Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Х. Мусин, Сюръективность линейного дифференциального оператора в весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 5, 713–724

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm379>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 16:22:12

УДК 517.5

СЮРЪЕКТИВНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

И. Х. Мусин

Приводится достаточное условие сюръективности линейного дифференциального оператора бесконечного порядка с постоянными коэффициентами в весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций на вещественной прямой.

Библиография: 18 названий.

1. Введение. Обозначим через V класс неотрицательных выпуклых возрастающих функций v на $[0, \infty)$, $v(0) = 0$, удовлетворяющих условиям:

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{v(x+1) - v(x)}{x} = 0$;
- 2) $\exists A_v, B_v \in \mathbb{R}: \forall x \geq 1 \quad v(x) \geq x \ln x + A_v x + B_v$.

Зафиксируем $\alpha > 1$. Пусть $\psi: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ – выпуклая функция, удовлетворяющая условиям:

- 1) существует постоянная $A_\psi > 0$ такая, что для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$|\psi(x_1) - \psi(x_2)| \leq A_\psi (1 + |x_1| + |x_2|)^{\alpha-1} |x_1 - x_2|; \quad (1)$$

- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{|x|} = +\infty$.

Пусть $\varphi(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} (xy - \psi(y))$, $x \in \mathbb{R}$, – преобразование Юнга функции ψ . Положим $\theta_m(x) = \exp(\varphi(x) - m \ln(1 + |x|))$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$. Пусть всюду далее $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ – строго убывающая к нулю последовательность положительных чисел, а σ – положительное число. Как обычно, $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций на вещественной прямой, $H(\mathbb{C})$ – пространство целых функций.

Пусть $v \in V$. Для $m \in \mathbb{N}$ введем нормированные пространства

$$G_m = \left\{ f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) : p_m(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|f^{(k)}(x)|}{(\sigma + \varepsilon_m)^k \exp(v(k)) \theta_m(x)} < \infty \right\}.$$

Через G обозначим проективный предел пространств G_m относительно вложений $i_{mn}: G_m \rightarrow G_n$, $m > n$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00655.

Напомним, что пространство, представимое в виде проективного предела последовательности нормированных пространств $S_n, n = 1, 2, \dots$, относительно линейных непрерывных отображений $g_{mn}: S_n \rightarrow S_m, m < n$, таких, что $g_{n,n+1}$ вполне непрерывны для каждого n , называется *пространством* (M^*) [1]. В работе [2] показано, что вложения $i_{m,m+1}: G_{m+1} \rightarrow G_m$ вполне непрерывны для каждого m . Поэтому G – пространство (M^*) .

Очевидно, определение пространства G не зависит от выбора конкретной последовательности $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$. В случае выполнения условия

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\exp(v(k))}{k!} \right)^{1/k} < \infty$$

функции из G будут вещественно аналитичны.

Положим $w(r) = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} (k \ln r - v(k)), r > 0, w(0) = 0$. Функция w непрерывна на неотрицательной полуоси [3, с. 24]. Очевидно, $w(|z|), z \in \mathbb{C}$, – субгармоническая функция в комплексной плоскости и $\ln r = o(w(r)), r \rightarrow +\infty$. Из того, что $w(r) = 0$ для $r \in [0, \exp(v(1))]$, и из второго условия на v следует, что найдется постоянная $C_v > 0$ такая, что $w(r) \leq C_v r, r \geq 0$. Известно [2], [4], что для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$|w(|z_2|) - w(|z_1|)| \leq C_v e |z_2 - z_1|. \quad (2)$$

Положим $w_m(|z|) = w((\sigma + \varepsilon_m)^{-1}|z|), z \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}$.

Через P обозначим индуктивный предел нормированных пространств

$$P_m = \left\{ f \in H(\mathbb{C}): \|f\|_m = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_m(|z|))} < \infty \right\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

относительно вложений $j_{mn}: P_m \rightarrow P_n, m < n$.

Как известно, пространство, представимое в виде внутреннего индуктивного предела последовательности нормированных пространств $S_n, n = 1, 2, \dots$, каждое из которых вложено в последующее вполне непрерывно, называется *пространством* (LN^*) [1]. В работе [2] показано, что вложения $j_{n,n+1}: P_n \rightarrow P_{n+1}$ вполне непрерывны. Поэтому P – пространство (LN^*) .

Через G^* обозначаем сильное сопряженное пространство к пространству G . Определим преобразование Фурье–Лапласа $\hat{T}$ функционала $T \in G^*$ формулой $\hat{T}(z) = T(e^{-ixz}), z \in \mathbb{C}$.

В работе [2] получена

ТЕОРЕМА А. *Преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между пространствами G^* и P .*

В случае, когда сходится ряд $\sum_{k=0}^\infty \exp(v(k) - v(k+1))$, данная теорема установлена в [5].

В данной работе изучается задача о разрешимости линейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка с постоянными коэффициентами в пространстве G .

