Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Щетинин, О факторпространствах компактных групп Ли по централизаторам торов, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 2, 293–304

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3792>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 07:48:36

УДК 512.816

О факторпространствах компактных групп Ли по централизаторам торов

А. Н. Щетинин

Рассматривается граф однородного пространства K/L , где K – компактная группа Ли, L – централизатор тора в K . Получена характеристика тех пространств, графы которых допускают вложение в некоторый стандартный граф. Вычисляется число дуг в таких графах. Найдено также простое выражение для класса Эйлера однородного пространства K/L .

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Пусть K/L – факторпространство полупростой компактной связной группы Ли K по ее связной замкнутой подгруппе L . Среди таких однородных пространств выделяются те пространства, для которых подгруппа L является централизатором некоторого тора в K . Они односвязны и имеют положительную эйлерову характеристику. Пространства указанного вида активно изучались разными авторами. Мы будем ссылаться на работу [1] и существенно использовать ее результаты.

Основной интерес для нас будет представлять группа Вейля W системы корней группы K . Эта группа допускает хорошо известное представление в виде ориентированного графа. Исходя из него строится граф однородного пространства K/L . Исследуются свойства этого графа и их связь с топологией пространства K/L .

Рассматриваемые пространства допускают комплексную структуру. Среди них содержатся все компактные эрмитовы симметрические пространства, изучавшиеся, в частности, в работе [2]. Мы продолжаем их исследование.

2. Обозначения и предварительные сведения. Мы используем следующие обозначения: K – полупростая компактная связная группа Ли, T – ее максимальный тор, V_T – касательное пространство в единице к тору T , $S = S(V_T^*)$ – симметрическая алгебра, $R \subset V_T^*$ – система корней группы K , R_+ – множество положительных корней, $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – соответствующий базис системы корней R , 2ρ – сумма положительных корней, $\Gamma \subset V_T^*$ – решетка весов. Для подмножества $\Delta \subset R$ положим $\Delta_+ = \Delta \cap R_+$.

Пусть W – группа Вейля системы корней R . Обозначим через $(\cdot, \cdot)$ инвариантное скалярное произведение на V_T^* , причем будем считать, что $(\gamma, \gamma) = 2$ для короткого

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00647).

корня γ , если R неприводима. Пусть s_γ – отражение в гиперплоскости, ортогональной корню γ . Через $l(w)$ обозначим длину приведенного разложения элемента $w \in W$, т.е. наименьшее число сомножителей в разложении вида $w = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$, где $s_j = s_{\alpha_j}$, $\alpha_j \in B$; пусть $\varepsilon(w) = (-1)^{l(w)}$. Положим

$$N(w) = \{\gamma \in R_+ \mid w^{-1}(\gamma) < 0\}.$$

Число элементов этого множества равно $|N(w)| = l(w)$. Обозначим еще через $R^\vee$ двойственную систему корней, элементы $\gamma^\vee$ которой будем отождествлять с $2\gamma/(\gamma, \gamma)$.

Мы будем рассматривать пространства вида K/L , где L – связная подгруппа в K , содержащая T . Без потери общности группу K можно считать односвязной. Пространство K/L определяется, с точностью до подобия однородных пространств, заданием пары (R, U) , где U – подмножество в R , обладающее свойствами $(U + U) \cap R \subset U$ и $-U = U$. Тогда U – система корней. Положим $B_U = B \cap U$. Если B_U – базис системы U , то будем говорить, что U порождена некоторым множеством простых корней. В этом случае L есть централизатор некоторого тора в K . Обратно, если L – централизатор тора в K , содержащий T , то L – связная подгруппа (см. [3; теорема 3.2]) и однородное пространство K/L задается парой (R, U) , для которой $B_U = B \cap U$ есть базис системы корней U . Далее рассматриваются только такие однородные пространства. Пространство K/T отвечает случаю $U = \emptyset$.

Обозначим через $m_1, \dots, m_n$ показатели группы W . Пусть $W(U)$ – группа Вейля системы корней U . Мы рассматриваем ее как подгруппу в W , порожденную отражениями s_γ , где $\gamma \in U$, и пусть $k_1, \dots, k_p$ – показатели группы $W(U)$. Группа W действует на S . Тогда $W(U)$ также действует на S . Обозначим через $S(U)$ алгебру ее инвариантов и через J_U идеал в S_U , порожденный инвариантами положительной степени группы W . Существует удваивающий степени изоморфизм градуированных алгебр $\varphi: S_U/J_U \rightarrow H^*(K/L, \mathbb{R})$ (см. [3; теорема 13.2]). Обозначим $\varphi(z + J_U) = [z]$.

