Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Матвейчук, J -Алгебры Неймана в пространстве с двумя симметриями, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 2, 232–241

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3788>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:53:53

J-Алгебры Неймана в пространстве с двумя симметриями

М. С. Матвейчук

Показано, что *J*-алгебра Неймана $\mathcal{A}$ типа (В) не содержит *J*-положительных (*J*-отрицательных) операторов. Охарактеризованы *J*-проекторы из $\mathcal{A}$. Описан класс самосопряженных и одновременно *J*-самосопряженных плюс-операторов.

Библиография: 3 названия.

Хорошо развита теория операторов в пространстве с индефинитной метрикой (= *J*-метрикой) [1]. Плодотворным представляется распространение этой теории на *J*-алгебры Неймана. Наиболее близки к изученному в [1] случаю *J*-алгебры Неймана, содержащие симметрию *J*, порождающую индефинитную метрику (= *WJ*-алгебры Неймана). В *WJ*-алгебрах найдены и изучены новые классы плюс-операторов, которые не могут быть введены методами [1] в рамках только алгебры $B(H)$. Отметим, что *J*-алгебры Неймана подразделяются на типы (А) и (В) [2], а *WJ*-алгебры являются частным случаем *J*-алгебр Неймана типа (А).

В данной работе с помощью абелевой алгебры Неймана $\mathcal{N}$ вводятся $J_{\mathcal{N}}$ -неотрицательные векторы и изучаются некоторые особенности операторов в *J*-алгебрах типа (В), связанные с положительностью. Мы убеждаемся, что в *J*-алгебрах типа (В) *J*-самосопряженные операторы (см. предложение 7 и следствие 8) и некоторые классы плюс-операторов (см. теорема 12) имеют специфическое строение.

Пусть H – комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Пусть P^+ ($0 < P^+ < I$) – ортопроектор в H и $P^- := I - P^+$. Определим каноническую симметрию $J := P^+ - P^-$ и зафиксируем индефинитную метрику $[x, y] := (Jx, y)$, $x, y \in H$. Вектор $x \in H$ называется *положительным* (соответственно *отрицательным*, *нейтральным*) (терминология из [1]), если $[x, x] > 0$ (соответственно $[x, x] < 0$, $[x, x] = 0$). Через $A^\#$ обозначим оператор, *J*-сопряженный к $A \in B(H)$, т.е.

$$[Ax, y] = [x, A^\#y] \quad \forall x, y \in H.$$

Очевидно $A^\# = JA^*J$. Обозначим через $B(H)_J$ (соответственно $\mathcal{P}_J$) множество всех *J*-самосопряженных операторов (соответственно проекторов, = идемпотентов) из $B(H)$. Пусть p, q – проекторы. Мы пишем $p \leq q$, если $pq = qp = p$. Для любого подмножества $M \subseteq B(H)$ обозначим через

$$M' := \{B \in B(H) : AB = BA, A^*B = BA^* \quad \forall A \in M\}.$$

Работа выполнена при поддержке Министерства образования России (грант Е00-1.0-172).

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра Неймана в H , т.е. $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$. Обозначим через $\mathcal{A}^h$ (соответственно $\mathcal{A}^{\text{pr}}$) множество всех самосопряженных операторов (ортогональных проекторов) из $\mathcal{A}$, а через $\mathcal{A}^c$ – центр $\mathcal{A}$, т.е. $\mathcal{A}^c := \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$. Алгебра Неймана $\mathcal{A}$ называется J -алгеброй Неймана, если $A \in \mathcal{A}$ влечет $A^\# \in \mathcal{A}$ для любого $A \in \mathcal{A}$.

1. Плюс-векторы относительно абелевой алгебры Неймана. Пусть $\mathcal{N}$ – абелева алгебра Неймана в H . Будем считать, что $\mathcal{N} \subset \{J\}'$. Определим *носитель* вектора $x \in H$ как наименьший проектор $Q_x \in \mathcal{N}$, для которого $x = Q_x x$.