Всюду далее предполагается, что функция $v \in V$ удовлетворяет условиям:

$$V1. \exists a > 0, b \in \mathbb{R}: \forall x \geq 0 \quad v(2x) \geq 2v(x) + ax + b;$$

$$V2. \exists \varepsilon_0 > 0: \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad \exists a_\varepsilon, b_\varepsilon > 0: \forall y \geq 1$$

$$\sup_{x \geq 1} (v(x+y) - v(x) - \varepsilon x) \leq v(y) + a_\varepsilon y + b_\varepsilon.$$

Пусть $L(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ – целая функция, удовлетворяющая условиям:

- L1. $\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon > 0: \forall z \in \mathbb{C} |L(z)| \leq C_\varepsilon \exp(\varepsilon w(|z|))$;
 L2. для $z \in \mathbb{C}$ вне некоторого множества S непересекающихся кружков $D(\lambda_j, r_j) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_j| < r_j\}$, $j = 1, 2, \dots$, таких, что
 S1. $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \infty$,
 S2. $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{r_j(1 + |\lambda_j| + r_j)^{\alpha-1}}{w(|\lambda_j|)} = 0$,
 при любом $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$|L(z)| \geq c_\varepsilon \exp(-\varepsilon w(|z|)), \quad (3)$$

где $c_\varepsilon > 0$ – некоторая постоянная.

В этих предположениях относительно v и L справедлива

ТЕОРЕМА. Для любого $g \in G$ уравнение $\sum_{k=0}^{\infty} d_k i^k f^{(k)}(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, разрешимо в G .

Проводится рассмотрение именно дифференциального оператора по существу, так как зазор между функциями $\ln \theta_m(x)$ логарифмический и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x \ln x} = +\infty.$$

Как известно (см., например, [6], [7]), сюръективность линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, операторов свертки в различных классах бесконечно дифференцируемых функций или аналитических функций часто благодаря использованию преобразования Фурье–Лапласа и методов функционального анализа [8] эквивалентна проблеме деления [9] в подходящих пространствах целых функций. Этот прием стал известен благодаря работам Мальгранжа [10], который положил начало изучению уравнений в свертках, и Эренпрайса [9], который охарактеризовал сюръективные операторы свертки на $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ в терминах оценок снизу на характеристическую функцию оператора, и затем использовался во многих работах (см. обзор в [7]). Например, в работах [11]–[13] результаты Эренпрайса были распространены на операторы свертки на пространствах ультрадифференцируемых функций [14], [15].

Из результатов по сюръективности линейных дифференциальных операторов бесконечного порядка с постоянными коэффициентами в классах бесконечно дифференцируемых функций на вещественной прямой с весовыми оценками на производные любого порядка известны лишь два – Ю. Ф. Коробейника [16] и автора [4]. Однако в работе [16] изучалось пространство, существенно отличающееся по своей природе от пространства G . В [4] рассматривается подобное G пространство, но на характеристическую функцию оператора были наложены слишком жесткие условия.

Задача, изучаемая в данной работе, также сводится к проблеме деления (лемма 6).

План работы таков. В пункте 2 приводятся достаточное условие на неотрицательную выпуклую возрастающую функцию на $[0, \infty)$, обеспечивающее для этой функции выполнение условия V2, и примеры функций из класса V, для которых выполнены условия V1, V2. В пункте 3 приводится пример целой функции, удовлетворяющей условиям L1, L2. Пункт 4 посвящен вспомогательным утверждениям, используемым при доказательстве теоремы. Доказательство теоремы приводится в п. 5.

2. Один способ проверки выполнения условия V2. При проверке выполнения условия V2 в конкретных ситуациях может быть полезна

ЛЕММА 1. Пусть $u: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – выпуклая возрастающая дважды непрерывно дифференцируемая функция такая, что

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x+1) - u(x)}{x} = 0$;
- 2) существует постоянная $C > 0$ такая, что $u''(x) \leq Cx^{-1}$ при $x \geq 1$.

Тогда для любого $\varepsilon \in (0, C)$ найдется постоянная Q_ε такая, что для любого $y \geq 1$

$$\sup_{x \geq 1} (u(x+y) - u(x) - \varepsilon x) < u(y) + \left(C \ln \frac{2C}{\varepsilon} + \frac{5C}{4} \right) y + Q_\varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y \geq 1$. Тогда $y \in [N, N+1)$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Пусть $\varepsilon \in (0, C)$. Оценим сверху $\sup_{x \geq 1} (u(x+y) - u(x) - \varepsilon x - u(y))$. Вначале, пользуясь первым условием на u , найдем постоянную $q_\varepsilon > 0$ такую, что $u(x+1) < u(x) + \varepsilon x/2 + q_\varepsilon$, $x \geq 0$. Далее имеем