Нам понадобится понятие *ранга однородного пространства* (см. [3; п. 12.4]). Применительно к пространствам рассматриваемого вида он может быть определен следующим образом. Пусть $I_1, \dots, I_n$ – базисные инварианты группы W , $m_1 + 1, \dots, m_n + 1$ – их степени, $v_1, \dots, v_n$ – базисные инварианты группы $W(U)$. Степени этих инвариантов равны $k_1 + 1, \dots, k_p + 1$, остальные степени равны 1. Зафиксируем инвариант I_j . Пусть $v_1, \dots, v_s$ – в точности те инварианты, степени которых равны $m_j + 1$. Имеем

$$I_j = c_{ij}v_1 + \cdots + c_{sj}v_s + \cdots,$$

где $c_{ij} \in \mathbb{R}$, а точками обозначены члены, не содержащие $v_1, \dots, v_s$. Положим $f(I_j) = c_{1j}v_1 + \cdots + c_{sj}v_s$. Определив отображение f для всех $j = 1, \dots, n$ и продолжив его по линейности на подпространство в S , порожденное элементами $I_1, \dots, I_n$, мы получим линейное отображение этого подпространства в подпространство, порожденное элементами $v_1, \dots, v_n$. Ранг $\text{rk } K/L$ пространства K/L полагаем равным размерности ядра отображения f . Положим также λ_i равным разности числа показателей m_j , равных i , и числа показателей k_s , равных i , и пусть $r(K/L) = \sum \lambda_i$, где сумма берется по всем $\lambda_i > 0$. Ясно, что всегда $r(K/L) \leq \text{rk } K/L$. Оба числа $r(K/L)$ и $\text{rk } K/L$ являются топологическими инвариантами пространства K/L (см. [3; п. 12.4]). При этом $r(K/L)$ вычисляется очень просто, вычисление же ранга связано с громоздкими вычислениями.

В [1] введены операторы $A(w): S \rightarrow S$, $A(w) = A(s_{i_1}) \cdots A(s_{i_l})$, где $w = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$ – приведенное разложение, причем $A(w)$ не зависит от выбора такого разложения. Оператор $A_\alpha = A(s_\alpha)$ задается формулой

$$A_\alpha = \frac{z - s_\alpha z}{\alpha}.$$

Операторы $A(w)$ индуцируют операторы

$$A(w): H^*(K/T, \mathbb{R}) \rightarrow H^*(K/T, \mathbb{R}).$$

Пространство K/T не имеет кручения. Естественное вложение $j: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ индуцирует мономорфизм $j^*: H^*(K/T, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(K/T, \mathbb{R})$, и мы отождествляем $H^*(K/T, \mathbb{Z})$ с его образом в $H^*(K/T, \mathbb{R})$. Свободная абелева группа $H_*(K/T, \mathbb{Z})$ обладает базисом D_w , $w \in W$, таким, что значение класса когомологий $[z] \in H^{2k}(K/T, \mathbb{Z})$ на классе гомологий $D_w \in H_{2k}(K/T, \mathbb{Z})$ вычисляется по формуле

$$\langle [z], D_w \rangle = A_w(z).$$

Так как $l(w) = k$, то правая часть этой формулы – целое число.

Пусть однородное пространство K/L отвечает паре (R, U) и $p: K/T \rightarrow K/L$ – естественное отображение. Тогда $p^*: H^*(K/L, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(K/T, \mathbb{Z})$ – мономорфизм, $p_*: H_*(K/T, \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(K/L, \mathbb{Z})$ – эпиморфизм. При этом

$$\langle p^*(z), D_w \rangle = \langle z, p_*(D_w) \rangle,$$

где $z \in H^{2k}(K/L, \mathbb{Z})$, $l(w) = k$ (см. [1]).

3. Подмножества группы Вейля и графы однородных пространств. Как и в [1], определим подмножество

$$W_U^1 = \{w \in W \mid w(B_U) \subset R_+\}$$

группы W . Как легко видеть,

$$W_U^1 = \{w \in W \mid w(U_+) \subset R_+\}.$$

Для $w \in W_U^1$ определим множества

$$Z_U(w) = \{\gamma \in R_+ \mid w^{-1}(\gamma) \in U_+\} \quad \text{и} \quad P_U(w) = \{\gamma \in R_+ \mid w^{-1}(\gamma) \in R_+ - U_+\}.$$

Тогда

$$R_+ = N(w) \cup Z_U(w) \cup P_U(w).$$

Рассмотрим граф группы Вейля W . Его вершины соответствуют элементам группы. Из вершины w ведет дуга в вершину w_1 , $w \rightarrow w_1$, если $l(w_1) = l(w) + 1$ и $w_1 = s_\gamma w$ для некоторого $\gamma \in R_+$. Дугу будем иногда помечать символом γ . Подграф в W , порожденный вершинами из W_U^1 , т.е. образованный вершинами из W_U^1 и всеми дугами, начало и конец которых принадлежат этому множеству, назовем *графом однородного пространства K/L* , определенного парой (R, U) .

