Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Даурцева, $U(n+1) \times U(p+1)$ -эрмитовы метрики на многообразии $S^{2n+1} \times S^{2p+1}$, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 2, 207–223

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3790>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 13:44:05

УДК 514.163

$U(n+1) \times U(p+1)$ -эрмитовы метрики на многообразии $S^{2n+1} \times S^{2p+1}$

Н. А. Даурцева

На однородном пространстве $M \times M' = U(n+1)/U(n) \times U(p+1)/U(p)$ имеется двухпараметрическое семейство инвариантных почти комплексных структур $J_{a,c}$, все эти структуры интегрируемы. Рассматриваются все инвариантные римановы метрики на однородном пространстве $M \times M'$. Они зависят от пяти параметров и являются эрмитовыми относительно некоторой комплексной структуры $J_{a,c}$. В работе вычислен тензор Риччи, скалярная кривизна и получены оценки секционной кривизны для любой метрики на $M \times M'$. Описаны все инвариантные метрики неотрицательной кривизны. Найдены экстремальные значения функционала скалярной кривизны на четырехпараметрическом семействе метрик $g_{a,c,\lambda,\lambda';1}$.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Существование комплексных структур на произведении нечетномерных сфер $S^{2n+1} \times S^{2p+1}$ (в дальнейшем $M \times M'$) было доказано в 1935 г. Калаби и Экманом [1], [2] (n и p не равны нулю одновременно). Для построения таких структур используется конструкция расслоения Хопфа сферы S^{2n+1} над проективным пространством $\mathbb{CP}^n$ со слоем S^1 . Примененная к произведению сфер, она дает расслоение

$$\pi: M \times M' \xrightarrow{S^1 \times S^1} \mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^p.$$

База и слой данного расслоения являются комплексными. Зафиксировав комплексную структуру на $\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^p$ и $S^1 \times S^1$ для указанного расслоения можно подобрать голоморфные функции перехода и тем самым определить комплексную структуру на $M \times M'$. Структуры, полученные таким образом, образуют двухпараметрическое семейство $\{J_{a,c} : a, c \in \mathbb{R}, c > 0\}$.

Произведение сфер диффеоморфно однородному пространству, и построенные структуры являются инвариантными относительно действия группы $U(n+1) \times U(p+1)$. Благодаря этому, исследование таких структур сводится к изучению линейных эндоморфизмов касательного пространства $T_o(M \times M')$, где $o = U(n) \times U(p)$, полученных ограничением комплексных структур на это пространство. Для каждой структуры данного семейства существует трехпараметрическое семейство инвариантных кососимметрических 2-форм $\omega_{\lambda,\lambda';t}$, удовлетворяющих условиям

$$\omega_{\lambda,\lambda';t}(JX, JY) = \omega_{\lambda,\lambda';t}(X, Y), \quad \omega_{\lambda,\lambda';t}(X, JX) > 0.$$

Это позволяет каждой комплексной структуре двухпараметрического семейства поставить в соответствие семейство метрик по формуле

$$g_{a,c,\lambda,\lambda';t}(X, Y) = \omega_{\lambda,\lambda';t}(X, J_{a,c}Y).$$

Найдена кривизна Риччи и скалярная кривизна метрик $g_{a,c;\lambda,\lambda';t}$. Получены точные оценки секционной кривизны метрик данного семейства.

ТЕОРЕМА. Секционная кривизна K метрики $g_{a,c,\lambda,\lambda';t}$ на $M \times M'$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$K_{\min} \leq K \leq K_{\max},$$

где

$$K_{\min} = \min \left(-\frac{|a|t}{c\lambda\lambda'}, \frac{c(\lambda m_2 + \lambda' m_1) - \sqrt{c^2(\lambda' m_1 - \lambda m_2)^2 + 16a^2 t^2}}{2c\lambda\lambda'} \right),$$

$$m_1 = \min \left(4 - \frac{3t}{c\lambda}, 1 \right), \quad m_2 = \min \left(4 - 3\frac{(a^2 + c^2)t}{c\lambda'}, 1 \right);$$

$$K_{\max} = \max \left(\frac{t}{c\lambda^2}, \frac{(a^2 + c^2)t}{c\lambda'^2}, \frac{|a|t}{c\lambda\lambda'}, \frac{c(\lambda m_2 + \lambda' m_1) + \sqrt{c^2(\lambda' m_1 - \lambda m_2)^2 + 16a^2 t^2}}{2c\lambda\lambda'} \right),$$

$$m_1 = \max \left(4 - \frac{3t}{c\lambda}, 1 \right), \quad m_2 = \max \left(4 - 3\frac{(a^2 + c^2)t}{c\lambda'}, 1 \right).$$

2. Инвариантные комплексные структуры. Интегрируемость. В дальнейшем нам будут необходимы некоторые алгебраические факты. Так как $U(n)$ вкладывается в $U(n+1)$ стандартным образом, то алгебра Ли $\mathfrak{u}(n)$ вкладывается в $\mathfrak{u}(n+1)$ следующим образом: матрице $M \in \mathfrak{u}(n)$ соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \in \mathfrak{u}(n+1).$$

Введем базис в $\mathfrak{u}(n+1)$. Пусть $E_{\nu\mu}$ – это матрица, в которой на месте с номером (ν, μ) стоит 1, а остальные элементы нулевые. Определим

$$Z_{\nu\mu} = E_{\nu\mu} - E_{\mu\nu}, \quad iT_{\nu\mu} = i(E_{\nu\mu} + E_{\mu\nu}), \quad 0 \leq \mu < \nu \leq n.$$

Рассмотрим разложение

$$\mathfrak{u}(n+1) = \mathfrak{u}(n) \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{k},$$

где $\mathfrak{t}$ – подпространство в $\mathfrak{u}(n+1)$, натянутое на вектор $X_0 = (1/2)iT_{00}$; $\mathfrak{k}$ – подпространство в $\mathfrak{u}(n+1)$, натянутое на векторы

$$Y_{2\nu-1} = Z_{\nu 0}, \quad Y_{2\nu} = iT_{\nu 0}, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

ЛЕММА 1. Разложение $\mathfrak{u}(n+1) = \mathfrak{u}(n) \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{k}$ $\text{ad } \mathfrak{u}(n)$ -инвариантно, причем $\mathfrak{u}(n)$ на $\mathfrak{t}$ действует тривиально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу связности $U(n)$ достаточно показать, что

$$[\mathfrak{u}(n), \mathfrak{u}(n)] \subset \mathfrak{u}(n), \quad [\mathfrak{u}(n), \mathfrak{t}] = 0, \quad [\mathfrak{u}(n), \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}.$$

Лемма доказана.

Аналогично получаем разложение $\mathfrak{u}(p+1) = \mathfrak{u}(p) \oplus \mathfrak{t}' \oplus \mathfrak{k}'$. Пусть $o = U(n) \times U(p)$ – начало однородного пространства $U(n+1)/U(n) \times U(p+1)/U(p)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{u}(n) \times \mathfrak{u}(p)$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{k} \times \mathfrak{t}' \oplus \mathfrak{k}'$, тогда касательное пространство $T_o(M \times M') = \mathfrak{p}$.