По существу, следующая лемма есть не что иное, как известное утверждение о разложении заряда на проекторах абелевой алгебры Неймана.

ЛЕММА 1. *Если $x \in H$, $x \neq 0$, то существуют наибольшие (некоторые, возможно, нулевые) проекторы Q_x^+ , Q_x^- , Q_x^0 из $\mathcal{N}$ такие, что $Q_x = Q_x^+ + Q_x^- + Q_x^0$ и*

$$\begin{aligned} [qx, x] &> 0 & \forall q \in \mathcal{N}^{\text{pr}}, \quad q \neq 0, \quad q \leq Q_x^+, & \text{если } Q_x^+ \neq 0; \\ [qx, x] &< 0 & \forall q \in \mathcal{N}^{\text{pr}}, \quad q \neq 0, \quad q \leq Q_x^-, & \text{если } Q_x^- \neq 0; \\ [qx, x] &= 0 & \forall q \in \mathcal{N}^{\text{pr}}, \quad q \neq 0, \quad q \leq Q_x^0, & \text{если } Q_x^0 \neq 0. \end{aligned}$$

Вектор $x \in H$, $x \neq 0$, назовем $J_{\mathcal{N}}$ -положительным (соответственно $J_{\mathcal{N}}$ -отрицательным, $J_{\mathcal{N}}$ -нейтральным), если $Q_x^+ = Q_x$ ($Q_x^- = Q_x$, $Q_x^0 = Q_x$ соответственно). Ниже через β^+ (соответственно β^- , β^0) обозначим множество всех $J_{\mathcal{N}}$ -положительных (соответственно $J_{\mathcal{N}}$ -отрицательных, $J_{\mathcal{N}}$ -нейтральных) векторов. Очевидно $P^+H \subset \beta^+$, $P^-H \subset \beta^-$ и $J\beta^\pm = \beta^\pm$, $J\beta^0 = \beta^0$.

Отметим, что

- 1) всякий $J_{\mathcal{N}}$ -положительный вектор x является и положительным, но обратное не верно;
- 2) если $\mathcal{N} = \{\lambda I\}_{\lambda \in C}$, то $J_{\mathcal{N}}$ -положительность векторов совпадает с положительностью из [1].

2. Гильбертово пространство с двумя симметриями. Далее будем считать, что пространство H и симметрия J таковы, что существуют ортопроекторы P , Q , для которых $P + Q = I$, $P^\# = Q$. Отметим очевидную связь между симметриями J и $J_1 := P - Q$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Имеет место соотношение $J_1 J = -J J_1$ (из которого, в частности, следует $-J_1 = J_1^\#$).*

Любой вектор x из $PH \cup QH$ (из $P^+H \cup P^-H$) является нейтральным (соответственно J_1 -нейтральным, т.е. $[x, x]_1 = 0$, где $[\cdot, \cdot]_1 := (J_1 \cdot, \cdot)$). Оператор JP (соответственно $J_1 P^+$) – частичная изометрия с начальным проектором P (соответственно P^+) и конечным Q (соответственно P^-). При этом $J = JP + PJ$ (соответственно $J_1 = J_1 P^+ + P^+ J_1$). Поменяв местами в следующих утверждениях симметрии J и J_1 , получим ряд новых утверждений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Отображение $A \rightarrow J_1 A J_1$ (и его сужение на $\mathcal{P}_J$) есть автоморфизм $B(H)_J$ (соответственно $\mathcal{P}_J$), переводящий J -положительные (соответственно J -отрицательные) в J -отрицательные (соответственно J -положительные) операторы (соответственно проекторы). В частности, $J_1 P^+ J_1 = P^-$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \in B(H)_J$. Тогда

$$J(J_1 A J_1)^* J = J_1 J A^* J J_1 = J_1 A J_1.$$

Следовательно, $J_1 A J_1 \in B(H)_J$. Пусть A J -положителен, т.е. $JA \geq 0$. Тогда

$$J(J_1 A J_1) = -J_1(JA)J_1 \leq 0.$$

Следовательно, $J_1 A J_1$ является J -отрицательным. Очевидно, если p – проектор, то $J_1 p J_1$ – проектор. Из предложения 2 следует, что

$$J_1 P^+ J_1 = \frac{1}{2} J_1 (I + J) J_1 = \frac{1}{2} (I + J_1 J J_1) = \frac{1}{2} (I - J) = P^-.$$

