Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Данилов, Г. А. Кошевой, Существование неподвижных точек для отображений конечных множеств, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 2, 201–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3791>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 06:50:09

УДК 519.1

Существование неподвижных точек для отображений конечных множеств

В. И. Данилов, Г. А. Кошевой

Мы показываем, что для “выпуклого” конечного множества X и “непрерывного” векторного поля (отображения в себя), направленного внутрь X , имеют место теорема о существовании нулевых точек векторного поля (неподвижной точки отображения). Главное – правильно сформулировать понятия “непрерывности” и “выпуклости”. Оба эти понятия мы формализуем с помощью рефлексивного и симметричного бинарного отношения на X , отношения близости. Непрерывность (мы называем это плавностью) формулируется относительно любого отношения близости, дополнительное требование на близость (мы называем это ацикличностью) превращает X в “выпуклое” множество. Если эти два требования выполнены, то существует нуль векторного поля (или неподвижная точка).

Библиография: 3 названия.

В случае выпуклых компактных множеств K имеются два близких результата существования. Первый утверждает существование нулей у непрерывного (и направленного внутрь) векторного поля на K . Второй – существование неподвижных точек непрерывного отображения K в себя. Мы показываем, что похожие результаты верны и в том случае, когда X – конечное “выпуклоподобное” подмножество. Конечно, тут важно правильно сформулировать понятие “непрерывности”.

Эта работа была инициирована недавней статьей Иимура [1]. В ней приводится формулировка утверждения подобного типа и применение его к вопросу о существовании экономических равновесий с неделимыми товарами и к вопросу о существовании равновесий Нэша в некооперативных играх. Однако приведенное доказательство содержало ошибку; позже в [2] был построен контрпример. В настоящей работе мы приводим общую формулировку теоремы существования нулевых точек, основанную на понятии “близости” на X . В терминах близости мы формулируем как “непрерывность” (мы называем это плавностью) векторного поля, так и требование “выпукло-подобности” (мы называем это ацикличностью). Если эти два требования выполнены, то существует нуль векторного поля (или неподвижная точка отображения). В ситуации, когда X состоит из целых точек в $\mathbb{R}^n$, мы получаем правильный вариант теоремы Иимура (другим способом доказанный в [2]).

Работа выполнена при частичной поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-1939.2003.6). Второй автор выражает также благодарность за поддержку российско-французской лаборатории ЛИФР МИ²Ф.

1. Выпуклый случай. В дальнейшем V означает конечномерное вещественное векторное пространство. Говоря о топологии, мы всюду имеем в виду каноническую топологию на V .

Классическим утверждением о неподвижной точке является теорема Брауэра.

ТЕОРЕМА 1. Пусть K – выпуклый непустой компакт в V и f – непрерывное отображение K в себя. Тогда существует точка $x^* \in K$ такая, что $f(x^*) = x^*$.

Близким является утверждение о нулях векторных полей. Векторным полем будем называть отображение в V . Например, если f – отображение K в себя, то $v(x) = f(x) - x$ задает векторное поле на K , непрерывное для непрерывного f . Заметим также, что это векторное поле направлено “внутрь” K . Чтобы придать этому точный смысл, введем понятие касательного конуса.

Пусть K – выпуклое подмножество V и x – точка K . Вектор $v \in V$ называется касательным к K в точке x , если точка $x + tv$ принадлежит K для некоторого $t > 0$. Множество всех касательных векторов обозначается $\text{Con}(K, x)$. Это выпуклый, хотя не всегда замкнутый конус. Заметим, что если точка x принадлежит относительной внутренности K , то $\text{Con}(K, x)$ превращается в касательное пространство $\mathbb{R}(K - x)$.