ЛЕММА 2. *Выполнены следующие условия:*

- 1) $[\mathfrak{t}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$: $[X_0, Y_{2\nu-1}] = -Y_{2\nu}, \quad [X_0, Y_{2\nu}] = Y_{2\nu-1};$
- 2) $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{u}(n) \oplus \mathfrak{t}$: $[Y_{2\nu-1}, Y_{2\nu}] = -2X_0 + iT_{\nu\nu},$
 $[Y_{2\nu}, Y_{2\mu}] = -Z_{\nu\mu},$
 $[Y_{2\nu-1}, Y_{2\mu-1}] = -Z_{\nu\mu},$
 $[Y_{2\nu}, Y_{2\mu-1}] = -T_{\nu\mu};$
- 3) $[\mathfrak{t}', \mathfrak{k}'] \subset \mathfrak{k}'$: $[X'_0, Y'_{2\nu-1}] = -Y'_{2\nu}, \quad [X'_0, Y'_{2\nu}] = Y'_{2\nu-1};$
- 4) $[\mathfrak{k}', \mathfrak{k}'] \subset \mathfrak{u}(p) \oplus \mathfrak{t}'$: $[Y'_{2\nu-1}, Y'_{2\nu}] = -2X'_0 + iT'_{\nu\nu},$
 $[Y'_{2\nu}, Y'_{2\mu}] = -Z'_{\nu\mu},$
 $[Y'_{2\nu-1}, Y'_{2\mu-1}] = -Z'_{\nu\mu},$
 $[Y'_{2\nu}, Y'_{2\mu-1}] = -T'_{\nu\mu};$
- 5) $[\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{k}, \mathfrak{t}' \oplus \mathfrak{k}'] = 0.$

Построение инвариантной почти комплексной структуры на однородном пространстве $M \times M'$ сводится к построению эндоморфизма $J \in \text{End}(\mathfrak{p})$, $J^2 = -1$, коммутирующего с представлением изотропии $\text{Ad}_H|_{\mathfrak{p}}$. Такой эндоморфизм разнится до поля J с $J^2 = -1$, т.е. почти комплексной структуры.

Построим все почти комплексные структуры, определенные на $M \times M'$, конструкцией расслоения Хопфа. В терминах однородных пространств данное расслоение имеет вид

$$\begin{aligned} &U(n+1)/U(n) \times U(p+1)/U(p), \\ &\quad \downarrow U(1) \times U(1), \\ &U(n+1)/(U(1) \times U(n)) \times U(p+1)/(U(1) \times U(p)). \end{aligned}$$

Касательное пространство к слою в начале $o = U(n) \times U(p)$ отождествляется с $\mathfrak{t} \times \mathfrak{t}'$, а к базе – с $\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}'$. Проективное пространство $\mathbb{CP}^n$ допускает две инвариантные комплексные структуры $\pm J$, где $JY_{2\nu-1} = Y_{2\nu}$, $\nu = 1, \dots, n$. Соответственно, произведение проективных пространств допускает четыре комплексные структуры, определенные парами (J, J') , $(J, -J')$, $(-J, J')$, $(-J, -J')$, где J обозначает комплексную структуру на $\mathbb{CP}^n$, J' – на $\mathbb{CP}^p$.

Тор $T^2 = S^1 \times S^1$ допускает двухпараметрическое семейство комплексных структур:

$$J_{a,c}U_x = \frac{a}{c}U_x + \frac{1}{c}U'_x, \quad J_{a,c}U'_x = -\frac{a^2 + c^2}{c}U_x - \frac{a}{c}U'_x,$$

где $x \in T^2$, U, U' – векторные поля, касательные к $S^1 \times S^1$ (первому и второму сомножителю соответственно), $a, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

Фиксируя комплексные структуры на торе и на произведении проективных пространств, получаем почти комплексную структуру на $M \times M'$, ограничение которой на $T_o(M \times M')$ в базисе X_0, X'_0, Y_i, Y'_j , $i = 1, \dots, 2n$, $j = 1, \dots, 2p$, имеет матрицу

$$I_{a,c} = \begin{pmatrix} \frac{a}{c} & -\frac{a^2 + c^2}{c} & 0 & 0 \\ \frac{1}{c} & -\frac{a}{c} & & \\ 0 & & \varepsilon I & \\ 0 & & & \varepsilon' I' \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$, I и I' – линейные эндоморфизмы, соответствующие J и J' , определенным выше.

ЛЕММА 3. Почти комплексные структуры построенного выше семейства:

- 1) $\text{ad } \mathfrak{h}$ -инвариантны;
- 2) интегрируемы;
- 3) определяют ту же ориентацию, что и $I_{0,1}$, $\varepsilon = \varepsilon' = 1$ в следующих случаях:
 при $\varepsilon = \varepsilon' = 1$, $c > 0$;
 при $\varepsilon = 1$, $\varepsilon' = -1$, $c > 0$, $p = 2k$;
 при $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = 1$, $c > 0$, $n = 2k$;
 при $\varepsilon = \varepsilon' = -1$, $c > 0$, $n + p = 2k$;
 при $\varepsilon = 1$, $\varepsilon' = -1$, $c < 0$, $p = 2k - 1$;
 при $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = 1$, $c < 0$, $n = 2k - 1$;
 при $\varepsilon = \varepsilon' = -1$, $c < 0$, $n + p = 2k - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Указанные структуры $\text{ad } \mathfrak{h}$ -инвариантны по построению.

2. Так как все указанные почти комплексные структуры $\text{ad } \mathfrak{h}$ -инвариантны, то они однозначно определяются соответствующим ограничением на $\mathfrak{p}$. В частности, для интегрируемости необходимо и достаточно обращения в нуль тензора Нейенхейса

$$N(Y, Z) = [IZ, IY]_{\mathfrak{p}} - [Z, Y]_{\mathfrak{p}} - I[IZ, Y]_{\mathfrak{p}} - I[Z, IY]_{\mathfrak{p}}.$$

Достаточно проверить равенство для базисных векторов. Имеем

$$\begin{aligned} & [IX_0, IY_{2\nu-1}]_{\mathfrak{p}} - [X_0, Y_{2\nu-1}]_{\mathfrak{p}} - I[X_0, IY_{2\nu-1}]_{\mathfrak{p}} - I[IX_0, Y_{2\nu-1}]_{\mathfrak{p}} \\ &= \left[\frac{a}{c} X_0 + \frac{1}{c} X'_0, \varepsilon Y_{2\nu} \right]_{\mathfrak{p}} + Y_{2\nu} - \varepsilon I[X_0, Y_{2\nu}]_{\mathfrak{p}} - I \left[\frac{a}{c} X_0 + \frac{1}{c} X'_0, Y_{2\nu-1} \right]_{\mathfrak{p}} \\ &= \varepsilon \frac{a}{c} Y_{2\nu-1} + Y_{2\nu} - \varepsilon IY_{2\nu-1} + I \frac{a}{c} Y_{2\nu} \\ &= \varepsilon \frac{a}{c} Y_{2\nu-1} + Y_{2\nu} - \varepsilon^2 Y_{2\nu} - \varepsilon \frac{a}{c} Y_{2\nu-1} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично, для $Z = X_0$, $Y = Y_{2\nu}$, а также $Z = X'_0$, $Y = Y'_j$, $j = 1, \dots, 2p$, имеем

$$\begin{aligned} & [IY_{2\nu-1}, IY_{2\nu}]_{\mathfrak{p}} - [Y_{2\nu-1}, Y_{2\nu}]_{\mathfrak{p}} - I[Y_{2\nu-1}, IY_{2\nu}]_{\mathfrak{p}} - I[IY_{2\nu-1}, Y_{2\nu}]_{\mathfrak{p}} \\ &= -\varepsilon^2 [Y_{2\nu}, Y_{2\nu-1}]_{\mathfrak{p}} + 2X_0 - (-\varepsilon) I[Y_{2\nu-1}, Y_{2\nu-1}]_{\mathfrak{p}} - \varepsilon I[Y_{2\nu}, Y_{2\nu}]_{\mathfrak{p}} \\ &= -2X_0 + 2X_0 = 0. \end{aligned}$$

Аналогично для $Z = Y'_{2\nu-1}$, $Y = Y'_{2\nu}$. Остальные комбинации по лемме 2 также дают нулевое значение тензора Нейенхейса.