Говорят [2], что J -алгебра Неймана $\mathcal{A}$ имеет $\min(B)$, если $P, Q \in \mathcal{A}^c$ и $Q = J P J$. Ясно, что J осуществляет пространственный изоморфизм подалгебр $P \mathcal{A} P$ и $Q \mathcal{A} Q$. Пусть

$$\mathcal{A}_J := B(H)_J \cap \mathcal{A} \quad \text{и} \quad \mathcal{P}_J^{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \cap \mathcal{P}_J.$$

Заметим, центр $\mathcal{A}^c$ не коммутирует с проектором P^+ и, следовательно, не является подмножеством алгебры $\{J\}'$. Отметим также, что из $C_p \in P \mathcal{A}^c P$ следует

$$C := C_p + J C_p J \in \mathcal{A}^c.$$

Очевидно

$$\mathcal{Z} := \{C = C_p + J C_p J : C_p \in P \mathcal{A}^c P\}$$

является абелевой алгеброй Неймана и $\mathcal{Z} \subset \{J\}'$. Ниже будем считать, что абелева алгебра $\mathcal{Z}$ определяет по правилам п. 1 положительность (отрицательность, нейтральность) векторов из H .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\mathcal{A}$ – J -алгебра Неймана типа (B). Тогда

$$\mathcal{A}_J = \{A \in \mathcal{A} : A = P A P + J(P A P)^* J\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = A^\# \in \mathcal{A}$. Тогда

$$A = A P + A Q = P A P + (J P J) A (J P J) = P A P + J(P A P)^* J.$$

Обратно, пусть $A = P A P + J(P A P)^* J$. Тогда

$$A^\# = J A^* J = J((P A P)^* + J(P A P) J) J = J(P A P)^* J + P A P = A.$$

СЛЕДСТВИЕ 5. В алгебрах $P \mathcal{A} P, Q \mathcal{A} Q$ нет ненулевых J -самосопряженных операторов.

Согласно предложению 4, если r – проектор и $r \leq P$, то $R := r + Jr^*J$ есть J -самосопряженный проектор ($=J$ -проектор). Ниже для простоты для любого $A \in \mathcal{A}_J$ оператор PAP будем обозначать через A_p . Пусть $A = A_p + JA_p^*J \in \mathcal{A}_J$. Непосредственно вычисляем

$$\begin{aligned} P^+AP^+ &= \frac{1}{4}(I+J)(A_p + JA_p^*J)(I+J) \\ &= \frac{1}{4}[(A_p + A_p^*) + J(A_p + A_p^*)J + (A_p + A_p^*)J + J(A_p + A_p^*)] = P^+A^*P^+, \\ P^-AP^+ &= \frac{1}{4}(I-J)(A_p + JA_p^*J)(I+J) \\ &= \frac{1}{4}[(A_p - A_p^*) - J(A_p - A_p^*)J + (A_p - A_p^*)J - J(A_p - A_p^*)] = -(P^+AP^-)^*, \\ P^-AP^- &= \frac{1}{4}[(A_p + A_p^*) + J(A_p + A_p^*)J - (A_p + A_p^*)J - J(A_p + A_p^*)] = P^-A^*P^-. \end{aligned} \quad (1)$$

При построении меры на проекторах алгебр Неймана важную роль играют формулы, описывающие проекторы. Докажем одну из таких формул для алгебр типа (B).