Для дальнейшего нам понадобится следующая простая

ЛЕММА. Если точка z является нетривиальной выпуклой смесью точек x и y из K , тогда $\text{Con}(K, x) \cup \text{Con}(K, y) \subset \text{Con}(K, z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вектор v принадлежит $\text{Con}(K, x)$. Это значит, что $v = t(x' - x)$, где $t \geq 0$, $x' \in K$. Далее, $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$, $0 < \alpha < 1$. Рассмотрим точку $z' = \alpha x' + (1 - \alpha)y$; она тоже в K . Поэтому разность $w = z' - z = \alpha(x' - x)$ принадлежит $\text{Con}(K, z)$. Осталось заметить, что $v = tw/\alpha$.

Векторное поле v на K направлено внутрь, если $v(x) \in \text{Con}(K, x)$ для любого $x \in K$.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть K – непустое выпуклое компактное подмножество в V и v – непрерывное и направленное внутрь векторное поле на K . Тогда существует точка x^* такая, что $v(x^*) = 0$.

Эти две теоремы легко сводятся одна к другой. Теорема 1 очевидно вытекает из теоремы 1'. Чтобы показать обратное, воспользуемся следующей вспомогательной конструкцией. Снабдим V структурой евклидова пространства, и пусть B – замкнутый шар в V , содержащий K . Пусть $r: B \rightarrow K$ – ретракция, сопоставляющая точке b из B ближайшую к ней точку $r(b)$ из K . Очевидно, что r – непрерывное (и даже липшицево) отображение. Теперь рассмотрим отображение $g: K \rightarrow K$, $g(x) = r(x + v(x))$. Это непрерывное отображение, и для него существует неподвижная точка x^* . Это значит, что точка x^* – ближайшая из K к $x^* + v(x^*)$. В частности, скалярное произведение $(v(x), w) \leq 0$ для любого w из касательного конуса $\text{Con}(K, x^*)$. Так как вектор $v(x)$ также принадлежит этому касательному конусу, то $(v(x^*), v(x^*)) \leq 0$, откуда $v(x^*) = 0$.

В дальнейшем нам будет нужен “многозначный” вариант теоремы 1'.

ТЕОРЕМА 1''. Пусть M – компактное метрическое пространство и $p: M \rightarrow K$ – сюръективное непрерывное отображение, все слои которого $p^{-1}(x)$ ациклически (например, стягиваемые). Пусть $v: M \rightarrow V$ – непрерывное векторное поле, направленное “внутрь” K в том смысле, что $v(m) \in \text{Con}(K, p(m))$ для любой точки $m \in M$. Тогда существует точка $m^* \in M$ такая, что $v(m^*) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим отображение $g: M \rightarrow K$, полагая $g(m) = r(p(m) + v(m))$. По теореме Эйленберга–Монтгомери [3] существует точка m^* такая, что $p(m^*) = g(m^*)$. То есть $p(m^*)$ – ближайшая из K точка к $p(m^*) + v(m^*)$. Наконец, тот же трюк с ретракцией $r: B \rightarrow K$, как и выше, завершает доказательство.

2. Дискретный случай. Мы хотим получить утверждение, аналогичное теореме 1, заменив выпуклый компакт K конечным множеством X (и обозначая через K многогранник $\text{co}(X)$ – выпуклую оболочку множества X). Главная проблема состоит в двух вещах. Нам нужно как-то формализовать понятие “непрерывности” и как-то правильно использовать “выпуклость”. Обе эти вещи мы предлагаем реализовать с помощью понятия близости на X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отношением *близости* (или *толерантности*) на множестве X называется рефлексивное и симметричное бинарное отношение $\mathcal{T}$ на X . Подмножество S называется *кликой*, если все члены S близки между собой (иначе говоря, $S \times S \subset \mathcal{T}$).

Перейдем теперь к формализации понятия “непрерывности” векторного поля v , определенного на X . Чтобы подойти к этому, вернемся снова к непрерывному случаю. Рассмотрим некоторую точку x . Если $v(x) = 0$, все в порядке. В противном случае для точек x' , близких к x , вектора $v(x')$ также близки к $v(x)$. Например, находятся в ε -шаре вокруг $v(x)$. Если C – конус, порожденный шаром $v(x) + \varepsilon B$, то при малом ε он будет заостренным в нуле (т.е. не содержит никаких линейных подпространств).