3. Будем сравнивать ориентацию, индуцируемую указанными структурами, с ориентацией, индуцируемой структурой при $a = 0$, $c = 1$, $\varepsilon = \varepsilon' = 1$. Имеем

$$(X_0, IX_0, Y_1, IY_1, \dots, Y'_{2p-1}, IY'_{2p-1})$$

$$= (X_0, X'_0, Y_1, Y_2, \dots, Y'_{2p-1}, Y_{2p}) \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{c} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \varepsilon & \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \dots & 1 & \varepsilon' \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы перехода равен $(1/c)\varepsilon^n + \varepsilon'^p$; получаем результат указанный в лемме. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку лишь в случае $\varepsilon = \varepsilon' = 1$, $c > 0$ ориентация, определяемая структурой, совпадает со стандартной при всех значениях размерности n и p , то в дальнейшем мы ограничимся изучением только этих комплексных структур; соответствующий линейный эндоморфизм $\mathbf{p}$ будем обозначать $I_{a,c}$.

Пусть X_0, X'_0, Y_i, Y'_j , $i = 1, \dots, 2n$, $j = 1, \dots, 2p$, также обозначают соответствующие векторам X_0, X'_0, Y_i, Y'_j ковекторы, тогда на $\mathbf{p}$ может быть определена следующая внешняя инвариантная 2-форма:

$$\omega = tX_0 \wedge X'_0 + \lambda\pi^*(\omega_0) + \lambda'\pi^*(\omega'_0) = tX_0 \wedge X'_0 + \lambda \sum_{\nu=1}^n Y_{2\nu-1} \wedge Y_{2\nu} + \lambda' \sum_{\mu=1}^p Y'_{2\mu-1} \wedge Y'_{2\mu},$$

где ω_0 – внешняя инвариантная 2-форма на $\mathbb{CP}^n$, соответствующая метрике Фубини–Штуди и комплексной структуре J_1 , $t, \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, $t, \lambda, \lambda' > 0$. Эта форма определяет $U(n+1) \times U(p+1)$ -инвариантную 2-форму на $M \times M'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Почти комплексная структура J на многообразии M называется *положительно ассоциированной* с 2-формой ω , если

- 1) $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$ для всех $X, Y \in TM$,
- 2) $\omega(X, JX) > 0$ для всех ненулевых $X \in TM$.

ЛЕММА 4. Все комплексные структуры $I_{a,c}$ являются положительно ассоциированными с ω .

СЛЕДСТВИЕ. Каждой комплексной структуре $I_{a,c}$ можно поставить в соответствие трехпараметрическое семейство метрик по формуле

$$g_{\lambda, \lambda'; t}(X, Y) = \omega_{\lambda, \lambda'; t}(X, I_{a,c}Y).$$

Варьируя параметры a и c , получаем семейство метрик, зависящее от пяти параметров.

ЛЕММА 5. Множество инвариантных метрик на $M \times M'$ при $n \neq p$ исчерпывается семейством $g_{a,c, \lambda, \lambda'; t}$, где $c, \lambda, \lambda', t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G есть произвольная $\text{ad } \mathfrak{h}$ -инвариантная метрика на $M \times M'$. Тогда

$$G(X, X) = A, \quad G(X, X') = B, \quad G(X', X') = C, \quad G(Y_i, Y_i) = D, \quad G(Y'_j, Y'_j) = E, \\ i = 1, \dots, 2n, \quad j = 1, \dots, 2p, \quad A, D, E, AC - B^2 > 0.$$

Для других пар базисных векторов $G = 0$. Метрике G соответствует метрика полученного выше семейства, у которой

$$t = \sqrt{AC - B^2}, \quad a = -\frac{B}{A}, \quad c = \frac{\sqrt{AC - B^2}}{A}, \quad \lambda = D, \quad \lambda' = E.$$

3. Кривизна метрик семейства $g_{a,c,\lambda,\lambda';t}$. Вычисления для кривизны метрик данного семейства могут быть упрощены по следующим соображениям. Отображение

$$\pi: (M \times M', g_{a,c,\lambda,\lambda';t}) \longrightarrow (\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^p, \lambda g_0 \times \lambda' g'_0),$$

где g_0 – метрика Фубини–Штуди на $\mathbb{CP}^n$, является римановой субмерсией. Поэтому для вычисления кривизн метрик семейства можно использовать формулы О’Нейла (см., например, [3]). Так как речь идет об инвариантных метриках и комплексных структурах на однородном пространстве, то достаточно работать с соответствующими объектами на $T_o(M \times M') = \mathfrak{p}$. Если нет необходимости указывать значения параметров a, c, λ, λ' , будем обозначать метрику $g_{a,c,\lambda,\lambda';t}$ как g_t , а при $t = 1$ просто g . Ограничение метрики на слой будем обозначать $\hat{g}_t$ или $\hat{g}$ (при $t = 1$) и обозначим $\lambda g_0 \times \lambda' g'_0$ через $\check{g}$. В этих обозначениях имеем

$$g_t | \mathfrak{t} \times \mathfrak{t}' = t \hat{g}, \\ g_t | \mathfrak{k} \times \mathfrak{k}' = \check{g}, \\ g_t(\mathfrak{t} \times \mathfrak{t}', \mathfrak{k} \times \mathfrak{k}') = 0,$$

т.е. g_t является канонической вариацией римановой метрики g . Таким образом, достаточно произвести все вычисления для g , а потом перейти к g_t .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Инвариантная риманова связность для g на $M \times M'$ задается формулой*

$$D_X Y = \frac{1}{2} [X, Y]_{\mathfrak{p}} + U(X, Y),$$

где U – это симметричное билинейное отображение $U: \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$, задаваемое формулами

$$U(X_0, Y_{2\nu-1}) = \frac{2 - c\lambda}{2c\lambda} Y_{2\nu}, \quad U(X_0, Y_{2\nu}) = -\frac{2 - c\lambda}{2c\lambda} Y_{2\nu-1}, \\ U(X_0, Y'_{2\nu-1}) = -\frac{a}{c\lambda'} Y'_{2\nu}, \quad U(X_0, Y'_{2\nu}) = \frac{a}{c\lambda'} Y'_{2\nu-1}, \\ U(X'_0, Y_{2\nu-1}) = -\frac{a}{c\lambda} Y_{2\nu}, \quad U(X'_0, Y_{2\nu}) = \frac{a}{c\lambda} Y_{2\nu-1}, \\ U(X'_0, Y'_{2\nu-1}) = \left(\frac{a^2 + c^2}{c\lambda'} - \frac{1}{2} \right) Y'_{2\nu}, \quad U(X'_0, Y'_{2\nu}) = -\left(\frac{a^2 + c^2}{c\lambda'} - \frac{1}{2} \right) Y'_{2\nu-1}.$$

Для других базисных векторов X и Y выполнено $U(X, Y) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Находим U по формуле

$$2g(U(X, Y), Z) = g([Z, X]_{\mathfrak{p}}, Y) + g(X, [Z, Y]_{\mathfrak{p}}).$$

Для применения формул О'Нейла нам понадобятся тензорные поля на $M \times M'$, определенные формулами

$$T_{E_1} E_2 = \mathcal{H} D_{\mathcal{V} E_1} \mathcal{V} E_2 + \mathcal{V} D_{\mathcal{H} E_1} \mathcal{H} E_2, \quad A_{E_1} E_2 = \mathcal{H} D_{\mathcal{H} E_1} \mathcal{V} E_2 + \mathcal{V} D_{\mathcal{H} E_1} \mathcal{H} E_2,$$

где E_1, E_2 – векторные поля на $M \times M'$, $\mathcal{H}$ и $\mathcal{V}$ обозначают ортогональные проекции на горизонтальное $(T_x(\mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^p))$ и вертикальное $(T_x(T^2))$ подпространство соответственно.