$$\begin{aligned} \sup_{x \geq 1} (u(x+y) - u(x) - \varepsilon x - u(y)) &\leq \sup_{x \geq 1} (u(x+N+1) - u(x) - \varepsilon x - u(N)) \\ &\leq \sup_{x \geq 1} \left(u(x+N) - u(x) - \frac{\varepsilon x}{2} - u(N+1) \right) + \varepsilon N + 2q_\varepsilon. \end{aligned}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} u(x+N) - u(x) &= \sum_{k=1}^N (u(x+k) - u(x+k-1)) \leq \sum_{k=1}^N u'(x+k), \\ u(N+1) &= \sum_{k=1}^N (u(k+1) - u(k)) + u(1) > \sum_{k=1}^N u'(k). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u(x+N) - u(x) - u(N+1) &< \sum_{k=1}^N (u'(x+k) - u'(k)) \\ &= \sum_{k=1}^N \int_k^{x+k} u''(t) dt \leq C \sum_{k=1}^N \int_k^{x+k} \frac{dt}{t} = C \sum_{k=1}^N \ln \left(1 + \frac{x}{k} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sup_{x \geq 1} \left(u(x+N) - u(x) - u(N+1) - \frac{\varepsilon x}{2} \right) &\leq \sup_{x \geq 1} \left(C \sum_{k=1}^N \ln \left(1 + \frac{x}{k} \right) - \frac{\varepsilon x}{2} \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^N \sup_{x \geq 1} \left(C \ln \left(1 + \frac{x}{k} \right) - \frac{\varepsilon x}{2N} \right) = NC \ln \frac{2C}{\varepsilon} + CN \ln N - C \sum_{k=1}^N \ln k + \frac{\varepsilon(N+1)}{4}. \end{aligned}$$

И так как $\sum_{k=1}^N \ln k \geq \int_1^N \ln x dx = N \ln N - N + 1$, то

$$\sup_{x \geq 1} \left(u(x+N) - u(x) - u(N+1) - \frac{\varepsilon x}{2} \right) \leq NC \ln \frac{2C}{\varepsilon} - C + \frac{\varepsilon(N+1)}{4}.$$

Следовательно, для $y \geq 1$

$$\sup_{x \geq 1} (u(x+y) - u(x) - \varepsilon x - u(y)) < \left(C \ln \frac{2C}{\varepsilon} + \frac{5C}{4} \right) y - C + \frac{\varepsilon}{4} + 2q_\varepsilon.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что для любой возрастающей функции u , удовлетворяющей условию V2, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (u(x+1) - u(x))x^{-1} = 0$.

Приведем примеры функций из класса V , удовлетворяющих условиям V1, V2.

1. $v_1(x) = \rho x \ln(x+1)$, $\rho \geq 1$, $x \geq 0$. Проверка принадлежности v_1 к V и условия V1 не вызывает затруднений. Так как

$$v_1''(x) = \frac{\rho}{x+1} + \frac{\rho}{(x+1)^2},$$

то условие V2 выполняется в силу леммы 1. Отметим также, что в этом случае при $r > e^\rho$ $\rho e^{-1} r^{1/\rho} - 2 \ln r \leq w(r) \leq \rho e^{-1} r^{1/\rho}$.

2. $v_2(x) = \rho \ln \Gamma(x+2)$, $\rho \geq 1$, $x \geq 0$, где $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера. Функция v_2 выпуклая на $[0, \infty)$ [17, с. 763]. Функция v_2 возрастает на $[0, \infty)$. Это следует из исследования свойств гамма-функции, проведенного в [17, с. 755]. Пользуясь формулой Стирлинга, легко проверить, что условие V1 выполняется. Далее, поскольку $(\ln \Gamma(x+2))'' = \sum_{k=2}^{\infty} 1/(x+k)^2$ (см., например, [17, формула (28), с. 774], отсюда

$$v_2''(x) < \rho \int_1^{\infty} \frac{dt}{(x+t)^2} = \frac{\rho}{x+1},$$

и тем самым условие V2 тоже выполнено.

Незначительно изменив функцию $\rho \ln \Gamma(x+1)$, $\rho \geq 1$, например, на отрезке $[0, 2]$, можно получить функцию из класса V , удовлетворяющую условиям V1, V2.

3. $v_3(x) = (x+1) \ln(x+1) \operatorname{arctg}(x+1)$, $x \geq 0$. Имеем $v_3(0) = 0$,

$$v_3'(x) = (\ln(x+1) + 1) \operatorname{arctg}(x+1) + \frac{(x+1) \ln(x+1)}{1 + (x+1)^2} > 0 \quad \text{при } x \geq 0.$$

Очевидно, функция v_3 возрастающая на $[0, \infty)$. Так как

$$v_3''(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{x+1} + \frac{2 \ln(x+1)}{(1 + (x+1)^2)^2} + \frac{2}{1 + (x+1)^2},$$

то v_3 выпуклая функция на $[0, \infty)$, удовлетворяющая условию V2. Далее, для $x > 0$

$$\begin{aligned} v_3(2x) - 2v_3(x) &= 2x \ln(2x+1) \operatorname{arctg}(2x+1) - 2x \ln(x+1) \operatorname{arctg}(x+1) \\ &\quad + \ln(2x+1) \operatorname{arctg}(2x+1) - 2 \ln(x+1) \operatorname{arctg}(x+1) \\ &\geq \frac{\pi x}{2} \ln \frac{3}{2} + \frac{\pi}{4} \ln(2x+1) - \pi \ln(x+1). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что условие V1 для v_3 выполняется.