Рис. 1

Отталкиваясь от этого соображения, дадим

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скажем, что векторное поле v на X $\mathcal{T}$ -*плавное*, если для любой клики S множество $v(S) = \{v(s), s \in S\}$ содержится в некотором заостренном конусе.

Интуитивно это означает, что в близких точках векторы направлены в одну сторону. Из определения немедленно вытекает следующее важное свойство: если 0 принадлежит $\text{co}(v(S))$, то для некоторого $s \in S$ выполняется $v(s) = 0$.

Осталось понять, какие требования на близость $\mathcal{T}$ превратят X в “выпуклый” объект. Для этого мы стандартным способом свяжем с $\mathcal{T}$ симплициальный комплекс $|\mathcal{T}|$. По определению $|\mathcal{T}|$ состоит из вероятностных мер μ на X , удовлетворяющих следующему ограничению: носитель $\text{supp}(\mu) := \{x \in X, \mu(x) > 0\}$ меры μ

является кликой. Топология на $|\mathcal{T}|$ вводится естественным способом. Определим теперь отображение $p: |\mathcal{T}| \rightarrow K = \text{co}(X)$ по линейности: $p(\mu) = \sum_{x \in X} \mu(x)x$. Очевидно, это непрерывное отображение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скажем, что близость $\mathcal{T}$ на $X \subset V$ ациклична, если отображение $p: |\mathcal{T}| \rightarrow \text{co}(X)$ сюръективно и для любой точки $\xi \in \text{co}(X)$ ее прообраз $p^{-1}(\xi)$ является ациклическим топологическим пространством.

Несколько грубо это означает, что от любого представления точки ξ как выпуклой комбинации некоторой клики к любому другому такому представлению можно перейти непрерывным образом.

Сформулируем теперь наш главный результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть на конечном множестве $X \subset V$ задано векторное поле v , направленное внутрь $K = \text{co}(X)$. Предположим также, что на X имеется близость $\mathcal{T}$, удовлетворяющая двум требованиям:

- 1) поле v $\mathcal{T}$ -плавное,
- 2) близость $\mathcal{T}$ ациклична.

Тогда существует точка $x^* \in X$ такая, что $v(x^*) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f: X \rightarrow X$ – отображение. И пусть $\mathcal{T}$ – ациклическая близость на X такая, что векторное поле v , $v(x) = f(x) - x$, является $\mathcal{T}$ -плавным. Тогда существует неподвижная точка f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Сведем теорему 2 к теореме 1". В самом деле, рассмотрим непрерывное отображение $\tilde{v}: |\mathcal{T}| \rightarrow V$, заданное формулой $\tilde{v}(\mu) = \sum_x \mu(x)v(x)$. Из леммы видно, что оно направлено внутрь $K = \text{co}(X)$. Так как в силу условия 2) слои отображения $p: |\mathcal{T}| \rightarrow K$ ациклически, а $|\mathcal{T}|$ – метрический компакт, то по теореме 1" существует нуль этого поля, т.е. $\mu \in |\mathcal{T}|$ такая, что $\tilde{v}(\mu) = 0$.

Пусть теперь $S = \text{supp}(\mu)$ – соответствующая клика. По определению $\tilde{v}(\mu) = \sum_{s \in S} \mu(s)v(s)$. В силу условия 1) векторы $v(s)$, $s \in S$, принадлежат некоторому заостренному конусу C в V . Так как $\tilde{v}(\mu) = 0$, то существует $s \in S$, для которого мы имеем $v(s) = 0$.

Требование ациклическости 2) важно, как показывает следующий пример. Пусть X – подмножество прямой, состоящее из четырех точек 0, 1, 2 и 3. Отображение f переводит 0 в 2, 2 в 3, 3 в 1 и 1 в 0. Точки 0 и 2 близки, как и точки 1 и 3. Ясно, что условие 1) теоремы выполнено, но неподвижных точек у f нет. Конечно, это связано с тем, точка 3/2 обладает (ровно) двумя представлениями: как выпуклая комбинация 0 и 2 и как выпуклая комбинация 1 и 3.