ЛЕММА 6. *Имеют место следующие равенства:*

$$T \equiv 0,$$

$$A_{t \times t'} \mathfrak{k} \times \mathfrak{k}' = A_{t \times t'} t \times t' = 0,$$

$$A_{Y_{2\nu-1}} X_0 = \frac{1}{c\lambda} Y_{2\nu}, \quad A_{Y_{2\nu}} X_0 = -\frac{1}{c\lambda} Y_{2\nu-1},$$

$$A_{Y_{2\nu-1}} X'_0 = -\frac{a}{c\lambda} Y_{2\nu}, \quad A_{Y_{2\nu}} X'_0 = \frac{a}{c\lambda} Y_{2\nu-1},$$

$$A_{Y'_{2\mu-1}} X_0 = -\frac{a}{c\lambda'} Y'_{2\mu}, \quad A_{Y'_{2\mu}} X_0 = \frac{a}{c\lambda'} Y'_{2\mu-1},$$

$$A_{Y'_{2\mu-1}} X'_0 = \frac{a^2 + c^2}{c\lambda'} Y'_{2\mu}, \quad A_{Y'_{2\mu}} X'_0 = -\frac{a^2 + c^2}{c\lambda'} Y'_{2\mu-1},$$

$$A_{Y_{2\nu-1}} Y_{2\nu} = -A_{Y_{2\nu}} Y_{2\nu-1} = -X_0, \quad A_{Y'_{2\mu-1}} Y'_{2\mu} = -A_{Y'_{2\mu}} Y'_{2\mu-1} = -X'_0;$$

$$|A|^2 = \frac{2n}{c\lambda^2} + \frac{2p(a^2 + c^2)}{c\lambda'^2}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Четырехпараметрическое семейство метрик $g = g_{a,c,\lambda,\lambda';1}$ имеет следующие характеристики:*

1) кривизна Риччи:

$$\text{ric}(X_0, X_0) = 2 \left(\frac{n}{c^2 \lambda^2} + \frac{p a^2}{c^2 \lambda'^2} \right), \quad \text{ric}(X_0, X'_0) = -2 \frac{a}{c^2} \left(\frac{n}{\lambda^2} + \frac{p(a^2 + c^2)}{\lambda'^2} \right),$$

$$\text{ric}(X'_0, X'_0) = 2 \left(\frac{n a^2}{c^2 \lambda^2} + \frac{p(a^2 + c^2)^2}{c^2 \lambda'^2} \right),$$

$$\text{ric}(Y_i, Y_i) = 2 \left(1 + n - \frac{1}{c\lambda} \right), \quad i = 1, \dots, 2n,$$

$$\text{ric}(Y'_j, Y'_j) = 2 \left(1 + p - \frac{a^2 + c^2}{c\lambda} \right), \quad j = 1, \dots, 2p.$$

Собственные значения кривизны Риччи $\tilde{r}_i$ равны

$$\tilde{r}_{1,2} = \frac{x + y \pm \sqrt{(x - y^2 + 4z^2)}}{2},$$

zde

$$\begin{aligned}x &= 2 \left(\frac{n}{c^2 \lambda^2} + \frac{pa^2}{c^2 \lambda'^2} \right), & y &= 2 \left(\frac{na^2}{c^2 \lambda^2} + \frac{p(a^2 + c^2)^2}{c^2 \lambda'^2} \right), \\z &= -2 \frac{a}{c^2} \left(\frac{n}{\lambda^2} + \frac{p(a^2 + c^2)}{\lambda'^2} \right); \\ \tilde{r}_3 &= \tilde{r}_4 = \dots = \tilde{r}_{2n+2} = 2 \left(1 + n - \frac{1}{c\lambda} \right), \\ \tilde{r}_{2n+3} &= \tilde{r}_{2n+4} = \dots = \tilde{r}_{2n+2p+2} = 2 \left(1 + p - \frac{a^2 + c^2}{c\lambda'} \right).\end{aligned}$$

2) Скалярная кривизна:

$$s = \frac{4n}{\lambda} \left(1 + n - \frac{1}{2c\lambda} \right) + \frac{4p}{\lambda'} \left(1 + p - \frac{a^2 + c^2}{2c\lambda'} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Для вычисления кривизны Риччи применим формулы О'Нейла:

$$\begin{aligned}\text{ric}(U, V) &= \widehat{\text{ric}}(U, V) + \sum_{i=1}^{2n} (A_{1/\sqrt{\lambda}Y_i} U, A_{1/\sqrt{\lambda}Y_i} V) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{2p} (A_{1/\sqrt{\lambda}Y'_j} U, A_{1/\sqrt{\lambda}Y'_j} V), & U, V \in \mathfrak{t} \times \mathfrak{t}', \\ \text{ric}(X, Y) &= \check{\text{ric}}(X, Y) - 2 \sum_{i=1}^{2n} \left(A_X \frac{1}{\sqrt{\lambda}} Y_i, A_Y \frac{1}{\sqrt{\lambda}} Y_i \right) \\ &\quad - 2 \sum_{j=1}^{2p} \left(A_X \frac{1}{\sqrt{\lambda'}} Y'_j, A_Y \frac{1}{\sqrt{\lambda'}} Y'_j \right), & X, Y \in \mathfrak{k} \times \mathfrak{k}'.\end{aligned}$$

Применив формулу для кривизны Риччи инвариантной метрики [3]

$$\begin{aligned}\text{Ric}(X, X) &= -\frac{1}{2} \sum_i |[X, Z_i]_{\mathfrak{p}}|^2 - \frac{1}{2} \sum_i g([X, [X, Z_i]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}}, Z_i) \\ &\quad - \sum_i g([X, [X, Z_i]_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{p}}, Z_i) + \frac{1}{4} \sum_{i,j} g([Z_i, Z_j]_{\mathfrak{p}}, X)^2 - g([Z, X]_{\mathfrak{p}}, X),\end{aligned}$$

где $Z = \sum_i U(Z_i, Z_i)$ и Z_i — это ортонормированный базис пространства $(\mathfrak{p}, g)$, получаем

$$\widehat{\text{ric}} \equiv 0, \quad \check{\text{ric}}(Y_i, Y_i) = 2(n+1), \quad \check{\text{ric}}(Y'_i, Y'_i) = 2(p+1).$$

2) Скалярная кривизна может быть вычислена по формуле

$$s = \check{s} \circ \pi - |A|^2.$$

СЛЕДСТВИЕ. Для канонической вариации g_t кривизна Риччи ric_t принимает следующие значения:

$$\begin{aligned}\text{ric}_t(U, V) &= t^2 \text{ric}(U, V), & U, V \in \mathfrak{t} \times \mathfrak{t}', \\ \text{ric}_t(Y_i, Y_i) &= 2(n+1) - \frac{2t}{c\lambda}, & i = 1, \dots, 2n, \\ \text{ric}_t(Y'_i, Y'_i) &= 2(p+1) - \frac{2t(a^2 + c^2)}{c\lambda'}, & i = 1, \dots, 2p.\end{aligned}$$

Скалярная кривизна выражается формулой

$$s_t = \frac{4n}{\lambda} \left(1 + n - \frac{t}{2c\lambda} \right) + \frac{4p}{\lambda'} \left(1 + p - \frac{(a^2 + c^2)t}{2c\lambda'} \right).$$

Используем бивекторы для вычисления секционной кривизны. Пусть $Z_0, \dots, Z_{2n+2m+1}$ — это ортонормальный относительно g_t базис $\mathfrak{p}$, а именно,

$$\begin{aligned}Z_0 &= \sqrt{\frac{c}{t}} X_0, & Z_i &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} Y_i, & i &= 1, \dots, 2n, \\ Z_{2n+1} &= \frac{a}{\sqrt{ct}} X_0 + \frac{1}{\sqrt{ct}} X'_0, & Z_{2n+1+j} &= \frac{1}{\sqrt{\lambda'}} Y'_j, & j &= 1, \dots, 2p.\end{aligned}$$

Пусть $B_{\nu\mu} = Z_\nu \wedge Z_\mu$ — это базис пространства бивекторов.