Объясним, как можно строить граф однородного пространства. Пусть $\Lambda \in \Gamma$ – вес, удовлетворяющий условиям $(\Lambda, \alpha) = 0$ при $\alpha \in B_U$ и $(\Lambda, \alpha) > 0$ при $\alpha \in B - B_U$.

Ясно, что $w(\Lambda) = \Lambda$ для $w \in W_U^1$. Пусть $\gamma \in R_+$ и $w \in W_U^1$. Заметим, что $w^{-1}(\gamma) < 0$ тогда и только тогда, когда $(w(\Lambda), \gamma) < 0$. В самом деле, если $w^{-1}(\gamma) = -\delta$, $\delta \in R_+$, то $\delta \notin U$, так в противном случае мы имели бы $w(\delta) < 0$, что неверно. Поэтому $l(w)$ для $w \in W_U^1$ совпадает с числом таких $\gamma \in R_+$, что $(w(\Lambda), \gamma) < 0$. Теперь легко показать, что равенство $w(\Lambda) = w'(\Lambda)$ для $w, w' \in W_U^1$ означает равенство $w = w'$.

Рассмотрим множество весов вида $w(\Lambda)$, $w \in W$. Оно совпадает с множеством всех весов вида $w(\Lambda)$, $w \in W_U^1$. Поставим в соответствие весу $w(\Lambda)$ вершину графа. Пусть $\alpha \in B$. Если $(w(\Lambda), \alpha) = 0$, то $\alpha \in Z_U(w)$ и, как легко видеть, $s_\alpha w \notin W_U^1$. Если $(w(\Lambda), \alpha) < 0$, то $\alpha \in N(w)$ и $s_\alpha w \in W_U^1$, $l(s_\alpha w) = l(w) - 1$. Если $(w(\Lambda), \alpha) > 0$, то $\alpha \in P_U(w)$, $s_\alpha w \in W_U^1$ и $l(s_\alpha w) = l(w) + 1$. В последнем случае мы проводим из вершины w в вершину $s_\alpha w$ дугу, помеченную α . Начав с вершины Λ , мы получим граф, который назовем *графом весов*, хотя он содержит не все веса представления, соответствующего старшему весу Λ . Граф однородного пространства получается из графа весов добавлением еще некоторых дуг. А именно, из вершины w в вершину w_1 проведем дугу, помеченную γ , где $\gamma \in R_+$, если $l(w_1) = l(w) + 1$ и $s_\gamma w(\Lambda) = w_1(\Lambda)$.

В качестве Λ мы обычно будем брать сумму фундаментальных весов, соответствующих простым корням, не принадлежащим B_U .

ПРИМЕР. Пусть однородное пространство определено парой $(B_3, A_1 \otimes B_1)$, т.е. $B_U = \{\alpha_1, \alpha_3\} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ и можно взять $\Lambda = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ (здесь и далее мы используем обозначения книги [4]). Граф весов и граф однородного пространства изображены на рис. 1. Указаны веса $w(\Lambda)$, множество которых совпадает с множеством длинных корней. Пунктирными стрелками обозначены дуги графа однородного пространства, не принадлежащие графу весов.

Рис. 1

Определим для $\gamma \in R_+$ множество

$$W_U^1(\gamma) = \{w \in W_U^1 \mid w^{-1}(\gamma) < 0\}.$$

Очевидно, что $|W| = 2|W_U^1(\gamma)|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть система R неприводима. Тогда число $|W_U^1(\gamma)|$ зависит только от U и (γ, γ) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\delta \in R_+$ и $(\delta, \delta) = (\gamma, \gamma)$. Тогда $\delta = w(\gamma)$ для некоторого $w \in W$. Пусть $w_1 \in W_U^1(\gamma)$. Элемент ww_1 допускает единственное представление вида $ww_1 = w_2w_3$, где $w_2 \in W_U^1$, $w_3 \in W(U)$ (см. [1]). Значит,

$$(w_2(\Lambda), \delta) = (w_2w_3(\Lambda), \delta) = (ww_1(\Lambda), w(\gamma)) = (w_1(\Lambda), \gamma) < 0,$$

где вес Λ определен выше. Полагая $f_w(w_1) = w_2$, мы получаем отображение

$$f_w: W_U^1(\gamma) \rightarrow W_U^1(\delta),$$

которое, очевидно, биективно.