3. Пример целой функции, удовлетворяющей условиям L1 и L2. Пусть w_1 – неотрицательная субгармоническая функция такая, что $w_1(r) = o(w(r))$ при $r \rightarrow +\infty$ и $\ln(1+r) = o(w_1(r))$ при $r \rightarrow +\infty$. Функция w_1 может быть построена, например, как в работе [15, лемма 1.7]. По теореме 6 из [18] существует целая функция Y с простыми нулями, удовлетворяющая условиям:

- Y1. круги $D(\mu_k, d) = \{z \in \mathbb{C}: |z - \mu_k| < d\}$, где d – некоторое положительное число, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \dots$ – нули функции Y , расположенные в порядке неубывания их модулей, попарно не пересекаются;
- Y2. вне множества $\bigcup_{k=1}^{\infty} D(\mu_k, d)$ при некоторых положительных B, B_0 выполняется неравенство

$$|w_1(|z|) - \ln |Y(z)|| \leq B \ln(1 + |z|) + B_0.$$

Без ограничения общности считаем, что $|\mu_k| > \max(1, 4d) \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Очевидно, для любого $\varepsilon > 0$ существуют положительные постоянные $A_\varepsilon, B_\varepsilon$ такие, что вне множества $\bigcup_{k=1}^{\infty} D(\mu_k, d)$

$$|Y(z)| \leq A_\varepsilon \exp(\varepsilon w(|z|)), \quad (4)$$

$$|Y(z)| \geq B_\varepsilon \exp(-\varepsilon w(|z|)). \quad (5)$$

Применяя принцип максимума к функции Y в кружках $D(\mu_k, d)$, $k \in \mathbb{N}$, и пользуясь неравенством (2), распространяем оценку вида (4) на всю комплексную плоскость.

Для произвольных $\nu > 0$, $b \in (0, d_2)$ пусть $\Omega(b, \nu) = \bigcup_{k=1}^{\infty} D(\mu_k, b|\mu_k|^{-\nu})$. Оценим $|Y(z)|$ снизу вне множества $\Omega(b, \nu)$. С этой целью для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию $Y_k(z) = (z - \mu_k)Y^{-1}(z)$, $z \in \overline{D(\mu_k, d)}$. Функция $Y_k(z)$ аналитична в $\overline{D(\mu_k, d)}$ и не имеет там нулей. По принципу максимума модуля $|Y_k(z)| \leq d|Y(z_0)|^{-1}$, $z \in D(\mu_k, d)$, где z_0 – точка минимума $|Y|$ на окружности $\{z \in \mathbb{C}: |z - \mu_k| = d\}$. Отсюда, пользуясь неравенствами (5) и (2), получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная $\gamma_\varepsilon > 0$, не зависящая от k , такая, что $|Y_k(z)| \leq \gamma_\varepsilon \exp(\varepsilon w(|z|))$, $z \in D(\mu_k, d)$. Следовательно,

$$|Y(z)| \geq \gamma_\varepsilon^{-1} |z - \mu_k| \exp(-\varepsilon w(|z|)), \quad z \in D(\mu_k, d).$$

Таким образом, для $z \in D(\mu_k, d) \setminus D(\mu_k, b|\mu_k|^{-\nu})$

$$|Y(z)| \geq \gamma_\varepsilon^{-1} b |\mu_k|^{-\nu} \exp(-\varepsilon w(|z|)).$$

Так как для $z \in D(\mu_k, d)$ $|\mu_k| \leq 4|z|/3$, из вышеприведенного неравенства следует, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$ для $z \in D(\mu_k, d) \setminus D(\mu_k, b|\mu_k|^{-\nu})$ справедлива оценка

$$|Y(z)| \geq \gamma_\varepsilon^{-1} b \left(\frac{3}{4}\right)^\nu \exp(-\varepsilon w(|z|) - \nu \ln |z|). \quad (6)$$

Из (5), (6) с учетом того, что $\ln r = o(w(r))$ при $r \rightarrow +\infty$, следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная $m_\varepsilon > 0$ (зависящая от b, ν) такая, что

$$|Y(z)| \geq m_\varepsilon \exp(-\varepsilon w(|z|)), \quad z \notin \Omega(b, \nu).$$

Таким образом, для целой функции $Y(z)$ выполнены условие L1 и при $\nu \geq \alpha - 1$ условие L2.

4. Вспомогательные утверждения. Отметим вначале, что условия V1, V2 накладывают определенные ограничения на рост функции v . Например, из V1 следует неравенство

$$v(x) > \frac{ax \ln x}{4 \ln 2} + \left(\frac{v(1)}{2} - \frac{a}{4} - |b| \right) x - b, \quad x \geq 2.$$

Из условия V2 следует, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $x, y \geq 1$

$$v(x + y) \leq v(x) + \varepsilon x + v(y) + a_\varepsilon y + b_\varepsilon. \quad (7)$$

В частности, при $x \geq 1$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ имеем $v(2x) \leq 2v(x) + (a_\varepsilon + \varepsilon)x + b_\varepsilon$, а из этого неравенства легко следует, что

$$v(x) \leq (2v(1) + a_\varepsilon + 2b_\varepsilon + \varepsilon)x + \frac{(a_\varepsilon + \varepsilon)x \ln x}{\ln 2} - b_\varepsilon, \quad x \geq 1. \quad (8)$$

Введем функцию

$$h(s) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{v(x)}{x} - \frac{v(sx)}{sx} \right), \quad s > 0.$$

Отметим некоторые нужные для дальнейшего свойства этой функции.