Пусть r – ограниченный проектор в H . Обозначим через $r_{\text{ор}}$ ортогональный проектор на подпространство $rH \cap r^*H$. По предложению 4 [3] $r_{\text{ор}}$ – наибольший ортогональный проектор со свойством $r_{\text{ор}} \leq r$. Проектор r назовем *чисто косым*, если $r_{\text{ор}} = 0$. Отметим, для любого неортогонального r проектор $r - r_{\text{ор}}$ чисто косой.

Пусть r – чисто косой проектор. Обозначим через r_m ортогональный проектор на подпространство rH . Тогда

$$r = (r_m + r_m^\perp)r(r_m + r_m^\perp) = r_m + r_m r r_m^\perp,$$

где $p^\perp := I - p$. Пусть $r_m r r_m^\perp = v|r_m r r_m^\perp|$ – полярное представление оператора $r_m r r_m^\perp$, здесь $|B| := (B^*B)^{1/2}$. Поскольку r – чисто косой проектор, то $vH = r_m H$. Отметим, что $v^*|r_m^\perp r^* r_m|$ – полярное представление оператора $r_m^\perp r^* r_m$ и $|r_m^\perp r^* r_m| = v|r_m r r_m^\perp|v^*$. Непосредственно убеждаемся, что $|r - r^*| = |r_m r r_m^\perp| + |r_m^\perp r^* r_m|$ и

$$(v - v^*)|r - r^*| = v|r_m r r_m^\perp| - v^*|r_m^\perp r^* r_m| = r_m r r_m^\perp - r_m^\perp r^* r_m = r - r^*. \quad (2)$$

Положим $r'_m := v^* r_m v$. Из определения следует, что $r'_m r_m = 0$ и

$$(v - v^*)(r_m + r'_m)(v - v^*)^* = r'_m + r_m.$$

Непосредственно вычисляем, что

$$(v - v^*)[2(r_m + r'_m) - (r + r^*)](v - v^*)^* = r + r^*. \quad (3)$$

Положим $x := r + r^*$ и отметим, что

$$x^2 - 2x = (r - r^*)^*(r - r^*) = |r - r^*|^2 \geq 0. \quad (4)$$

Для любых ограниченных операторов A_i , $i = 1, \dots, 4$, таких, что $PA_iP = A_i$ для всех i , отождествим оператор $A_1 + A_2J + JA_3 + JA_4J$ с матрицей

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$P^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} P & P \\ P & P \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$X := \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\mathcal{A}$ – J -алгебра Неймана типа (В), $R = r + Jr^*J$, где $r \leq P$ – чисто косой проектор из $\mathcal{A}$, и пусть $P^-RP^+ = U|P^-RP^+|$ – полярное представление оператора P^-RP^+ . Тогда $JUJ = -U$ и

$$R = X + U(X^2 - X)^{1/2} - (X^2 - X)^{1/2}U^* + U(I - X)U^*. \quad (5)$$

Обратно, если $x, w \in P\mathcal{A}P$, где x – самосопряженный оператор такой, что $x^2 - 2x \geq 0$, и w – частичная изометрия с начальным подпространством $\overline{xH}$, то формула (5) определяет J -проектор. Здесь

$$U := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w & w \\ -w & -w \end{pmatrix}.$$

Если, кроме того, x, w связаны равенствами

$$x = w(2P - x)w^*, \quad w(x^2 - 2x)^{1/2} = -(x^2 - 2x)^{1/2}w^*, \quad (6)$$

то R – J -проектор из $\mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО можно провести по схеме доказательства похожей теоремы из [3]. Специфика же J -алгебр Неймана типа (В) позволяет дать прямое доказательство. Учитывая (4) и (1), где A заменен на R , получаем

$$(X^2 - X)^{1/2} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} |r - r^*| & |r - r^*| \\ |r - r^*| & |r - r^*| \end{pmatrix} = |P^-RP^+|.$$