Требование ациклическости выглядит естественным, но трудным для проверки. Ниже мы приведем более удобное (но менее общее) требование. Фактически оно состоит в том, что слои канонической проекции $p: |\mathcal{T}| \rightarrow K$ должны быть (непустыми) выпуклыми множествами. В терминах отношения близости это условие формулируется так: пусть точка $\xi \in K$ представлена как невырожденная выпуклая комбинация клики S и S' ; тогда их объединение $S \cup S'$ также является кликой. В этом случае доказательство утверждения о существовании нуля векторного поля (или неподвижной точки отображения) может быть проведено с использованием теоремы Какутани вместо теоремы Эйленберга–Монтгомери.

Заметим, что фактически это условие означает наличие полиэдрального разбиения выпуклого многогранника K . А именно, для каждой точки $\xi \in K$ обозначим через $S(\xi)$ максимальную клику такую, что ξ представляется как невырожденная выпуклая комбинация элементов из $S(\xi)$. Тогда многогранник K разбивается на клетки $\text{relint}(\text{co}(S(\xi)))$. Обратно, если мы имеем полиэдральное разбиение K с вершинами в X (и считаем близкими точки из одного многогранника разбиения), то плавное векторное поле на X имеет нули.

Совсем простой случай возникает, когда полиэдральное разбиение K является на самом деле симплициальным разбиением. Это в точности означает, что отображение $p: |\mathcal{T}| \rightarrow K$ взаимно однозначно. В этом случае можно доказывать существование нулей $\mathcal{T}$ -плавного векторного поля с помощью теоремы Брауэра (точнее, с помощью теоремы 1').

3. Применение к целочисленным решеткам. До сих пор речь шла про произвольные конечные множества в произвольном (конечномерном) векторном пространстве V . Теперь мы хотим обсудить важный частный случай, когда V есть координатное пространство $\mathbb{R}^n$, а X – конечное подмножество в целочисленной решетке $\mathbb{Z}^n$. Дело в том, что пространство $\mathbb{R}^n$ обладает естественным полиэдральным разбиением на целые единичные кубы, и можно этим воспользоваться для организации полиэдрального разбиения $\text{co}(X)$.

Стандартным кубическим разбиением $\mathbb{R}^n$ мы будем называть совокупность кубов $Q_m = m + [0, 1]^n$, где m пробегает $\mathbb{Z}^n$. Это действительно полиэдральное разбиение $\mathbb{R}^n$ с вершинами в $\mathbb{Z}^n$.

Полиэдральное разбиение $\mathcal{P}$ многогранника $K = \text{co}(X)$ естественно брать состоящим из многогранников $P_m = Q_m \cap K$. Однако мы должны позаботиться о том, чтобы это действительно оказалось X -разбиением, т.е. чтобы вершины всех таких многогранников принадлежали X . Для этого мы, конечно, должны считать, что $X = K \cap \mathbb{Z}^n$, т.е. (в терминологии авторов) множество X было псевдо выпуклым. Но этого мало! Мы дополнительно должны потребовать, чтобы все вершины многогранников P_m были целыми!

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многогранник K в $\mathbb{R}^n$ называется *вполне целым*, если для любого $m \in \mathbb{Z}^n$ многогранник $Q_m \cap K$ имеет целые вершины. Множество $X \subset \mathbb{Z}^n$ называется *целочисленно выпуклым*, если многогранник $\text{co}(X)$ вполне целый и $X = \text{co}(X) \cap \mathbb{Z}^n$.

Конечно, не любой целый многогранник вполне целый. Для этого, например, все его ребра должны быть параллельны векторам, у которых все координаты равны 0 или ± 1 . Но все-таки их довольно много. Например, любой целый полиматроид и многие другие (целые) многогранники. Можно предложить другую характеристику вполне целых многогранников. Это такие многогранники K , что для любого индекса $i = 1, \dots, n$ и любого целого числа k пересечение K с гиперплоскостью $[x = k]$ является целым многогранником.