Пусть R неприводима. Найдем $|W_U^1(\gamma)|$. Пусть паре (R, U) отвечает однородное пространство K/L . Многочлен Пуанкаре этого пространства имеет вид

$$P(K/L, t) = Q(K/L, t^2),$$

где

$$Q(K/L, t) = \sum_{w \in W_U^1} t^{l(w)}. \quad (1)$$

Пусть R содержит корни разной длины. Обозначим через R' и R'' подмножества коротких и длинных корней из R соответственно. Для $w \in W$ определим множества $N_1(w) = \{\gamma \in R'_+ \mid w^{-1}(\gamma) < 0\}$, $N_2(w) = \{\gamma \in R''_+ \mid w^{-1}(\gamma) < 0\}$ и положим $l_i(w) = |N_i(w)| = |N_i(w^{-1})|$, $i = 1, 2$. Определим аналогично (1) многочлен

$$Q(K/L, s, t) = \sum_{w \in W_U^1} s^{l_1(w)} t^{l_2(w)}.$$

Ясно, что $Q(K/L, t, t) = Q(K/L, t)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если однородное пространство K/L задается парой (R, U) , то

$$Q(K/L, s, t) = \frac{Q(K/T, s, t)}{Q(L/T, s, t)}. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано в [1], любой элемент $w \in W$ можно однозначно записать в виде $w = w_1w_2$, где $w_1 \in W_U^1$, $w_2 \in W(U)$, при этом $l(w_1w_2) = l(w_1) + l(w_2)$.

Пусть $\gamma \in N_i(w^{-1})$, $i = 1$ или 2 . Если $\gamma \in U_+$, то $w_2(\gamma) < 0$, $w_1(\gamma) > 0$. В самом деле, $w_2(\gamma) \in U$ и, если $w_2(\gamma) \in U_+$, то $w_1w_2(\gamma) > 0$, что неверно. Значит $\gamma \in N_i(w_2^{-1})$. Обратно, если $\gamma \in N_i(w_2^{-1})$, то $w_2(\gamma) < 0$, и $\gamma \in U_+$, $w_1w_2(\gamma) < 0$, т.е. $\gamma \in N_i(w^{-1})$. Если же $\gamma \in R_+ - U_+$, то $w_2(\gamma) > 0$, $w_1w_2(\gamma) < 0$ и $\gamma \in w_2^{-1}(N_i(w_1^{-1}))$. Обратно, если $\gamma \in w_2^{-1}(N_i(w_1^{-1}))$, то $w_2(\gamma) \in R_+ - U_+$, откуда $\gamma \in R_+ - U_+$ и $\gamma \in N_i(w^{-1})$. Итак,

$$N_i(w^{-1}) \cap U_+ = N_i(w_2^{-1}), \quad N_i(w^{-1}) \cap (R_+ - U_+) = w_2^{-1}(N_i(w_1^{-1})),$$

откуда $l_i(w) = l_i(w_1) + l_i(w_2)$, $i = 1, 2$. Тождество (2) вытекает из этого равенства, поскольку

$$\begin{aligned} Q(K/T, s, t) &= \sum_{w \in W} s^{l_1(w)} t^{l_2(w)} = \sum_{w_1 \in W_U^1} \sum_{w_2 \in W(U)} s^{l_1(w_1 w_2)} t^{l_2(w_1 w_2)} \\ &= \sum_{w_1 \in W_U^1} s^{l_1(w_1)} t^{l_2(w_1)} \sum_{w_2 \in W(U)} s^{l_1(w_2)} t^{l_2(w_2)} = Q(K/L, s, t) Q(L/T, s, t). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. *Для неприводимой системы корней R , содержащей корни различной длины, многочлен $Q(K/T, s, t)$ имеет вид*

