Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. У. Ажгалиев, О дискретизации решений уравнения теплопроводности, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 2, 177–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3789>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 11:22:04

О дискретизации решений уравнения теплопроводности

Ш. Ажгалиев

Найдены точные порядки погрешностей дискретизации (восстановления) по линейной информации решений уравнения теплопроводности.

Библиография: 7 названий.

1. Постановка задачи и основные результаты. Сформулируем общую задачу восстановления (в редакции из [1]). Пусть даны нормированные пространства X и Y комплекснозначных функций, определенных на множествах Ω и Ω_1 соответственно. Пусть $F \subset X$ и $Tf = u(y; f)$ есть отображение F в Y .

Для каждого целого $N \geq 1$ через $\{(l^{(N)}; \varphi_N)\}$ обозначим множество всевозможных пар $(l^{(N)}; \varphi_N)$, где $l^{(N)} = (l_1, \dots, l_N)$ есть набор функционалов $l_j(\cdot): F \rightarrow \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, N$, функция $\varphi_N \equiv \varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; y)$ действует из $\mathbb{C}^N \times \Omega_1$ в $\mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ – как обычно, поле комплексных чисел. Пусть $D_N \subset \{(l^{(N)}; \varphi_N)\}$. Положим

$$\delta_N(D_N; T, F)_Y = \inf_{(l^{(N)}; \varphi_N) \in D_N} \sup_{f \in F} \|u(\cdot; f) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); \cdot)\|_Y. \quad (1)$$

Задача заключается в получении оценок сверху и оценок снизу для величины (1) (желательно совпадающих с точностью до констант) и в указании пары $(l^{(N)}; \varphi_N)$, реализующей оценку сверху.

Конкретизируя в (1) пространства X и Y , классы F , операторы T и множества D_N , получаем различные постановки задач (см., например, [1]–[6]).

В случае, когда Tf есть решение какого-либо уравнения в частных производных, вместо термина “восстановление” будем использовать термин “дискретизация” (по этому поводу см. [2]).

Решения уравнений в частных производных, даже в случае их явного выражения посредством рядов Фурье по собственным функциям соответствующего дифференциального оператора или свертков с соответствующими ядрами, будучи представленными рядами или интегралами, фактически опять же представляют собой бесконечные объекты. Поэтому снова возникает задача их приближения конечными объектами, математическая формулировка которой содержится в (1).

Здесь изучается следующая конкретизация задачи (1): $\Omega = [0, 1]^s$, $\Omega_1 = [0, \infty) \times [0, 1]^s$, $Y = L^\infty[0, \infty) \times L^q(0, 1)^s$, $1 \leq q \leq \infty$, $Tf = u(t, x; f)$ есть решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}$$

с начальным условием $u(0, x) = f(x)$, F суть классы Никольского–Бесова $B_{2,\theta}^r(0, 1)^s$ (определение см. в [7]) и классы Соболева $SW_2^r(0, 1)^s$ с доминирующей смешанной производной (определение см., например, в [4]), а множество $D_N = L^N \times \{\varphi_N\}$, где L есть множество всех линейных функционалов на линейной оболочке F .

Хуа Ло Кеном и Вань Юанем в [5] получены оценки сверху при дискретизации (восстановлении) решений уравнения теплопроводности с начальными температурами из классов $F = E_s^r$ [3] по их значениям в конечном числе точек, т.е. в случае $D_N = P^N \times \{\varphi_N\}$; здесь P есть множество всех функционалов – значений в точках. Было показано, что если $r > 1$, то $(\epsilon > 0$ любое)

$$\delta_N(P^N \times \{\varphi_N\}, T, E_s^r)_{L^\infty[0,\infty) \times L^2(0,1)^s} \ll N^{-(r-1/2)2r/(4r+1)+\epsilon},$$

$$\delta_N(P^N \times \{\varphi_N\}, T, E_s^r)_{L^\infty[0,\infty) \times L^\infty(0,1)^s} \ll N^{-(r-1)r/(2r+1)+\epsilon}.$$

Затем Шерниязовым в [6] эти результаты были улучшены почти в “квадрат раз” и доведены до окончательного (в степенной шкале):

$$\frac{1}{N^{r-1/2}} \ll \delta_N(P^N \times \{\varphi_N\}, T, E_s^r)_{L^\infty[0,\infty) \times L^2(0,1)^s} \ll \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1/2}},$$

$$\frac{1}{N^{r-1}} \ll \delta_N(P^N \times \{\varphi_N\}, T, E_s^r)_{L^\infty[0,\infty) \times L^\infty(0,1)^s} \ll \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1}}.$$