Учитывая (2), имеем

$$\begin{aligned} U &= UP^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (v - v^*) & 0 \\ 0 & -(v - v^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & P \\ P & P \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v - v^* & v - v^* \\ -(v - v^*) & -(v - v^*) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Получаем $U(X^2 - X)^{1/2} = P^-RP^+$. В силу (1)

$$-(X^2 - X)^{1/2}U^* = P^+RP^-.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 U(I - X)U^* &= U(P^+ - X)U^* \\
 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (v - v^*) & 0 \\ 0 & -(v - v^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2P - x & 2P - x \\ 2P - x & 2P - x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^* - v & 0 \\ 0 & -(v^* - v) \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=} P^- R P^-.
 \end{aligned}$$

Наконец, учитывая, что $P^+ R P^+ = X$ (см. (1)), и суммируя доказанные выше равенства, получаем (5). Равенство $JUJ = -U$ проверяется просто.

Обратно, если $x, w \in P\mathcal{A}P$, где x – самосопряженный оператор с условием $x^2 - 2x \geq 0$ и w – частичная изометрия с начальным подпространством $x\bar{H}$, то непосредственно проверяется, что оператор R , определенный формулой (5), есть J -проектор, т.е. $R^2 = R$, $R = JR^*J$.

Пусть теперь соотношения (6) выполнены. Матричный элемент оператора R , стоящий в первой строке и втором столбце, равен

$$\frac{1}{4} (x + w(x^2 - 2x)^{1/2} + (x^2 - 2x)^{1/2}w^* - w(2P - x)w^*) = 0,$$

а матричный элемент, стоящий в первой строке и первом столбце, равен

$$\frac{1}{4} (x + w(x^2 - 2x)^{1/2} - (x^2 - 2x)^{1/2}w^* + w(2P - x)w^*) = \frac{1}{2} (x + w(x^2 - 2x)^{1/2}).$$

Это означает, что

$$R = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^* \end{pmatrix}, \quad \text{где } r := \frac{1}{2} (x + w(x^2 - 2x)^{1/2}),$$

– проектор из $P\mathcal{A}P$, т.е. R есть J -проектор из $\mathcal{A}$.

В том, что

$$\frac{1}{2} (x + w(x^2 - 2x)^{1/2})$$

– проектор, можно убедиться и непосредственно. Используя (6), получаем

$$\begin{aligned}
 &\left[\frac{1}{2} (x + w(x^2 - 2x)^{1/2}) \right]^2 \\
 &= \frac{1}{4} [x^2 + xw(x^2 - 2x)^{1/2} + w(x^2 - 2x)^{1/2}x + w(x^2 - 2x)^{1/2}w(x^2 - 2x)^{1/2}] \\
 &= \frac{1}{4} [x^2 + w(2P - x)(x^2 - 2x)^{1/2} + wx(x^2 - 2x)^{1/2} - (x^2 - 2x)] \\
 &= \frac{1}{2} (x + w(x^2 - 2x)^{1/2}).
 \end{aligned}$$

Если $r_{\text{ор}} \neq 0$, то, как не сложно убедиться, теорема 6 не справедлива.

3. О J -положительных операторах из J -алгебр типа (В). Пусть $A_p = w|A_p|$ – полярное представление A_p , где $A \in \mathcal{A}_J$, и пусть $|A_p| = \int \lambda d e_\lambda$ – спектральное разложение $|A_p|$. В силу предложения 4

$$\begin{aligned} JA &= Jw|A_p| + |A_p|w^*J = \int \lambda d(Jwe_\lambda + e_\lambda w^*J) \\ &= \frac{1}{2} \int \lambda d[(e_\lambda + Jwe_\lambda + e_\lambda w^*J + Jwe_\lambda w^*J) - (e_\lambda - Jwe_\lambda - e_\lambda w^*J + Jwe_\lambda w^*J)]. \end{aligned}$$

Здесь $e_\lambda \pm Jwe_\lambda \pm e_\lambda w^*J + Jwe_\lambda w^*J$ – взаимно ортогональные ортопроекторы. Таким образом,

$$\frac{1}{2} \int \lambda d(e_\lambda + Jwe_\lambda + e_\lambda w^*J + Jwe_\lambda w^*J)$$