- 1) $Q(K/T, s, t) = \prod_{i=0}^{n-1} (1 + st^i) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + t + \dots + t^i)$ для системы типа B_n ;
- 2) $Q(K/T, s, t) = \prod_{i=0}^{n-1} (1 + ts^i) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + s + \dots + s^i)$ для системы типа C_n ;
- 3) $Q(K/T, s, t) = (1+t)(1+s)(1+st)(1+st^2)(1+s^2t)(1+s^2t^2)(1+s^3t^3)(1+s+s^2) \times (1+t+t^2)$ для системы типа F_4 ;
- 4) $Q(K/T, s, t) = (1+s)(1+t)(1+st+s^2t^2)$ для системы типа G_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R – система типа B_n . Рассмотрим однородное пространство K/L , отвечающее подсистеме U , порожденной $B - \{\alpha_1\}$. Положим $\Lambda = \varepsilon_1$, тогда веса $w(\Lambda)$, $w \in W_U^1$, суть $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, -\varepsilon_n, \dots, -\varepsilon_1$. Множество $N(w)$ совпадает с множеством таких корней $\gamma \in R_+$, что $(w(\Lambda), \gamma) < 0$. Имеем $l_1(w) = 0$, $l_2(w) = k-1$, если $w(\Lambda) = \varepsilon_k$ и $l_1(w) = 1$, $l_2(w) = 2n - k - 1$, если $w(\Lambda) = -\varepsilon_k$, откуда

$$Q(K/L, s, t) = (1 + st^{n-1})(1 + t + \dots + t^{n-1}).$$

Используя предложение 2, индукцией по n получаем требуемое.

Если R – система типа C_n , то надо поменять местами s и t .

Пусть R – система типа F_4 . Здесь снова рассмотрим $B_U = B - \{\alpha_1\}$. В качестве Λ можно взять $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ – максимальный корень, тогда множество весов вида $w(\Lambda)$ будет совпадать с множеством длинных корней. Вычисления не представляют труда, и мы получаем

$$Q(K/L, s, t) = (1 + st^2)(1 + s^2t^2)(1 + s^3t^3)(1 + t + t^2).$$

Далее, применяем предложение 2 и 2), так как U – система типа G_3 .

Пусть R – система типа G_2 . Аналогично, возьмем $B_U = B - \{\alpha_1\}$, и пусть Λ – максимальный корень. Тогда множество весов вида $w(\Lambda)$ будет совпадать с множеством длинных корней и

$$Q(K/L, s, t) = (1 + t)(1 + st + s^2t^2).$$

Теперь снова применяем предложение 2.

Вычислим $|W_U^1(\gamma)|$, где γ – короткий корень. Имеем

$$|R'_+| |W_U^1(\gamma)| = \sum_{w \in W_U^1} l_1(w) = Q'_s(K/L, 1, 1). \quad (3)$$

Дифференцируя дробь (2) по s , полагая $s = t = 1$ и учитывая (3), получаем

$$Q'_s(K/L, 1, 1) = |W_U^1| \left(\frac{Q'_s(K/T, 1, 1)}{|W|} - \frac{Q'_s(L/T, 1, 1)}{|W(U)|} \right). \quad (4)$$

Аналогично для длинных корней.

ТЕОРЕМА 2. Пусть K/L определено парой (R, U) , причем система R неприводима, $\gamma \in R_+$, $\tilde{R}$ – подмножество в R , состоящее из корней той же длины, что и γ , $\tilde{U} = U \cap \tilde{R}$. Тогда

$$|W_{\tilde{U}}^1(\gamma)| = \frac{1}{2}|W_U^1|\left(1 - \frac{|\tilde{U}_+|}{|\tilde{R}_+|}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из (3) и (4).

Ясно, что теорема справедлива и в случае, когда R состоит из корней одной длины.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть система R неприводима. Тогда число дуг в графе весов равно соответственно $n|W_{\tilde{U}}^1(\gamma)|$, где $n = \text{rk } K$ (случай корней одной длины) и $n'|W_{\tilde{U}}^1(\gamma')| + n''|W_{\tilde{U}}^1(\gamma'')|$, где n' и n'' – число коротких и длинных простых корней, γ' и γ'' – короткий и длинный корни.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждая дуга графа весов помечена простым корнем. При этом дуга, помеченная корнем α , входит в вершину w тогда и только тогда, когда $\alpha \in N(w)$. Число таких дуг равно $|W_{\tilde{U}}^1(\gamma)|$, где γ – корень той же длины, что и α .

4. Об эрмитовых симметрических пространствах. Мы исследуем графы эрмитовых симметрических пространств и увидим, что они имеют весьма специальный вид. Начнем с одного замечания о топологии таких пространств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть K/L – эрмитово симметрическое пространство, причем группа K проста. Тогда $r(K/L) = \text{rk } K/L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО заключается в прямом вычислении. Для классических систем корней оно не вызывает затруднений, и мы его опустим. Ранг пространства, определенного парой (E_6, D_5) , равен 2 (см. [3; таблица 11]). Ранг пространства, определенного парой (E_7, E_6) , равен 3 (см. [7]).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть в условиях предложения 4 все корни системы R группы K одной длины. Тогда $\text{rk } K/L$ совпадает с рангом K/L как симметрического пространства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это вытекает из [5; гл. 10, таблица 5].