Там же были получены точные в степенной шкале оценки для классов $B_{2,\theta}^r(0, 1)^s$ и $SW_2^r(0, 1)^s$. А именно было показано (при $r > s/2$ и $r > 1/2$ соответственно), что

$$\frac{1}{N^{r/s-1/2}} \ll \delta_N(P^N \times \{\varphi_N\}, T, B_{2,\theta}^r(0, 1)^s)_{L^\infty[0,\infty) \times L^\infty(0,1)^s} \ll \frac{\ln^{(r/s+1/2)(s-1)} N}{N^{r/s-1/2}},$$

$$\frac{1}{N^{r-1/2}} \ll \delta_N(P^N \times \{\varphi_N\}, T, SW_2^r(0, 1)^s)_{L^\infty[0,\infty) \times L^\infty(0,1)^s} \ll \frac{\ln^{(r+1/2)(s-1)} N}{N^{r-1/2}}.$$

Нами доказаны следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть даны целое положительное число s , $2 \leq q \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ и $r > s/2$. Тогда имеет место соотношение

$$\delta_N(L^N \times \{\varphi_N\}, T, B_{2,\theta}^r(0, 1)^s)_{L^\infty[0,\infty) \times L^q(0,1)^s} \asymp N^{-(r/s-(1/2-1/q))}, \quad N = 1, 2, \dots$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть дано целое положительное число s и действительное число $r > 1/2$. Тогда имеют место соотношения

$$\text{а) } \delta_N(L^N \times \{\varphi_N\}, T, SW_2^r(0, 1)^s)_{L^\infty[0,\infty) \times L^\infty(0,1)^s} \asymp (\ln^{r(s-1)} N)/N^{r-1/2},$$

$$\text{б) } \delta_N(L^N \times \{\varphi_N\}, T, SW_2^r(0, 1)^s)_{L^\infty[0,\infty) \times L^2(0,1)^s} \asymp (\ln^{r(s-1)} N)/N^r,$$

где $N = 2, 3, \dots$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Верхние оценки во всех теоремах достигаются на функционалах – тригонометрических коэффициентах Фурье (для каждого класса свой спектр коэффициентов).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что результат а) теоремы 2 позволяет обобщить и улучшить полученную в [6] Шерниязовым оценку снизу при дискретизации решений уравнения теплопроводности с начальными температурами из классов $SW_2^r(0, 1)^s$ по их значениям в конечном числе точек.

2. Вспомогательные утверждения. Введем обозначения и приведем несколько утверждений, которыми мы будем пользоваться. Для 1-периодической по каждой из своих s переменных и суммируемой на кубе $[0, 1]^s$ функции $f(x)$, как обычно, через $\hat{f}(m)$, $m \in Z^s$, будем обозначать ее тригонометрические коэффициенты Фурье–Лебега.

Для целого положительного ρ положим $I_\rho = [-\rho, \rho]^s \cap Z^s$ и

$$\Gamma_\rho = \left\{ m = (m_1, \dots, m_s) \in Z^s : \prod_{j=1}^s \max\{1; |m_j|\} \leq 2^\rho \right\}.$$

Для конечного множества B через $|B|$ условимся обозначать число его элементов.

ЛЕММА А. Пусть дано целое число $s \geq 1$. Тогда для каждого целого $N \geq 1$ выполнено следующее утверждение: для любого множества

$$G \equiv \{m^{(1)}, \dots, m^{(N')}\} \subset Z^s$$

такого, что $N' = |G| \geq 2N$ и $|G| \asymp N$, и для произвольных линейных функционалов $l_1, \dots, l_N$, определенных, по крайней мере, на множестве всех тригонометрических многочленов со спектром в G , найдутся комплексные числа $\{c_k\}_{k=1}^{N'}$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=1}^{N'} c_k > N, \quad \sum_{k=1}^{N'} |c_k|^2 = N;$$