есть положительная $(= (JA)_+)$, а

$$\frac{1}{2} \int \lambda d(e_\lambda - Jwe_\lambda - e_\lambda w^*J + Jwe_\lambda w^*J)$$

– отрицательная $(= (JA)_-)$ части самосопряженного оператора JA . Непосредственно вычисляем, что

$$J_1(e_\lambda + Jwe_\lambda + e_\lambda w^*J + Jwe_\lambda w^*J)J_1 = (e_\lambda - Jwe_\lambda - e_\lambda w^*J + Jwe_\lambda w^*J).$$

Отсюда

$$J_1(JA)_+J_1 = (JA)_-. \quad (7)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} A &= J(JA) = J((JA)_+ - (JA)_-) = J(JA)_+ - J(J_1(JA)_+J_1) \\ &= J(JA)_+ + J_1JJ_1(J_1(JA)_+J_1) = J(JA)_+ + J_1(J(JA)_+)J_1. \end{aligned}$$

Итак, имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $A \in \mathcal{A}_J$. Тогда

$$A = J(JA)_+ + J_1(J(JA)_+)J_1.$$

Последнее предложение позволяет получить полезную формулу. Пусть $J(JA)_+ = \int \lambda dE_\lambda$ – спектральное представление J -положительного оператора $J(JA)_+$ (см. [1]). Тогда

$$A = \int \lambda d(E_\lambda + J_1E_\lambda J_1).$$

СЛЕДСТВИЕ 8. J -алгебра Неймана типа (В) не содержит J -положительных и J -отрицательных операторов.

Известно, что любой J -проектор p можно представить (не единственным образом!) в виде $p = p_+ + p_-$, где p_+ (соответственно p_-) J -положителен (соответственно J -отрицателен). Но среди таких представлений есть единственное, для которого подпространства p_+H и p_-H взаимно ортогональны. Покажем, как формула (7) позволяет отыскать такое представление для $R \in \mathcal{P}_J^{\mathcal{A}}$.

Пусть $R = r + Jr^*J$, где $r \leq P$ — чисто косой проектор, и пусть R представлен формулой (5). Обозначим через F_{X_+} (соответственно F_{X_-}) носитель положительной ($= X_+$) (соответственно отрицательной X_-) части оператора X . Введем операторы

$$R_{\pm}^0 := X_{\pm} + U(X_{\pm}^2 - X_{\pm})^{1/2} - (X_{\pm}^2 - X_{\pm})^{1/2}U^* - U(X_{\pm} - F_{X_{\pm}})U^*.$$

Прямо проверяем, что $R_{\pm}^0$ — J -проекторы и $R = R_+^0 + R_-^0$. Имеем

$$\begin{aligned} JR_{\pm}^0 &= \pm X_{\pm} + JU(X_{\pm}^2 - X_{\pm})^{1/2} - J(X_{\pm}^2 - X_{\pm})^{1/2}U^* + UJ(X_{\pm} - F_{X_{\pm}})U^* \\ &= \pm X_{\pm} - (\pm U(X_{\pm}^2 - X_{\pm})^{1/2}) - (\pm(X_{\pm}^2 - X_{\pm})^{1/2})U^* \pm U(X_{\pm} - F_{X_{\pm}})U^*. \end{aligned}$$