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть R состоит из корней разной длины, т.е. пара (R, U) имеет тип (C_n, A_{n-1}) или (B_n, B_{n-1}) . Тогда существует эрмитово симметрическое пространство K'/L' , алгебра вещественных когомологий которого изоморфна алгебре когомологий пространства K/L , а именно пространство, определенное парой (D_{n+1}, A_n) и (A_{2n-1}, A_{2n-2}) соответственно, ранг которого как симметрического пространства равен $\text{rk } K/L = \text{rk } K'/L'$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^s$ целочисленную решетку $\mathbb{Z}^s$ и проведем в ней дуги, идущие от точек вида $(a_1, \dots, a_i, \dots, a_s)$ к $(a_1, \dots, a_i + 1, \dots, a_s)$. Мы получим (бесконечный) ориентированный граф Γ_s .

ТЕОРЕМА 3. Пусть K/L – эрмитово симметрическое пространство. Тогда его граф можно вложить в качестве подграфа, порожденного вершинами, в граф Γ_r , где $r = \text{rk } K/L$. При $s < r$ граф Γ_s не содержит подграфов, изоморфных графу пространства K/L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если граф пространства K/L можно вложить в Γ_s , а граф пространства K'/L' – в Γ_t , то граф пространства $K/L \times K'/L'$ можно, очевидно, вложить в Γ_{s+t} . При этом, если оба подграфа, соответствующие K/L и K'/L' , порождались вершинами, то тем же свойством будет обладать и подграф, отвечающий их произведению. Кроме того,

$$\mathrm{rk}(K/L \times K'/L') = \mathrm{rk} K/L + \mathrm{rk} K'/L'$$

(см. [3; предложение 12.11]). Поэтому теорему достаточно доказать для простой группы K .

Пусть пространство K/L определяется парой (R, U) . Покажем, что граф весов можно вложить в качестве подграфа, порожденного вершинами, в граф Γ_r , где $r = \mathrm{rk} K/L$. Для пространств, заданных парами

$$\begin{aligned} (A_n, A_{n-1}), \quad (A_n, A_s \otimes A_{n-s-1}), \quad 1 \leq s \leq n-2, \\ (B_n, B_{n-1}), \quad (D_n, D_{n-1}), \quad (E_6, D_5), \quad (E_7, E_6), \end{aligned}$$

такие вложения указаны в [2]. Остается рассмотреть случаи пар (C_n, A_{n-1}) и (D_n, A_{n-1}) .

Рассмотрим пару (C_n, A_{n-1}) . Пусть $w \in W_U^1$. Возьмем приведенное разложение этого элемента $w = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$. Положим $a_1(w)$ равным числу таких α_{i_j} , которые совпадают с одним из $\alpha_n = 2\varepsilon_n$ или $\alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$. Положим $a_2(w)$ равным числу α_{i_j} , совпадающих с одним из корней $\alpha_{n-2} = \varepsilon_{n-2} - \varepsilon_{n-1}$ или $\alpha_{n-3} = \varepsilon_{n-3} - \varepsilon_{n-2}$ и т.д. Мы получим целочисленный набор $a(w) = (a_1(w), \dots, a_r(w))$. Здесь $n = 2r$ для n четного и $n + 1 = 2r$ для n нечетного. Сопоставим теперь каждому элементу $w \in W_U^1$ точку целочисленной решетки $a(w) \in \mathbb{Z}^r$. Нетрудно понять, что мы получили вложение графа весов в граф Γ_r в качестве подграфа, порожденного вершинами.

Точно так же разбирается и последний случай, т.е. случай пары (D_n, A_{n-1}) , причем оказывается, что граф весов для него совпадает с построенным выше графом весов для пары (C_{n-1}, A_{n-2}) .

Покажем, что в графе однородного пространства нет дуг, не принадлежащих графу весов для двойственной пары (в [2] это было доказано другим способом). Рассмотрим граф весов, отвечающий двойственной паре $(R^\vee, U^\vee)$, и пусть Λ – соответствующий фундаментальный вес. Тогда для любого веса $M = w(\Lambda)$ и любого корня $\gamma \in R_+$ имеем $(M, \gamma) = -1, 0$ или 1 (см. [6; гл. 8, п. 7.3]). Поэтому, если $l(w) = l$, то $w(\Lambda) = \Lambda - \alpha_{i_1}^\vee - \cdots - \alpha_{i_l}^\vee$, где $\alpha_{i_j} \in B$. Пусть $l(w_1) = l(w) + 1$, $w_1 = s_\gamma w$, где $\gamma \in R_+$. Имеем $w_1(\Lambda) = w(\Lambda) - \gamma^\vee$, откуда $\gamma \in B$.