причем если $\chi(x) = \sum_{k=1}^{N'} c_k e^{2\pi i(m^{(k)}, x)}$, то $l_1(\chi) = \dots = l_N(\chi) = 0$ и

$$\|\chi\|_{L^\infty} \geq N, \quad (2)$$

$$\|\chi\|_{L^2} = N^{1/2}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Задача нахождения искомых чисел эквивалентна решению системы N линейных однородных уравнений с $N' \geq 2N$ неизвестными:

$$\sum_{k=1}^{N'} c_k l_k(e^{2\pi i(m, x)}) = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Известно, что в этом случае существует, по крайней мере, N линейно независимых решений этой системы

$$\{c_k^{(1)}\}_{k=1}^{N'}, \quad \dots, \quad \{c_k^{(N)}\}_{k=1}^{N'}.$$

Далее, применяя метод ортогонализации Шмидта к линейно независимым функциям

$$\sum_{k=1}^{N'} c_k^{(j)} e^{2\pi i(m^{(k)}, x)}, \quad j = 1, \dots, N,$$

получим некоторую ортонормированную систему $\{\phi_k\}_{k=1}^N$. Искомые числа $\{c_k\}_{k=1}^{N'}$ суть коэффициенты многочлена

$$\chi(x) = \sum_{k=1}^N \overline{\phi_k(\xi)} \phi_k(x) = \sum_{k=1}^{N'} c_k e^{2\pi i(m^{(k)}, x)},$$

где $\xi \in [0, 1]^s$ такое, что

$$N = \int_{[0,1]^s} \sum_{k=1}^{N'} |\phi_k(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{N'} |\phi_k(\xi)|^2,$$

а $\bar{z}$ есть комплексно-сопряженное число к $z \in \mathbb{C}$.

ЛЕММА В [5]. Пусть дано целое положительное число s . Для всякой 1-периодической по каждой переменной функции $f(x) = f(x_1, \dots, x_s)$ с абсолютно сходящимся тригонометрическим рядом Фурье решение $u(t, x; f)$ задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^s,$$

с начальным условием

$$u(0, x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^s,$$

представимо в виде

$$u(t, x; f) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) e^{-4\pi^2(m, m)t} e^{2\pi i(m, x)}.$$

3. Доказательства основных результатов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Поскольку верны вложения [7; с. 230]

$$B_{2,1}^r(0, 1)^s \subset B_{2,\theta}^r(0, 1)^s \subset B_{2,\infty}^r(0, 1)^s \equiv H_2^r(0, 1)^s,$$

то достаточно оценку сверху доказать для класса $H_2^r(0, 1)^s$, а оценку снизу – для класса $B_{2,1}^r(0, 1)^s$.

Оценка сверху. Пусть дано целое число $N \geq 1$. Без ограничения общности можно считать, что $N = |I_{2^n}| \asymp 2^{sn}$. Определим линейные функционалы

$$l_1(f) = \hat{f}(m^{(1)}), \quad \dots, \quad l_N(f) = \hat{f}(m^{(N)}),$$

где $\{m^{(1)}, \dots, m^{(N)}\}$ есть некоторое упорядочение множества I_{2^n} . Определим функцию

$$\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; t, x) = \sum_{k=1}^N \hat{f}(m^{(k)}) e^{-4\pi^2(m^{(k)}, m^{(k)})t} e^{2\pi i(m^{(k)}, x)}.$$

Пусть $f \in H_2^r(0, 1)^s$. Тогда для каждого $t \geq 0$

$$\|u(t, x; f) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); t, x)\|_{L^q} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left\| \sum_{m \in I_{k+1} \setminus I_k} f(m) e^{-4\pi^2(m, m)t} e^{2\pi i(m, x)} \right\|_{L^q}.$$

Применяя к каждому слагаемому неравенство разных метрик [7; с. 133] и используя эквивалентное определение класса H_2^r ([7; с. 204, см. также замечание на с. 212]), продолжаем

$$\|u(t, x; f) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); t, x)\|_{L^q} \ll \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k(r-s(1/2-1/q))}.$$

Отсюда получаем требуемую оценку сверху.

Оценка снизу. Пусть дано целое число $N \geq 1$, даны N линейных функционалов $l_1, \dots, l_N$ и функция $\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; t, x)$. Определим целое число $n = n(s, N) \geq 1$ из условий $|I_n| \geq 2N$ и $|I_n| \asymp N$.

Пусть функция $\chi(x)$ определена как в лемме A при $G = I_n$ и данных функционалах $l_1, \dots, l_N$.

Легко проверить, что найдется такое число $c = c(s, p, r)$, что функция

$$f(x) = f_{l_1, \dots, l_N}(x) = cN^{-r/s-1/2} \chi(x) \in B_{2,1}^r(0, 1)^s.$$

Так как $u(0, x) = f(x)$ и $l_1(f) = \dots = l_N(f) = 0$, то для получения оценки снизу достаточно оценить снизу $\|f\|_{L^q}$. Для этого применим неравенство разных метрик к $f(x)$, воспользуемся определением функции $f(x)$ и свойством (2) функции $\chi(x)$:

$$\|f\|_{L^q} \gg (n^s)^{-1/q} \|f\|_{L^\infty} = n^{-s/q} cN^{-r/s-1/2} \|\chi\|_{L^\infty} \gg N^{-r/s+1/2-1/q}.$$

В силу произвольности $l_1, \dots, l_N$ и φ_N , получим требуемую оценку снизу.

Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Оценка сверху. Пусть дано целое число $N \geq 1$. Без ограничения общности можно считать, что $N = |\Gamma_n| \asymp 2^n n^{s-1}$. Определим линейные функционалы

$$l_1(f) = \widehat{f}(m^{(1)}), \quad \dots, \quad l_N(f) = \widehat{f}(m^{(N)}),$$

где $\{m^{(1)}, \dots, m^{(N)}\}$ есть некоторое упорядочение множества Γ_n . Определим функцию

$$\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; t, x) = \sum_{k=1}^N \tau_k e^{-4\pi^2(m^{(k)}, m^{(k)})t} e^{2\pi i(m^{(k)}, x)}.$$

Пусть $f \in SW_2^r(0, 1)^s$.

а) Применив неравенство Гёльдера, получим требуемую оценку сверху:

$$\begin{aligned} & \|u(t, x; f) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); t, x)\|_{L^\infty \times L^\infty} \\ & \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^s \setminus \Gamma_n} |\widehat{f}(m)| \ll \frac{n^{(s-1)/2}}{2^{n(r-1/2)}} \ll \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1/2}}. \end{aligned}$$

б) В силу равенства Парсеваля имеем

$$\begin{aligned} & \|u(t, x; f) - \varphi_N(l_1(f), \dots, l_N(f); t, x)\|_{L^\infty \times L^2} \\ & \leq \sqrt{\sum_{m \in \mathbb{Z}^s \setminus \Gamma_n} |\widehat{f}(m)|^2} \ll \frac{1}{2^{nr}} \ll \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^r}. \end{aligned}$$

Оценка снизу. Пусть дано целое число $N \geq 1$, даны N линейных функционалов $l_1, \dots, l_N$ и функция $\varphi_N(\tau_1, \dots, \tau_N; t, x)$. Определим целое число $n = n(s, N) \geq 1$ из условий $|\Gamma_n| \geq 2N$ и $|\Gamma_n| \asymp N$.

Пусть функция $\chi(x)$ определена как в лемме A при $G = \Gamma_n$ и данных функционалах $l_1, \dots, l_N$.

Легко проверить, что при некотором $c = c(s, r) > 0$ функция

$$f(x) = \frac{c}{2^{nr} \|\chi\|_{L^2}} \chi(x) \in SW_2^r(0, 1)^s.$$

Так как $u(0, x) = f(x)$ и $l_1(f) = \dots = l_N(f) = 0$, то для получения оценки снизу достаточно оценить снизу $\|f\|_{L^2}$ и $\|f\|_{L^\infty}$.

Далее, используя (2) и (3), имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty} &= \frac{c}{2^{nr} \|\chi\|_{L^2}} \|\chi\|_{L^\infty} \gg \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^{r-1/2}}, \\ \|f\|_{L^2} &= \frac{c}{2^{nr}} \gg \frac{\ln^{r(s-1)} N}{N^r}. \end{aligned}$$

В силу произвольности $l_1, \dots, l_N$ и φ_N получим требуемые оценки снизу.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Темиргалиев, “Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразование рядов Фурье”, *Вестн. Евразийского ун-та*, 1997, № 3, 90–144.
- [2] Н. Темиргалиев, “Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразование рядов Фурье (Продолжение 1)”, *Вестн. Евразийского ун-та*, 2002, № 3–4, 222–272.
- [3] Н. М. Коробов, *Теоретико-числовые методы в приближенном анализе*, Физматгиз, М., 1963.
- [4] С. А. Смоляк, “Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций”, *Докл. АН СССР*, **148**:5 (1963), 1042–1045.
- [5] Loo Keng Hua, Yang Wang, *Application of Number Theory to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1981.
- [6] К. Е. Шерниязов, *Приближенное восстановление функций и решений уравнения теплопроводности с функциями распределения начальных температур из классов E , SW и B* , Дис. ... канд. физ.-матем. наук, КазГУ им. аль-Фараби, Алматы, 1998.
- [7] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1977.

Ш. Ажгалиев

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева,
г. Астана, Республика Казахстан
E-mail: ntmath@mail.ru

Поступило

14.05.2003