Близкие (целые) точки относительно этого разбиения – это точки, расстояние между которыми в метрике l_∞ (максимум модуля разности координат) не превышает 1. Обозначим через $\mathcal{T}_\infty$ так определенную толерантность. Понятие “плавности” тоже можно конкретизировать, считая близкими комонотонные вектора. Вектора v и w из $\mathbb{R}^n$ называются *комонотонными*, если $v_i w_i \geq 0$ для любого индекса $i = 1, \dots, n$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – целочисленно выпуклое конечное подмножество в $\mathbb{Z}^n$. Пусть $v: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ – векторное поле, направленное внутрь $K = \text{co}(X)$ такое, что для любых близких точек x и y векторы $v(x)$ и $v(y)$ комонотонны. Тогда существует точка $x^* \in X$ с $v(x^*) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2 достаточно убедиться, что поле v является $\mathcal{T}_\infty$ -плавным. Пусть S – некоторая клика. Сделаем следующее. Припишем индексу i знак $+$, если существует $s \in S$ с положительным $v_i(s)$; припишем знак $-$, если существует $s \in S$ с отрицательным $v_i(s)$. Из условия комонотонности ясно, что эти назначения знаков непротиворечивы. Наконец, оставшимся индексам припишем знак 0. И эти “знаки” обозначим $\varepsilon(i)$. Тогда все векторы $v(s)$, $s \in S$, принадлежат “ортанту” $\times_i(\varepsilon(i)\mathbb{R}_+)$ в $\mathbb{R}^n$, который, очевидно, является заостренным.

Как и в классическом случае, мы из теоремы 3 получаем утверждение про существование неподвижной точки. Приведем ответ в форме Какутани.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть X – множество целых точек некоторого вполне выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^n$, и пусть F – непустозначное соответствие из X в X . Потребуем следующие два условия. Первое: для любой точки $x \in X$ образ $F(x)$ – псевдо выпуклое подмножество X (т.е. $F(x) = \text{co}(F(x)) \cap \mathbb{Z}^n$)¹. И второе: существует векторное поле v на X такое, что $v(x)$ и $v(y)$ комонотонны для близких точек x и y , и такое, что луч $x + \mathbb{R}_+v(x)$ пересекает $\text{co } F(x)$ для любой точки $x \in X$. Тогда существует неподвижная точка F , т.е. $x^* \in X$ такая, что $x^* \in F(x^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, очевидно, что поле v направлено внутрь K . Поэтому из теоремы 3 существует $x^* \in X$ с $v(x^*) = 0$. Так как в этом случае луч $x^* + \mathbb{R}_+v(x^*)$ вырождается в точку x^* , мы заключаем, что $x^* \in \text{co } F(x^*)$. А так как точка x^* целая, из псевдо выпуклости $F(x^*)$ заключаем, что $x^* \in F(x^*)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, что вполне целый многогранник обладает целой триангуляцией, вписанной в $\mathcal{P}$. Это позволяет иначе доказать следствие (см. [2]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] T. Iimura, “A discrete fixed point theorem and its applications”, *J. Math. Econom.*, **39**:7 (2003), 725–742.
- [2] T. Iimura, K. Murota, A. Tamura, *Discrete fixed point theorem reconsidered*, METR 2004-09, Tokyo, Japan.
- [3] S. Eilenberg, D. Montgomery, “Fixed point theorems for multivalued transformations”, *Amer. J. Math.*, **68**:2 (1946), 214–222.

В. И. Данилов

Центральный экономико-математический институт РАН,
г. Москва

E-mail: vdanilov43@mail.ru

Поступило

01.03.2005

Г. А. Кошевой

Центральный экономико-математический институт РАН,
г. Москва

E-mail: koshevoy@cemi.rssi.ru

¹ Аналог выпуклости образа в теореме Какутани.