ЛЕММА 2. *Функция $h(s)$ обладает свойствами:*

- 1) *функция $h(s)$ принимает конечные значения на положительной полуоси;*
- 2) *$h(s) \geq 0$ для $s \in (0, 1)$ и $h(s) \leq 0$ для $s \geq 1$;*
- 3) *$h(s)$ – невозрастающая функция на положительной полуоси;*
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} h(x) = +\infty$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} h(x) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем вначале первое свойство. Пусть $s > 1$. Тогда для некоторого $N \in \mathbb{N}$ $s \in (N, N + 1]$. Из неравенства (7) выводим, что для любых $x \geq (s - N)^{-1}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$v(sx) \leq Nv(x) + \varepsilon Nx + \frac{a_\varepsilon Nx(2s - N - 1)}{2} + Nb_\varepsilon + v((s - N)x).$$

Отсюда, учитывая, что $v(tx) \leq tv(x)$ для всех $t \in [0, 1]$, $x \geq 0$, получаем, что для любых $N \in \mathbb{N}$, $s \in (N, N + 1]$, $x \geq (s - N)^{-1}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ справедливо неравенство

$$v(sx) \leq sv(x) + \left(\varepsilon + \frac{a_\varepsilon(2s - N - 1)}{2} \right) sx + b_\varepsilon s. \quad (9)$$

В частности, найдется постоянная $K_s > 0$ такая, что для всех $x \geq 0$ будет выполнено неравенство

$$v(sx) \leq sv(x) + \left(\varepsilon + \frac{a_\varepsilon s}{2} \right) sx + b_\varepsilon s + K_s. \quad (10)$$

Воспользовавшись неравенством (10), получаем $h(s) \geq -\varepsilon - 0,5a_\varepsilon s$ для всех $s > 1$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Для $s \in (0, 1)$

$$h(s) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{v(s^{-1}x)}{s^{-1}x} - \frac{v(x)}{x} \right),$$

и поэтому, снова пользуясь (10), имеем $h(s) \leq \varepsilon + 0,5a_\varepsilon s^{-1}$.

Поскольку из определения $h(1) = 0$, первое свойство полностью доказано.

Второе и третье свойства следуют из того, что благодаря выпуклости v и условию $v(0) = 0$ функция $v(x)/x$ не убывает на положительной полуоси.

Из условия V1 имеем для любых $x \geq 1, n \in \mathbb{N}$ $v(2^n x) \geq 2^n v(x) + an2^{n-1}x + b(2^n - 1)$. Следовательно, $h(2^{-n}) \geq an/2$. Отсюда и из невозрастания функции h получаем третье свойство функции h .

Покажем, что предел функции h справа в точке 1 равен 0. Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ произвольно, $s \in (1, 2)$. Воспользовавшись (9), имеем $h(s) \geq -\varepsilon - a_\varepsilon(s - 1)$. Таким образом, если $0 < s - 1 < \min(1, \varepsilon a_\varepsilon^{-1})$, то $-2\varepsilon < h(s) - h(1) \leq 0$. Отсюда следует, что функция $h(s)$ непрерывна справа в точке 1.

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. *Справедливо равенство*

$$h(s) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{v(k)}{k} - \frac{v([sk] + 1)}{sk} \right), \quad s > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s > 0$. Для $x \in [k, k + 1), k \in \mathbb{N}$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{v(x)}{x} - \frac{v(sx)}{sx} &\geq \frac{v(k)}{k} - \frac{v(sk + s)}{sk} = \frac{v(k)}{k} - \frac{v([sk] + 1)}{sk} + \frac{v([sk] + 1) - v(sk + s)}{sk}, \\ \frac{v(x)}{x} - \frac{v(sx)}{sx} &\leq \frac{v(k + 1)}{k + 1} - \frac{v(sk)}{sk} \leq \frac{v(k)}{k} - \frac{v([sk] + 1)}{sk} + \frac{v(sk + 1) - v(sk)}{sk} \\ &\quad + \frac{v(k + 1) - v(k)}{k + 1} - \frac{v(k)}{k(k + 1)}. \end{aligned}$$

Учитывая первое условие на v и неравенство (8), получаем из этих оценок искомое равенство. Лемма доказана.

Положим $l(s) = \exp(h(s)), s > 0$.

ЛЕММА 4. *Для любых $s > 0, \delta \in (0, 1)$ существует постоянная $Q(s, \delta) \geq 0$ такая, что для всех $r \geq 0$*

$$sw(r) \leq w\left(\frac{r}{l(s)(1 - \delta)}\right) + Q(s, \delta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь леммой 3, для любых $s > 0, \delta \in (0, 1)$ найдем постоянную $A(s, \delta) > 0$ такую, что для всех $k \in \mathbb{Z}$

$$sv(k) > v([sk] + 1) + sk(h(s) + \ln(1 - \delta)) - A(s, \delta).$$

Поэтому для $s \in (0, 1), r > 1$

$$\begin{aligned} sw(r) &= \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} (sk \ln r - sv(k)) \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} (([sk] + 1) \ln r - v([sk] + 1) - ([sk] + 1)(h(s) + \ln(1 - \delta))) + h(s) + A(s, \delta) \\ &\leq \sup_{N \in \mathbb{Z}_+} \left(N \ln \frac{r}{l(s)(1 - \delta)} - v(N) \right) + h(s) + A(s, \delta) \\ &= w\left(\frac{r}{l(s)(1 - \delta)}\right) + h(s) + A(s, \delta). \end{aligned}$$

Аналогично, для $s \geq 1, r > 1$

$$sw(r) \leq w\left(\frac{r}{l(s)(1-\delta)}\right) + A(s, \delta).$$

Следовательно, при $r > 1$ утверждение леммы справедливо. Выбирая надлежащим образом постоянную $Q(s, \delta) \geq 0$, добьемся выполнения неравенства для всех $r \geq 0$.

Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. Для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют числа $\varepsilon > 0, q \geq 0$ такие, что

$$w_n(|z|) + \varepsilon w(|z|) \leq w_{n+1}(|z|) + q, \quad z \in \mathbb{C}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Выберем числа μ, δ из интервала $(0, 1)$ настолько малыми, что $l(\mu) > 2(\sigma + \varepsilon_n)$ и $(\sigma + \varepsilon_n)(1 - \delta)l(1 + \mu) > \sigma + \varepsilon_{n+1}$. В силу свойств 4) и 5) функции h это возможно. Пользуясь леммой 4 и обозначениями из этой леммы, имеем при любом $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} w_n(|z|) + \mu^2 w(|z|) &\leq w_n(|z|) + \mu w\left(\frac{2|z|}{l(\mu)}\right) + \mu Q(\mu, 2^{-1}) \\ &\leq (1 + \mu)w_n(|z|) + \mu Q(\mu, 2^{-1}) \\ &\leq w\left(\frac{|z|}{(\sigma + \varepsilon_n)(1 - \delta)l(1 + \mu)}\right) + \mu Q(\mu, 2^{-1}) + Q(1 + \mu, \delta) \\ &\leq w_{n+1}(|z|) + q, \end{aligned}$$

где $q = \mu Q(\mu, 2^{-1}) + Q(1 + \mu, \delta)$. Положим теперь $\varepsilon = \mu^2$.

Лемма доказана.

Учитывая, что $\ln(1 + r) = o(w(r))$ при $r \rightarrow +\infty$, из этой леммы получаем

СЛЕДСТВИЕ. Для любых $A > 0, n \in \mathbb{N}$ существует постоянная $Q \geq 0$ такая, что

$$w_n(|z|) + A \ln(1 + |z|) \leq w_{n+1}(|z|) + Q, \quad z \in \mathbb{C}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение, содержащееся в следствии из леммы 5, справедливо в предположении, что v лишь принадлежит V (см. [2]).

ЛЕММА 6. Если для $F \in P$ отношение F/L – целая функция, то $F/L \in P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $F \in P$, то при некоторых $m \in \mathbb{N}, c > 0$

$$|F(z)| \leq c \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_m(|z|)), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (11)$$

Согласно лемме 5 найдутся числа $\varepsilon > 0, q \geq 0$ такие, что

$$w_m(|z|) + 2\varepsilon w(|z|) \leq w_{m+1}(|z|) + q, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (12)$$

Считаем, что ε настолько мало, что $(\sigma + \varepsilon_{m+1})(1 + \varepsilon)^{-1} > \sigma + \varepsilon_{m+2}$.

Если $z \notin S$, то, пользуясь (3), (11), (12), получаем

$$\left| \frac{F(z)}{L(z)} \right| \leq c c_\varepsilon^{-1} \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+1}(|z|) + q). \quad (13)$$

Пусть $z \in S$. Тогда $z \in D(\lambda_n, r_n)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Применяя принцип максимума модуля к функции F/L в круге $D(\lambda_n, r_n)$ и пользуясь оценками (3), (11), получаем

$$\left| \frac{F(z)}{L(z)} \right| \leq c c_\varepsilon^{-1} \exp(\psi(\operatorname{Im} t_0) + w_m(|t_0|) + \varepsilon w(|t_0|)), \quad (14)$$

где t_0 — точка максимума $|F(t)/L(t)|$ на окружности $\{t \in \mathbb{C}: |t - \lambda_n| = r_n\}$. Оценим сверху $\psi(\operatorname{Im} t_0)$, $w_m(|t_0|)$ и $w(|t_0|)$. Отметим вначале, что ввиду неравенства $w(r) \leq C_v r$ при $r \geq 0$ и условия L2 на функцию L имеем $\lim_{j \rightarrow \infty} (r_j/|\lambda_j|) = 0$. Поэтому можно найти номер N такой, что для всех $j \geq N$, $t_1, t_2 \in \overline{D}(\lambda_j, r_j) = \{z \in \mathbb{C}: |z - \lambda_j| \leq r_j\}$ будет справедливо неравенство $|t_1|/|t_2| < 1 + \varepsilon$. Следовательно, если $j \geq N$, то для любых $t_1, t_2 \in \overline{D}(\lambda_j, r_j)$ $w_m(|t_1|) < w_m((1 + \varepsilon)|t_2|)$ и $w(|t_1|) < w((1 + \varepsilon)|t_2|)$. Подберем постоянную K_1 так, чтобы для любых $j \in \mathbb{N}$, $t_1, t_2 \in \overline{D}(\lambda_j, r_j)$ выполнялись неравенства $w_m(|t_1|) < w_m((1 + \varepsilon)|t_2|) + K_1$ и $w(|t_1|) < w((1 + \varepsilon)|t_2|) + K_1$. Далее, воспользовавшись неравенством (1) и условием S2 на исключительные кружки, можно найти постоянную $K_2 > 0$, не зависящую от j , такую, что для любых $t_1, t_2 \in \overline{D}(\lambda_j, r_j)$ $|\psi(\operatorname{Im} t_1) - \psi(\operatorname{Im} t_2)| \leq \varepsilon w(|\lambda_j|) + K_2$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \psi(\operatorname{Im} t_0) &\leq \psi(\operatorname{Im} z) + \varepsilon w(|\lambda_n|) + K_2 \\ &< \psi(\operatorname{Im} z) + \varepsilon w((1 + \varepsilon)|z|) + \varepsilon K_1 + K_2. \end{aligned}$$