Определим

$$R_{(\alpha\nu)(\rho\mu)} = g_t(R(Z_\alpha, Z_\nu)Z_\mu, Z_\rho),$$

где R обозначает тензор кривизны Римана, также R будет обозначать матрицу размера

$$\frac{m(m+1)}{2} \times \frac{m(m+1)}{2}$$

$(m(m+1)/2)$ — это размерность пространства бивекторов) с элементом $R_{(\alpha\nu)(\rho\mu)}$ на месте с номером $((\alpha\nu)(\rho\mu))$, где $\alpha < \nu$ и $\rho < \mu$.

Так как кривизна полилинейна, то секционная кривизна в направлении единичного бивектора B вычисляется по формуле

$$K(B) = \langle R \cdot B^T, B \rangle_t,$$

где

B^T — это вектор-столбец, который состоит из координат бивектора B , $R \cdot B^T$ — это матричное произведение,

$\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ — это скалярное произведение в пространстве бивекторов, относительно которого базис $Z_i \wedge Z_j$, $0 \leq i < j \leq 2n + 2p + 1$, ортонормирован.

Вычислим некоторые компоненты матрицы оператора кривизны R пространства $(M \times M', g)$.

ЛЕММА 7. *Имеют место следующие равенства:*

$$R_{(0\nu)(\rho\mu)} = \begin{cases} \frac{t}{c\lambda^2}, & \rho = 0, \quad \nu = \mu = 1, \dots, 2n, \\ \frac{a^2 t}{c\lambda'^2}, & \rho = 0, \quad \nu = \mu = 2n+2, \dots, 2n+2p+1, \\ -\frac{at}{\lambda'^2}, & \rho = 2n+1, \quad \nu = \mu = 2n+2, \dots, 2n+2p+1, \\ 0, & \text{для других } \nu, \rho, \mu. \end{cases}$$

$$R_{(2n+1\nu)(\rho\mu)} = \begin{cases} -\frac{at}{\lambda'^2}, & \rho = 0, \quad \nu = \mu = 2n+2, \dots, 2n+2p+1, \\ \frac{ct}{\lambda'^2}, & \rho = 2n+1, \quad \nu = \mu = 2n+2, \dots, 2n+2p+1, \\ 0, & \text{для других } \nu, \rho, \mu. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим $R_{(0\nu)(\rho\mu)}$. По определению

$$R_{(0\nu)(\rho\mu)} = g_t(R(Z_0, Z_\nu)Z_\rho, Z_\mu) = \sqrt{\frac{c}{t}} g_t(R(X, Z_\nu)Z_\rho, Z_\mu).$$

Применим соответствующие формулы О'Нейла:

$$g_t(R(U, V)W, W') = g_t(\widehat{R}(U, V)W, W') - g_t(T_U^t W, T_V^t W') + g_t(T_V^t W, T_U^t W') = 0$$

для $U, V, W, W' \in \mathfrak{t} \times \mathfrak{t}'$,

$$g_t(R(U, V)W, X) = g_t((D_V^t T^t)_U W, X) - g_t((D_U^t T^t)_V W, X) = 0$$

для $U, V, W \in \mathfrak{t} \times \mathfrak{t}'$, $X \in \mathfrak{k} \times \mathfrak{k}'$,

$$\begin{aligned} g_t(R(X, U)Y, V) &= g_t((D_X^t T^t)_U V, Y) - g_t(T_U^t X, T_V^t Y) \\ &\quad + g_t((D_U^t A^t)_X Y, V) + g_t(A_X^t U, A_Y^t V) \\ &= tg(-A_{tD_U X} Y, V) + tg(-A_X tD_U Y, V) + g(tA_X U, tA_Y V), \end{aligned}$$

для $X, Y \in \mathfrak{k} \times \mathfrak{k}'$, $U, V \in \mathfrak{t} \times \mathfrak{t}'$. Применяя последнюю формулу к соответствующим базисным векторам, получаем результат леммы.

Пусть B – разложимый бивектор с координатами $(b_{01}, \dots, b_{2n+2p2n+2p+1})$ в базисе $Z_\nu \wedge Z_\mu$. Разложим B в следующую сумму:

$$B = B' + B'',$$

где

$$B' = \sum_{i=1}^{2n} b_{0i} Z_0 \wedge Z_i + \sum_{i=2n+2}^{2n+2p+1} b_{0i} Z_0 \wedge Z_i + \sum_{i=2n+2}^{2n+2p+1} b_{2n+1i} Z_{2n+1} \wedge Z_i, \quad B'' = B - B'.$$

В силу леммы 7 имеем

$$K(B) = \langle R \cdot B^T, B \rangle_t = \langle R \cdot B'^T, B' \rangle_t + \langle R \cdot B''^T, B'' \rangle_t.$$

Если представить B' в виде суммы

$$B' = B'_1 + B'_2 + B'_3,$$

где

$$B'_1 = \sum_{i=1}^{2n} b_{0i} Z_0 \wedge Z_i, \quad B'_2 = \sum_{i=2n+2}^{2n+2p+1} b_{0i} Z_0 \wedge Z_i, \quad B'_3 = \sum_{i=2n+2}^{2n+2p+1} b_{2n+1i} Z_{2n+1} \wedge Z_i,$$

то получим

$$\begin{aligned} K(B) &= \frac{t}{c\lambda^2} \|B'_1\|^2 + \frac{a^2 t}{c\lambda'^2} \|B'_2\|^2 + \frac{ct}{\lambda'^2} \|B'_3\|^2 \\ &\quad - 2 \frac{at}{\lambda'^2} \sum_{i=1}^p b_{02n+1+i} b_{2n+12n+1+i} + \langle R \cdot B''^T, B'' \rangle_t. \end{aligned}$$