Теперь покажем, что граф весов для двойственной пары нельзя вложить в граф Γ_s при $s < r$. Пусть $(w(\Lambda), \alpha_i) = (w(\Lambda), \alpha_j) = 1$, где $\alpha_i, \alpha_j \in B$. Если $(\alpha_i, \alpha_j) \neq 0$, то $\alpha_i + \alpha_j \in R$ и $(w(\Lambda), \alpha_i + \alpha_j) = 2$, что невозможно. Поэтому $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$. Обозначим через t максимальное число попарно ортогональных простых корней, для которых $(w(\Lambda), \alpha) = 1$ для некоторого $w \in W$. Тогда $t \leq s$, если граф весов вложен в граф Γ_s . Несложная проверка показывает, что для каждого из рассматриваемых пространств $t = r$. Значит, $r \leq s$.

СЛЕДСТВИЕ (доказательства). Пусть K проста, K/L эрмитово симметрическое. Тогда число дуг в графе однородного пространства вычисляется по формуле из предложения 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для эрмитова симметрического пространства граф весов и граф однородного пространства совпадают.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $K/L = K_1/L_1 \times \cdots \times K_m/L_m$, где K_i просты. Предположим, что граф однородного пространства K/L можно вложить в качестве подграфа в Γ_s для некоторого s . Тогда для каждого i пара (K_i, L_i) или двойственная к ней пара определяет эрмитово симметрическое пространство или же (K_i, L_i) – пара типа (G_2, A_1) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если граф однородного пространства K/L можно вложить в Γ_s , то граф каждого из пространств K_i/L_i можно также вложить в Γ_s . Поэтому достаточно рассмотреть случай простой группы K .

Пусть $w_1, w_2, w_3, w_4 \in W_U^1$, $w_1 \neq w_2$, $w_3 \neq w_4$, $l(w_3) = l(w_4) = l(w_1) + 1 = l(w_2) + 1$, $w_3 = s_\alpha w_1 = s_\beta w_2$, $w_4 = s_\gamma w_1 = s_\delta w_2$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R_+$. Если элемент w_1 соответствует вершине $(a_1, \dots, a_s)$, то w_3 и w_4 должны отвечать вершинам $(a_1, \dots, a_i + 1, \dots, a_s)$ и $(a_1, \dots, a_j + 1, \dots, a_s)$ для некоторых i и j , $i \neq j$. Тогда w_2 не может отвечать ни одной вершине графа Γ_s . Таким образом, чтобы доказать, что граф однородного пространства K/L нельзя вложить в Γ_s ни для какого s , достаточно предъявить в W_U^1 четыре элемента с указанными выше свойствами.

Заметим, что если R_1 – подсистема в R , порожденная некоторым множеством простых корней, и $U_1 = R_1 \cap U$, то граф однородного пространства, отвечающего паре (R_1, U_1) , вкладывается в качестве подграфа в граф пространства K/L . Если подсистема U_2 порождена некоторым множеством простых корней и является подсистемой системы U , то граф пространства K/L вкладывается в качестве подграфа в граф пространства, определенного парой (R, U_2) . Если подграф нельзя вложить в граф Γ_s ни для какого s , то подавно нельзя вложить и больший граф.

Пусть U – подсистема коранга 1. Положим $B_U = B - \{\alpha_i\}$. Пусть R – система типа B_n . Достаточно рассмотреть случай $i = 2$, $n \geq 3$. Здесь $\Lambda = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ – максимальный корень, множество весов вида $w(\Lambda)$ совпадает с множеством длинных корней и можно взять $w_1(\Lambda) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $w_2(\Lambda) = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $w_3(\Lambda) = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, $w_4(\Lambda) = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$.

Пусть R – система типа D_n , $n \geq 4$. Аналогично, можно взять $i = 2$. Тогда Λ – максимальный корень, множество весов вида $w(\Lambda)$ совпадает с множеством корней и элементы w_1, w_2, w_3, w_4 выбираются так же, как выше.

Пусть R – система типа E_6 . Если $i = 1$ или 6, то пространство эрмитово симметрическое. Если $i = 3$, то нельзя вложить уже подграф, определенный парой типа $(D_5, A_1 \otimes D_3)$. Если $i = 2$, то Λ – максимальный корень и рассуждение аналогично предыдущему.