Пользуясь полученными оценками и выбором ε , имеем из (14) для $z \in S$

$$\left| \frac{F(z)}{L(z)} \right| \leq c c_\varepsilon^{-1} \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+2}(|z|) + K_1 + 2\varepsilon K_1 + K_2 + q). \quad (15)$$

Из оценок (13) и (15) следует, что $F/L \in P$. Лемма доказана.

Обозначим через $Z(L)$ множество нулей функции L .

ЛЕММА 7. Система $W = \{\exp(-ixz)\}_{z \in \mathbb{C} \setminus Z(L)}$ полна в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать лемму, нужно показать, что если для произвольного функционала $T \in G^*$ $T(f) = 0 \ \forall f \in W$, то $T(f) = 0 \ \forall f \in G$. Поскольку $\hat{T}(z) = 0$, $z \in \mathbb{C} \setminus Z(L)$, то по теореме единственности $\hat{T} = 0$. Тогда по теореме А $T = 0$. Лемма доказана.

5. Доказательство теоремы. Покажем вначале, что линейный оператор $\mathcal{L}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k i^k f^{(k)}$, $f \in G$, действует из G в G непрерывно. Пользуясь леммой 4 и свойством 4) функции h , из оценки на $|L|$ получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $M_\varepsilon > 0$ такая, что для любого $z \in \mathbb{C}$ $|L(z)| \leq M_\varepsilon \exp(w(\varepsilon|z|))$. Из этой оценки, равенства (см. [3, с. 24])

$$\inf_{r>0} \frac{\exp(w(r))}{r^k} = \exp(-v(k)), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

и неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$|d_k| \leq M_\varepsilon \varepsilon^k \exp(-v(k)), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Пользуясь последней оценкой и условием V2, имеем при любых $\varepsilon > 0$, $\delta \in (0, \varepsilon_0)$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in G$, $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |d_k| |f^{(k+m)}(x)| &\leq M_\varepsilon p_{n+1}(f) \theta_{n+1}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (\sigma + \varepsilon_{n+1})^{k+m} e^{v(k+m)-v(k)} \\ &\leq M_\varepsilon e^{v(m)+\delta m+b_\delta} p_{n+1}(f) \theta_{n+1}(x) (\sigma + \varepsilon_{n+1})^m \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (\sigma + \varepsilon_{n+1})^k \exp(a_\delta k). \end{aligned}$$

Выбирая теперь $\delta > 0$ настолько маленьким, чтобы выполнялось неравенство $e^\delta(\sigma + \varepsilon_{n+1}) < \sigma + \varepsilon_n$, а затем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\varepsilon(\sigma + \varepsilon_{n+1}) \exp(a_\delta)$ было меньше 1, получим оценку

$$\sum_{k=0}^{\infty} |d_k| |f^{(k+m)}(x)| \leq V_n p_{n+1}(f) \theta_{n+1}(x) (\sigma + \varepsilon_n)^m e^{v(m)},$$

где $V_n > 0$ – некоторая постоянная. Следовательно, $\mathcal{L}(f) \in G$ и справедливо неравенство $p_n(\mathcal{L}(f)) \leq V_n p_{n+1}(f)$. Последнее неравенство означает, что $\mathcal{L}$ действует из G в G непрерывно.

Линейный оператор $\mathcal{L}$ определяет сопряженный оператор $\mathcal{L}^*: G^* \rightarrow G^*$ по правилу $(\mathcal{L}(f), T) = (f, \mathcal{L}^*(T))$, $f \in G$, $T \in G^*$. Так как пространства G^* и P топологически изоморфны, то $\mathcal{L}^*$ порождает оператор $\widehat{\mathcal{L}}: P \rightarrow P$ по формуле $\widehat{T} \rightarrow \widehat{\mathcal{L}^*(T)}$, $T \in G^*$. Легко видеть, что $\widehat{\mathcal{L}}(F)(z) = F(z)L(z)$, $F \in P$.

Образ произвольного оператора A будем обозначать через $\text{im } A$.