ЛЕММА 8. *Имеют место формулы*

$$R_{(2l-12l)(2n+2m2n+2m+1)} = \frac{2at}{c\lambda\lambda'},$$

$$R_{(\alpha\nu)(\rho\mu)} = 0$$

для других $\alpha, \nu = 1, \dots, 2n$, $\rho, \mu = 2n+2, \dots, 2n+2p+1$,

$$\begin{aligned} R_{(2l-12n+2m)(2l2n+2m+1)} &= \frac{at}{c\lambda\lambda'}, & R_{(2l2n+2m)(2l-12n+2m+1)} &= -\frac{at}{c\lambda\lambda'}, \\ R_{(2l-12n+2m+1)(2l2n+2m)} &= -\frac{at}{c\lambda\lambda'}, & R_{(2l2n+2m+1)(2l-12n+2m)} &= \frac{at}{c\lambda\lambda'}, \end{aligned}$$

$$R_{(\alpha\nu)(\rho\mu)} = 0$$

для других значений $\alpha, \rho = 1, \dots, 2n$, $\nu, \mu = 2n+2, \dots, 2n+2p+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим формулу О'Нейла. Имеем

$$\begin{aligned} g_t(R(X, Y)Z, Z') &= g_t(\check{R}(X, Y)Z, Z') - 2g_t(A_X^t Y, A_Z^t Z') \\ &\quad + g_t(A_Y^t Z, A_X^t Z') - g_t(A_X^t Z, A_Y^t Z') \\ &= -2tg(A_X Y, A_Z Z') + tg(A_Y Z, A_X Z') - tg(A_X Z, A_Y Z'). \end{aligned}$$

В смешанных направлениях, т.е. таких, где два вектора принадлежат $\{0\} \times \mathfrak{k}'$ и два принадлежат $\mathfrak{k} \times \{0\}$, кривизна $g_t(\check{R}(X, Y)Z, Z')$ принимает нулевое значение. Разложим B'' в сумму трех бивекторов:

$$B'' = B''_1 + B''_2 + B''_3,$$

где

B_1'' – это бивектор с ненулевыми координатами b_{ij} , $i = 1, \dots, 2n$, $j = 2n + 2, \dots, 2n + 2p + 1$,

B_2'' – это бивектор с ненулевыми координатами b_{ij} , $i, j = 1, \dots, 2n$,

B_3'' – это бивектор с ненулевыми координатами b_{ij} , $i, j = 2n + 2, \dots, 2n + 2p + 1$.

Тогда по результатам леммы 8 имеем

$$\begin{aligned} \langle R \cdot B''^T, B'' \rangle_t &= \langle R \cdot B_1''^T, B_1'' \rangle_t + \langle R \cdot B_2''^T, B_3'' \rangle_t \\ &\quad + \langle R \cdot B_3''^T, B_2'' \rangle_t + \langle R \cdot B_2''^T, B_2'' \rangle_t + \langle R \cdot B_3''^T, B_3'' \rangle_t \\ &= 2 \frac{at}{c\lambda\lambda'} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p (b_{2l-12n+2m} b_{2l2n+2m+1} - b_{2l2n+2m} b_{2l-12n+2m+1}) \\ &\quad + 4 \frac{at}{c\lambda\lambda'} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p b_{2l-12l} b_{2n+2m2n+2m+1} \\ &\quad + \langle R \cdot B_2''^T, B_2'' \rangle_t + \langle R \cdot B_3''^T, B_3'' \rangle_t. \end{aligned}$$

Значение $\langle R \cdot B_2''^T, B_2'' \rangle_t = K(B_2'')$ и $\langle R \cdot B_3''^T, B_3'' \rangle_t = K(B_3'')$. Используя результаты работы Вольпера [4], получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \min \left(4 - \frac{3t}{c\lambda}, 1 \right) \|B_2''\|^2 &\leq K(B_2'') \leq \frac{1}{\lambda} \max \left(4 - \frac{3t}{c\lambda}, 1 \right) \|B_2''\|^2, \\ \frac{1}{\lambda'} \min \left(4 - \frac{3(a^2 + c^2)t}{c\lambda'}, 1 \right) \|B_3''\|^2 &\leq K(B_3'') \leq \frac{1}{\lambda'} \max \left(4 - \frac{3(a^2 + c^2)t}{c\lambda'}, 1 \right) \|B_3''\|^2. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА. Для секционной кривизны K произвольной инвариантной метрики $g_{a,c,\lambda,\lambda';t}$ на $M \times M'$ выполнено следующее неравенство:

$$K_{\min} \leq K \leq K_{\max},$$

где

$$\begin{aligned} K_{\min} &= \min \left(-\frac{|a|t}{c\lambda\lambda'}, \frac{c(\lambda m_2 + \lambda' m_1) - \sqrt{c^2(\lambda' m_1 - \lambda m_2)^2 + 16a^2 t^2}}{2c\lambda\lambda'} \right), \\ m_1 &= \min \left(4 - \frac{3t}{c\lambda}, 1 \right), \quad m_2 = \min \left(4 - 3 \frac{(a^2 + c^2)t}{c\lambda'}, 1 \right), \\ K_{\max} &= \max \left(\frac{t}{c\lambda^2}, \frac{(a^2 + c^2)t}{c\lambda'^2}, \frac{|a|t}{c\lambda\lambda'}, \frac{c(\lambda m_2 + \lambda' m_1) + \sqrt{c^2(\lambda' m_1 - \lambda m_2)^2 + 16a^2 t^2}}{2c\lambda\lambda'} \right), \\ m_1 &= \max \left(4 - \frac{3t}{c\lambda}, 1 \right), \quad m_2 = \max \left(4 - 3 \frac{(a^2 + c^2)t}{c\lambda'}, 1 \right), \end{aligned}$$

где $c, \lambda, \lambda', t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно результатам, изложенным выше, имеем

$$K' \leq K \leq K'',$$

где

$$\begin{aligned}
 K' &= \frac{1}{\lambda} \min \left(4 - \frac{3t}{c\lambda}, 1 \right) \|B_2''\|^2 + \frac{1}{\lambda'} \min \left(4 - 3 \frac{(a^2 + c^2)t}{c\lambda'}, 1 \right) \|B_3''\|^2 + \frac{t}{c\lambda^2} \|B_1'\|^2 \\
 &\quad + \frac{a^2 t}{c\lambda'^2} \|B_2'\|^2 + \frac{ct}{\lambda'^2} \|B_3'\|^2 - 2 \frac{at}{\lambda'^2} \sum_{m=1}^p b_{2n+12n+1+m} b_{02n+1+m} \\
 &\quad + 4 \frac{at}{c\lambda\lambda'} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p b_{2l-12l} b_{2n+2m2n+2m+1} \\
 &\quad + 2 \frac{at}{c\lambda\lambda'} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p (b_{2l-12n+2m} b_{2l2n+2m+1} - b_{2l2n+2m} b_{2l-12n+2m+1}), \\
 K'' &= \frac{1}{\lambda} \max \left(4 - \frac{3t}{c\lambda}, 1 \right) \|B_2''\|^2 + \frac{1}{\lambda'} \max \left(4 - 3 \frac{(a^2 + c^2)t}{c\lambda'}, 1 \right) \|B_3''\|^2 + \frac{t}{c\lambda^2} \|B_1'\|^2 \\
 &\quad + \frac{a^2 t}{c\lambda'^2} \|B_2'\|^2 + \frac{ct}{\lambda'^2} \|B_3'\|^2 - 2 \frac{at}{\lambda'^2} \sum_{m=1}^p b_{2n+12n+1+m} b_{02n+1+m} \\
 &\quad + 4 \frac{at}{c\lambda\lambda'} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p b_{2l-12l} b_{2n+2m2n+2m+1} \\
 &\quad + 2 \frac{at}{c\lambda\lambda'} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p (b_{2l-12n+2m} b_{2l2n+2m+1} - b_{2l2n+2m} b_{2l-12n+2m+1}).
 \end{aligned}$$

