, *Вырожденные гипергеометрические функции*, ВЦ АН СССР, М., 1966.
- [2] Э. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш, *Специальные функции: Формулы, графики, таблицы*, Наука, М., 1977.
- [3] Ф. Олвер, *Введение в асимптотические методы и специальные функции*, Наука, М., 1978.
- [4] М. М. Джрбашян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, Наука, М., 1966.
- [5] Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, т. 1, ИЛ, М., 1949.
- [6] А. М. Седлецкий, “Асимптотические формулы для нулей функции типа Миттаг-Леффлера”, *Anal. Math.*, **20**:2 (1994), 117–132.
- [7] А. М. Седлецкий, “О нулях функции типа Миттаг-Леффлера”, *Матем. заметки*, **68**:5 (2000), 710–724.
- [8] Б. Я. Левин, “Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа”, *Математическая физика и функциональный анализ*, вып. 1, ФТИНТ АН УССР, 1969, 136–146.
- [9] А. М. Седлецкий, *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации*, Физматлит, М., 2005.
- [10] G. Polya, “Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen”, *Math. Z.*, **2**:3–4 (1918), 352–383.
- [11] А. М. Седлецкий, “О нулях преобразований Лапласа”, *Матем. заметки*, **76**:6 (2004), 883–892.
- [12] Г. Е. Цветков, “О корнях функций Whittaker’a”, *Докл. АН СССР*, **32**:1 (1941), 10–12.
- [13] Г. Е. Цветков, “О комплексных корнях функции Whittaker’a”, *Докл. АН СССР*, **33**:4 (1941), 290–291.

А. М. Седлецкий

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: sedlet@mail.ru

Поступило
15.11.2005