Снова непосредственно проверяется, что

$$JR_+^0 \geq 0, \quad -(JR_-^0) \geq 0.$$

Это означает, что R_+^0 (соответственно R_-^0) J -положителен (соответственно J -отрицателен). Поскольку операторы JR_+^0 , JR_-^0 самосопряжены и $(JR_+^0)(JR_-^0) = 0$ (последнее эквивалентно равенству $(R_+^0J)(R_-^0J) = 0$), то подпространства R_+^0H и R_-^0H взаимно ортогональны. Таким образом, мы установили, что $JR_+^0 = (JR)_+$, $JR_-^0 = -(JR)_-$, и в силу (7) имеем $R_-^0 = J_1R_+^0J_1$. Это значит, что

$$R = R_+^0 + R_-^0 = R_+^0 + J_1R_+^0J_1.$$

4. Плюс-операторы в J -алгебрах типа (В). При доказательстве некоторых теорем используются самосопряженные и одновременно J -самосопряженные плюс-операторы (см., например, [1; доказательство теорем 4.24, 4.27, глава 2]). Такие операторы в нашем случае полностью описываются теоремой 12.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Оператор $A \in \mathcal{A}$ назовем:

- $J\mathcal{J}$ -плюс-оператором, если $A\beta^+ \subseteq \beta^+$;
- сплетающим, если $A\beta^{\pm} \subseteq \beta^{\mp}$ (т.е. $A\beta^+ \subseteq \beta^-$ и $A\beta^- \subseteq \beta^+$);
- устойчивым, если $A\beta^{\pm} \subseteq \beta^{\pm}$.

Отметим, если $A \in \{J\}'$, то

$$[Ax, Ax] = (JAx, Ax) = (AJx, Ax) = (Jx, A^*Ax) = (Jx, |A|^2x) = [|A|x, |A|x]. \quad (8)$$

Здесь $|A|$ из полярного представления $A = U|A|$. Если $A \in \mathcal{A}^h$ и, кроме того, $A^2 \in \mathcal{Z}$, то в силу (8) A — $J\mathcal{J}$ -плюс-оператор. Таким образом, получаем

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть $\mathcal{A}$ — J -алгебра Неймана типа (В), и пусть $A \in \mathcal{A}_J \cap \mathcal{A}^h$ и $A^2 \in \mathcal{Z}$. Тогда A — устойчивый оператор.

Нам понадобится

ЛЕММА 11. Пусть $v \in P\mathcal{A}P$ – частичная изометрия, и пусть вектор $x_+ \in P^+H$ принадлежит начальной области оператора $V := v + JvJ$. Тогда

$$x := x_+ + J_1Vx_+ \in \beta^0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $JV = VJ$, то $P^+V = VP^+$. Следовательно, $Vx_+ \in P^+H$ и $J_1Vx_+ \in P^-H$. Отсюда

$$\begin{aligned} [x, x] &= (Jx_+ + JJ_1Vx_+, x_+ + J_1Vx_+) = (x_+ - J_1Vx_+, x_+ + J_1Vx_+) \\ &= (x_+, x_+) - (J_1Vx_+, J_1Vx_+) = (x_+, x_+) - (Vx_+, Vx_+) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Для любого $(0 \neq) q \in \mathcal{Z}^{\text{pr}}$, $q \leq Q_x$, имеем

$$qx = qx_+ + qJ_1Vx_+ = qx_+ + J_1Vqx_+$$

и $\mathcal{Z} \subset \{J\}'$ в силу включения $qx_+ \in P^+H$. По (9) $0 = [qx, qx] = [qx, x]$. Таким образом, $x \in \beta^0$.

ТЕОРЕМА 12. Пусть $\mathcal{A}$ – J -алгебра Неймана типа (B), и пусть $A_p \in P\mathcal{A}^hP$. Следующие условия эквивалентны:

- i) $A_p^2 \in P\mathcal{Z}P$;
- ii) оператор $A = A_p + JA_pJ$ устойчивый;
- iii) A – $J\mathcal{Z}$ -плюс-оператор;
- iv) оператор $B := iA_p + J(iA_p)^*J$ сплетающий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A_p^2 \in P\mathcal{Z}P$. Тогда $A^2 \in \mathcal{Z}$ и по следствию 10 оператор A устойчивый. Любой устойчивый оператор, очевидно, является и $J\mathcal{Z}$ -плюс-оператором. Таким образом доказаны импликации i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii).