Учитывая условие $\|B\| = 1$ и решая задачу на условный экстремум функции $K'(B)$, получаем

$$\begin{aligned}
 K_{\min} &= \min_{\|B\|=1} K'(B) \\
 &= \min \left(\frac{c(\lambda m_2 + \lambda' m_1) - \sqrt{c^2(\lambda m_1 - \lambda' m_2)^2 + 16a^2 t^2}}{2c\lambda\lambda'}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{(a^2 + c^2)t}{c\lambda'^2}, \frac{t}{c\lambda^2}, -\frac{|a|t}{c\lambda\lambda'}, 0, \frac{1}{\lambda} m_1, \frac{1}{\lambda'} m_2 \right) \\
 &= \min \left(-\frac{|a|t}{c\lambda\lambda'}, \frac{c(\lambda m_2 + \lambda' m_1) - \sqrt{c^2(\lambda' m_1 - \lambda m_2)^2 + 16a^2 t^2}}{2c\lambda\lambda'} \right),
 \end{aligned}$$

где

$$m_1 = \min \left(4 - \frac{3t}{c\lambda}, 1 \right), \quad m_2 = \min \left(4 - 3 \frac{(a^2 + c^2)t}{c\lambda'}, 1 \right).$$

Аналогично вычисляем $K_{\max} = \max_{\|B\|=1} K''(B)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned}
 \min \left(4 - \frac{3t}{c\lambda}, 1 \right) &= \begin{cases} 4 - \frac{3t}{c\lambda}, & c\lambda < t, \\ 1, & c\lambda \geq t, \end{cases} \\
 \min \left(4 - 3 \frac{(a^2 + c^2)t}{c\lambda'}, 1 \right) &= \begin{cases} 1, & a^2 + \left(c - \frac{\lambda'}{2t} \right)^2 \leq \frac{\lambda'^2}{4t^2}, \\ 4 - 3 \frac{(a^2 + c^2)t}{c\lambda'}, & a^2 + \left(c - \frac{\lambda'}{2t} \right)^2 > \frac{\lambda'^2}{4t^2}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. Метрики $g_{a,c,\lambda,\lambda';t}$, для которых $(a, c, \lambda, \lambda'; t) \in U \subset \mathbb{R}^5$, где

$$U = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4 \cup U_5 \cup U_6 \cup U_7 \cup U_8 \cup U_9,$$

$$U_1 = \left\{ \left(0, \sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}}, \lambda, \lambda'; \frac{4}{3}\sqrt{\lambda\lambda'} \right) \in \mathbb{R}^5 : \lambda, \lambda' > 0 \right\},$$

$$U_2 = \left\{ (0, c, \lambda, \lambda'; t) \in \mathbb{R}^5 : \lambda, \lambda', t > 0; \lambda' \leq \frac{\lambda}{2}; \right. \\ \left. \sqrt{\frac{\lambda'^2 + 4\lambda\lambda'}{3}} \leq t < \frac{2(\lambda + \lambda')}{3}; \frac{\lambda'}{t} \leq c < c_2 \right\},$$

$$U_3 = \left\{ (0, c, \lambda, \lambda'; t) \in \mathbb{R}^5 : \lambda, \lambda', t > 0; \frac{\lambda}{2} < \lambda' \leq \lambda; \right. \\ \left. \sqrt{\frac{\lambda^2 + 4\lambda\lambda'}{3}} \leq t < \frac{2(\lambda + \lambda')}{3}; c_1 < c < c_2 \right\},$$

$$U_4 = \left\{ (0, c, \lambda, \lambda'; t) \in \mathbb{R}^5 : \lambda, \lambda', t > 0; \frac{\lambda}{2} < \lambda' \leq \lambda; \right. \\ \left. \sqrt{\frac{\lambda'^2 + 4\lambda\lambda'}{3}} < t \leq \sqrt{\frac{\lambda^2 + 4\lambda\lambda'}{3}}; \frac{\lambda'}{t} \leq c < c_2 \right\},$$

$$U_5 = \left\{ (0, c, \lambda, \lambda'; t) \in \mathbb{R}^5 : \lambda, \lambda', t > 0; \lambda < \lambda', \lambda' \neq 2\lambda; \right. \\ \left. \sqrt{\frac{\lambda'^2 + 4\lambda\lambda'}{3}} \leq t < \frac{2(\lambda + \lambda')}{3}; c_1 < c < c_2 \right\},$$

$$U_6 = \left\{ (0, c, \lambda, \lambda'; t) \in \mathbb{R}^5 : \lambda, \lambda', t > 0; \lambda\lambda' \geq t^2; \frac{3t\lambda'}{\lambda^2 + 4\lambda\lambda'} < c \leq \frac{t}{\lambda} \right\},$$

$$U_7 = \left\{ (0, c, \lambda, \lambda'; t) \in \mathbb{R}^5 : \lambda, \lambda', t > 0; \lambda\lambda' \leq t^2 \leq \frac{\lambda^2 + 4\lambda\lambda'}{3}; \frac{3t\lambda'}{\lambda^2 + 4\lambda\lambda'} < c \leq \frac{\lambda'}{t} \right\},$$

$$U_8 = \left\{ (0, c, \lambda, \lambda'; t) \in \mathbb{R}^5 : \lambda, \lambda', t > 0; \lambda\lambda' \leq t^2 \leq \frac{\lambda'^2 + 4\lambda\lambda'}{3}; \frac{t}{\lambda} \leq c < \frac{\lambda'^2 + 4\lambda'\lambda}{3t\lambda} \right\},$$

$$U_9 = \left\{ (0, c, \lambda, \lambda'; t) \in \mathbb{R}^5 : \lambda, \lambda', t > 0; \lambda\lambda' \geq t^2; \frac{t}{\lambda} \leq c \leq \frac{\lambda'}{t} \right\},$$

где

$$c_1 = \frac{2\lambda'(\lambda' + \lambda) - \lambda'\sqrt{4(\lambda' + \lambda)^2 - 9t^2}}{3t\lambda}, \\ c_2 = \frac{2\lambda'(\lambda' + \lambda) + \lambda'\sqrt{4(\lambda' + \lambda)^2 - 9t^2}}{3t\lambda},$$

описывают множество инвариантных метрик неотрицательной кривизны на $M \times M'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $K_{\min} \leq 0$, причем равенство имеет место в том и только том случае, если

$$\begin{cases} \frac{c(\lambda'm_1 + \lambda m_2) - \sqrt{c^2(\lambda'm_1 - \lambda m_2)^2 + 16a^2t^2}}{2c\lambda\lambda'} \geq 0, \\ a = 0. \end{cases}$$

Данная система имеет решения

$$\begin{cases} \lambda' m_1 + \lambda m_2 = 0, \\ \lambda' m_1 - \lambda m_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

или

$$\lambda' m_1 + \lambda m_2 \geq 0. \quad (**)$$

Относительно значений m_1 и m_2 возможны четыре случая:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \begin{cases} m_1 = 4 - \frac{3t}{c\lambda}, \\ m_2 = 4 - \frac{3tc}{\lambda'}; \end{cases} & \text{II.} & \begin{cases} m_1 = 4 - \frac{3t}{c\lambda}, \\ m_2 = 1; \end{cases} \\ \text{III.} & \begin{cases} m_1 = 1, \\ m_2 = 4 - \frac{3tc}{\lambda'}; \end{cases} & \text{IV.} & \begin{cases} m_1 = 1, \\ m_2 = 1. \end{cases} \end{array}$$

I. Условие

$$\begin{cases} m_1 = 4 - \frac{3t}{c\lambda}, \\ m_2 = 4 - \frac{3tc}{\lambda'} \end{cases}$$

равносильно

$$\begin{cases} t^2 \geq \lambda\lambda', \\ \frac{\lambda'}{t} \leq c \leq \frac{t}{\lambda}. \end{cases}$$

Условие $(*)$ дает множество U_1 . Условие $(**)$ выполняется, если и только если

$$3t\lambda^2 c^2 - 4\lambda\lambda'(\lambda + \lambda')c + 3t\lambda'^2 < 0.$$

В результате получаем множества U_2, U_3, U_4, U_5 .