Покажем, что множество $\text{im } \mathcal{L}$ замкнуто в G . Так как G – пространство Фреше, то замкнутость $\text{im } \mathcal{L}$ в G равносильна замкнутости $\text{im } \mathcal{L}^*$ в G^* [8], а последнее имеет место тогда и только тогда, когда множество $\text{im } \widehat{\mathcal{L}}$ замкнуто в P . Согласно [1, теорема 1] $\text{im } \widehat{\mathcal{L}}$ замкнуто в P тогда и только тогда, когда $\text{im } \widehat{\mathcal{L}} \cap P_m$ замкнуто в P_m для любого $m \in \mathbb{N}$.

Пусть $m \in \mathbb{N}$ произвольно. Пусть F принадлежит замыканию $\text{im } \widehat{\mathcal{L}} \cap P_m$ в P_m . Тогда существует последовательность $\{F_n\}_{n=1}^\infty \subset \text{im } \widehat{\mathcal{L}} \cap P_m$, сходящаяся к F в топологии P_m , т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > N(\varepsilon)$

$$|F(z) - F_n(z)| \leq \varepsilon \exp(\psi(\text{Im } z) + w_m(|z|)), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (16)$$

Если ζ_j – нуль L кратности s_j , то для $k = 0, 1, \dots, s_j - 1$

$$|F^{(k)}(\zeta_j)| = |F^{(k)}(\zeta_j) - F_n^{(k)}(\zeta_j)| \leq \frac{k!}{r^k} \max_{|\zeta - \zeta_j|=r} |F(\zeta) - F_n(\zeta)|,$$

где $r = (|\zeta_j| + 1)^{1-\alpha}$. Пользуясь (16), (1), (2) и следствием из леммы 5, получаем при $k = 0, 1, \dots, s_j - 1$

$$|F^{(k)}(\zeta_j)| \leq \varepsilon l_k \exp(\psi(\text{Im } \zeta_j) + w_{m+1}(|\zeta_j|)),$$

где положительная постоянная l_k не зависит от j . В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $F^{(k)}(\zeta_j) = 0, k = 0, 1, \dots, s_j - 1$. Отсюда следует, что F/L – целая функция. По лемме 6 $F/L \in P$. Следовательно, $F \in \text{im } \widehat{L} \cap P_m$. Это означает, что множество $\text{im } \widehat{\mathcal{L}}$ замкнуто в P . Следовательно, множество $\text{im } \mathcal{L}$ замкнуто в G .

Покажем теперь, что $\text{im } \mathcal{L} = G$. Рассмотрим уравнение $\mathcal{L}(f) = \exp(-ixz)$, где $z \in \mathbb{C} \setminus Z(L)$. Оно имеет решение $f(z) = \exp(-ixz)/L(z)$. Учитывая лемму 7, делаем вывод, что множество $\text{im } \mathcal{L}$ плотно в G . Из этого и из замкнутости $\text{im } \mathcal{L}$ в G следует, что $\text{im } \mathcal{L} = G$.

Теорема доказана.

Автор признателен рецензенту за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Себаштьян-и-Сильва Ж. О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях // Математика. 1957. Т. 1. № 1. С. 60–77.
- [2] Musin I. Kh. On the Fourier–Laplace transform of functionals on a weighted space of infinitely differentiable functions // E-print `funct-an/9911067`, 1999.
- [3] Мандельбройт С. Примаыкающие ряды, регуляризация последовательностей, применения. М.: ИЛ, 1955.
- [4] Мусин И. Х. О преобразовании Фурье–Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 10. С. 57–86.
- [5] Мусин И. Х. Теорема типа Пэли–Винера для весового пространства бесконечно дифференцируемых функций // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 6. С. 181–204.
- [6] Напалков В. В. Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.
- [7] Кривошеев А. С., Напалков В. В. Комплексный анализ и операторы свертки // УМН. 1992. Т. 47. № 6. С. 3–58.
- [8] Дьедонне Ж., Шварц Л. Двойственность в пространствах (F) и (LF) // Математика. 1958. Т. 2. № 2. С. 77–107.
- [9] Ehrenpreis L. Solution of some problems of division. IV. // Amer. J. Math. 1960. V. 82. P. 522–588.
- [10] Malgrange B. Éxistence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1955–56. V. 6. P. 271–355.
- [11] Meise R., Taylor B. A., Vogt D. Equivalence of slowly decreasing conditions and local Fourier expansions // Indiana Univ. Math. J. 1987. V. 36. P. 729–756.
- [12] Momm S. Closed ideals in nonradial Hörmander algebras // Arch. Math. 1992. V. 58. P. 47–55.
- [13] Braun R. W., Meise R., Vogt D. Characterization of the linear partial differential operators with constant coefficients which are surjective on non-quasianalytic classes of Roumieu type on $\mathbb{R}^N$ // Math. Nachr. 1994. V. 168. P. 19–54.
- [14] Björck G. Linear partial differential operators and generalized distributions // Ark. Mat. 1965. V. 6. P. 351–407.
- [15] Braun R. W., Meise R., Taylor B. A. Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Results in Math. 1990. V. 17. P. 205–237.
- [16] Коробейник И. Ф. Обесконечно дифференцируемых решениях линейного дифференциального уравнения бесконечного порядка // Сиб. матем. ж. 1965. Т. 6. № 3. С. 516–527.
- [17] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948.
- [18] Юлмухаметов Р. С. Аппроксимация субгармонических функций // Analysis Math. 1985. V. 11. № 3. P. 257–282.