Покажем теперь, что iii) влечет i). Предположим противное: условие iii) выполнено, но i) не выполнено, т.е. $A_p^2 \notin P\mathcal{Z}P$. Убедимся, что найдется вектор $x \in \beta^0$, $x \neq 0$, для которого $[Ax, x] < 0$. Это будет противоречить тому, что A – $J\mathcal{Z}$ -плюс-оператор. Пусть $A_p^2 = \int_0^\infty \lambda d e_\lambda$ – спектральное представление оператора A_p^2 . Здесь e_λ – непрерывное слева разложение единицы. Поскольку $A_p^2 \notin P\mathcal{Z}P$, то найдется число $\mu > 0$ такое, что $e_\mu, e_\mu^\perp \notin P\mathcal{Z}P$. Следовательно, существует ненулевая частичная изометрия $v \in P\mathcal{A}P$ с начальной областью в $e_\mu H$ и конечной в $e_\mu^\perp H$. Пусть вектор x из леммы 11. По определению начальная область оператора $V = v + JvJ$ лежит в подпространстве $(e_\mu P + J e_\mu P J)H$, а конечная – в $(e_\mu^\perp + J e_\mu^\perp J)H$. Отсюда вытекает, что векторы x_+ и AJ_1Vx_+ взаимно ортогональны. Взаимно ортогональны и векторы J_1Vx_+ и Ax_+ . Учитывая это, получаем

$$\begin{aligned} [Ax, Ax] &= (JAx, Ax) = (AJx, Ax) = (Jx, A^2x) = (Jx, A^2(x_+ + J_1Vx_+)) \\ &= \left(x_+ - J_1Vx_+, \int_0^\mu \lambda d(e_\lambda + J e_\lambda J)x_+ + \int_\mu^\infty \lambda d(e_\lambda + J e_\lambda J)J_1Vx_+ \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(x_+, \int_0^\mu \lambda d(e_\lambda + J e_\lambda J) x_+ \right) - \left(J_1 V x_+, J_1 \int_\mu \lambda d(e_\lambda + J e_\lambda J) V x_+ \right) \\ & < (x_+, \mu x_+) - \left(V x_+, \int_\mu \lambda d(e_\lambda + J e_\lambda J) V x_+ \right) \\ & < (x_+, \mu x_+) - (V x_+, \mu V x_+) = \mu(\|x_+\|^2 - \|V x_+\|^2) = 0. \end{aligned}$$

Итак, мы убедились, что $[Ax, Ax] < 0$. Следовательно, A не является $J\mathcal{H}$ -плюс-оператором. Получаем противоречие с iii). Таким образом, iii) $\Rightarrow$ i).

Докажем эквивалентность утверждений ii) и iv). В силу включения $B \in \mathcal{A}_J$ (т.е. $JB = B^*J$) и равенства $B^2 = -A^2$ имеем

$$[Bx, Bx] = (JBx, Bx) = (B^*Jx, Bx) = (Jx, B^2x) = -(Jx, A^2x) = -[Ax, Ax].$$

Здесь мы учли, что $A = A^*$ и $JAJ = A$. Таким образом, если A устойчивый, то B сплетающий. И обратно, если B сплетающий, то A устойчивый.

Следовательно, если $P\mathcal{A}P = P(B(H))P$, то A – самосопряженный и одновременно J -самосопряженный $J\mathcal{H}$ -плюс-оператор, тогда и только тогда, когда

$$A = a(P - 2r + Q - 2JrJ) = a(I - 2(r + JrJ)),$$

где $r \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$, $r \leq P$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой*, Наука, М., 1986.
- [2] М. М. Мельцер, “О классификации J -алгебр Неймана”, *Функц. анализ и его прил.*, **13:4** (1979), 83–84.
- [3] M. S. Matvejchuk, “Probability measure in W^*J -algebras in Hilbert spaces with conjugation”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126:4** (1998), 1155–1164.

М. С. Матвейчук

Казанский государственный университет

E-mail: Marjan.Matvejchuk@ksu.ru

Поступило

20.02.2003