II. Условие

$$\begin{cases} m_1 = 4 - \frac{3t}{c\lambda}, \\ m_2 = 1 \end{cases}$$

равносильно

$$\begin{cases} c \leq \frac{t}{\lambda}, \\ c \leq \frac{\lambda'}{t}. \end{cases}$$

Условие $(*)$ не выполняется, $(**)$ имеет место при $c > 3t\lambda'/(\lambda^2 + 4\lambda\lambda')$; получаем множества U_6, U_7 .

III. Условие

$$\begin{cases} m_1 = 1, \\ m_2 = 4 - \frac{3tc}{\lambda'} \end{cases}$$

равносильно

$$\begin{cases} c \geq \frac{t}{\lambda}, \\ \frac{t}{\lambda} \leq c \leq \frac{\lambda'}{t}. \end{cases}$$

Условие (*) не выполняется, а условие (**) выполняется, если и только если $c < (\lambda'^2 + 4\lambda\lambda')/(3t\lambda)$; получаем множество U_8 .

IV. Случай имеет место при

$$\begin{cases} t^2 \leq \lambda\lambda', \\ \frac{t}{\lambda} \leq c \leq \frac{\lambda'}{t}. \end{cases}$$

Условие (**) выполняется на всем этом множестве, обозначим его U_9 .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Секционная кривизна $K(B)$ принимает значение $t/(c\lambda^2)$ на бивекторе

$$B = \sqrt{\frac{c}{t\lambda}} X_0 \wedge Y_i, \quad i = 1, \dots, 2n.$$

Далее, $K(B) = (a^2 + c^2)t/(c\lambda'^2)$ на бивекторе

$$B = \sqrt{\frac{ct}{(a^2 + c^2)\lambda'}} X'_0 \wedge Y'_i,$$

$K(B) = \pm at/(c\lambda\lambda')$ на бивекторе

$$\frac{1}{\sqrt{2\lambda\lambda'}} (Y_{2l-1} \wedge Y'_{2m-1} \pm Y_{2l} \wedge Y'_{2m}).$$

Далее,

$$K(B) = \frac{(\lambda'm_1 + \lambda m_2)c \pm \sqrt{(\lambda'm_1 - \lambda m_2)^2 c^2 + 16a^2 t^2}}{2c\lambda\lambda'} = h,$$

где $m_1 = 4 - 3t/(c\lambda)$ или $m_1 = 1$ и $m_2 = 4 - 3(a^2 + c^2)t/(c\lambda')$ или $m_2 = 1$ на бивекторе

$$B = \frac{1}{\sqrt{4a^2 t^2 + c^2 \lambda'^2 (m_1 - h\lambda)^2}} \left(2 \frac{at}{\lambda} Y_{2\nu-1} \wedge Y_{2\nu} + \frac{c\lambda'(h\lambda - m_1)}{\lambda'} Y'_{2m-1} \wedge Y'_{2m} \right).$$

4. Экстремальные значения скалярной кривизны $s(a, c, \lambda, \lambda')$. На семействе метрик g определен функционал скалярной кривизны

$$s(g) = \frac{4n}{\lambda} \left(1 + n - \frac{1}{2c\lambda} \right) + \frac{4p}{\lambda'} \left(1 + p - \frac{a^2 + c^2}{2c\lambda'} \right).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если n или p принимает нулевое значение, то среди метрик $g_{a,c,\lambda,\lambda'}$ на $M \times M'$ нет метрики с эрмитовым тензором Риччи. Если n и p не равны нулю, то метрика $g_{a,c,\lambda,\lambda'}$, при

$$a = 0, \quad c = \sqrt{\frac{p(p+1)^2}{n(n+1)^2}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{n}{p(p+1)^2}}, \quad \lambda' = \sqrt{\frac{p}{n(n+1)^2}}$$

имеет $I_{a,c,\lambda,\lambda'}$ -эрмитов тензор Риччи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Частная производная скалярной кривизны по переменной a равна

$$\frac{1}{4} \frac{\partial s}{\partial a} = -\frac{p}{\lambda'} \frac{a}{c\lambda'}.$$

Она равна нулю при $a = 0$ или $p = 0$.

1. Пусть $a = 0$. Имеем, далее,

$$\frac{1}{4} \frac{\partial s}{\partial c} = \frac{n}{2c^2\lambda^2} - \frac{p}{2\lambda'^2}.$$

Эта величина равна нулю при $c = \sqrt{n/p}(\lambda'/\lambda)$, $p \neq 0$. Далее,

$$\frac{1}{4} \frac{\partial s}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda^2} \left(-n - 1 + \frac{1}{c\lambda} \right), \quad \frac{1}{4} \frac{\partial s}{\partial \lambda'} = \frac{p}{\lambda'^2} \left(-p - 1 + \frac{c}{\lambda'} \right).$$

Приравнявая к нулю обе производные, получаем

$$\lambda = \sqrt{\frac{n}{p(p+1)^2}}, \quad \lambda' = \sqrt{\frac{p}{n(n+1)^2}}, \quad c = \sqrt{\frac{p(p+1)^2}{n(n+1)^2}}.$$

Метрика, полученная при таких значениях дает максимум скалярной кривизны, равный $4\sqrt{np}(n+1)(p+1)$. Непосредственная проверка показывает, что это метрика с эрмитовым тензором Риччи.

2. При $p = 0$ частная производная по c может быть равна нулю только при $n = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При условии на объем, а именно при $t^2\lambda^{2n}\lambda'^{2p} = 1$, экстремальные значения скалярной кривизны s_t дают метрику Эйнштейна.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Скалярная кривизна s_t не имеет точек экстремума на множестве $\{(a, c, \lambda, \lambda', t) \in \mathbb{R}^5 : c, \lambda, \lambda', t > 0\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если зафиксировать значения λ и λ' , то экстремальное значение для s даст метрику $g_{a,c,\lambda,\lambda';1}$ с $I_{a,c}$ -эрмитовым тензором Риччи. Таким образом, в семействе метрик $g_{a,c,\lambda,\lambda';1}$ выделяется двупараметрическое семейство метрик $g_{0,\sqrt{n/p}\lambda'/\lambda,\lambda,\lambda'}$ с указанным свойством.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Случай $\lambda = \lambda' = t = 1$ канонической формы ω заслуживает отдельного внимания. Каждой комплексной структуре $I_{a,c}$ соответствует единственная метрика $g_{a,c}$. Экстремальное значение скалярной кривизны появляется при $a = 0$ и $c = \sqrt{n/p}$ и дает метрику с эрмитовым тензором Риччи.

Автор выражает благодарность Д. В. Алексеевскому, беседа с которым способствовала углублению содержания данной статьи, а также Н. К. Смоленцеву за поддержку и плодотворные дискуссии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Calabi, B. Eckmann, "A class of compact complex manifolds which are not algebraic", *Ann. of Math.* (2), **58** (1953), 494–500.
- [2] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. 2, Наука, М., 1981.
- [3] А. Бессе, *Многообразия Эйнштейна*, т. 1, Мир, М., 1990.
- [4] Д. Е. Вольпер, *Секционные кривизны однородных метрик на сферах и проективных пространствах*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Омск, 1996.

Н. А. Даурцева

Кемеровский государственный университет

E-mail: natali0112@ngs.ru

Поступило

19.04.2004