Остальные случаи, а также случай подсистемы коранга 2 разбираются точно так же. Наконец, произвольная подсистема U либо содержится в такой подсистеме U_1 коранга 1 или 2, что граф пространства, определенного парой (R, U_1) , нельзя вложить в Γ_s , либо коранг U равен 1 и пара (R, U) указана в формулировке теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть граф однородного пространства K/L можно вложить в качестве подграфа в Γ_s для некоторого s . Тогда существует эрмитово симметрическое пространство K'/L' , граф которого изоморфен графу пространства K/L . При этом $\text{rk } K/L$ равен наименьшему из s , для которого такое вложение возможно. Пространство K'/L' можно выбрать так, чтобы его ранг как симметрического пространства был равен $\text{rk } K'/L' = \text{rk } K/L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Графы пространств, отвечающих двойственным парам, изоморфны, и ранги таких пространств равны. Пространство, определенное одной из двойственных пар (G_2, A_1) , диффеоморфно эрмитову симметрическому пространству, определенному парой (B_3, B_2) (см. [3; таблица 8]). Далее, применяем следствие и замечание после предложения 4.

Для элемента $w \in W_U^1$ положим

$$c(w) = \prod_{\gamma \in Z_U(w)} (\rho, \gamma).$$

Из основной теоремы, доказанной в [2], вытекает такое следствие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть K/L – это эрмитово симметрическое пространство, определенное парой (R, U) , где R неприводима и состоит из корней одной длины. Тогда имеет место следующая формула:

$$\sum_{w \in W_U^1} c(w) t^{l(w)} = k_1! \cdots k_{n-1}! (1+t)^N,$$

где $k_1, \dots, k_{n-1}$ – показатели группы $W(U)$, $2N$ – размерность пространства K/L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $w \in W_U^1$. Число путей в графе однородного пространства, ведущих из начальной вершины в вершину w , вычисляется по формуле

$$n(w) = l! \prod_{\gamma \in N(w)} (\rho, \gamma)^{-1},$$

где $l = l(w)$. Напомним, что $(\gamma, \gamma) = 2$. Как легко видеть, число путей, ведущих из w в заключительную вершину w_U^1 , дается формулой

$$p(w) = (N-l)! \prod_{\gamma \in P_U(w)} (\rho, \gamma)^{-1}.$$

Число путей, ведущих из начальной вершины в w_U^1 , равно

$$\sum_{w \in W_U^1, l(w)=l} n(w)p(w) = \frac{N! k_1! \cdots k_{n-1}!}{m_1! \cdots m_n!}, \quad (5)$$

где $m_1, \dots, m_n$ – показатели группы W . Так как

$$n(w)c^{-1}(w)p(w) = l!(N-l)! \prod_{\gamma \in R_+} (\rho, \gamma)^{-1} = \frac{l!(N-l)!}{m_1! \cdots m_n!},$$

то из (5) получаем

$$\sum_{w \in W_U^1, l(w)=l} c(w) = \frac{N! k_1! \cdots k_{n-1}!}{l!(N-l)!},$$

откуда и следует требуемое утверждение.

5. О классе Эйлера однородного пространства. Рассмотрим однородное пространство K/L , определенное парой (R, U) , и пусть $2N$ – его размерность. Тогда существует единственный элемент $e_U \in H^{2N}(K/L, \mathbb{Z})$, значение которого на фундаментальном классе D_U целочисленных гомологий равно эйлеровой характеристике многообразия K/L :

$$\langle e_U, D_U \rangle = \chi(K/L).$$

Этот элемент e_U называется *классом Эйлера*.

Рассмотрим элементы

$$\varpi = \prod_{\gamma \in R_+} \gamma, \quad \varpi_U = \prod_{\gamma \in R_+ - U_+} \gamma, \quad \varpi(U) = \prod_{\gamma \in U_+} \gamma$$

алгебры S и их классы когомологий

$$[\varpi] \in H^{2N+2Q}(K/T, \mathbb{Z}), \quad [\varpi_U] \in H^{2N}(K/L, \mathbb{Z}), \quad [\varpi(U)] \in H^{2Q}(L/T, \mathbb{Z}).$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть R – система корней, U – подсистема, порожденная некоторым множеством простых корней. Тогда $[\varpi_U] = e_U$ – класс Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $U = \emptyset$, т.е. мы имеем дело с пространством K/T . Пусть $z \in S$, $[z] \in H^{2N}(K/T, \mathbb{Z})$, $[z] \neq 0$, где $2N$ – размерность и $\alpha \in B$. Пусть D – фундаментальный класс гомологий. Если w^0 – элемент максимальной длины из W , то $w^0 = w's_\alpha$, где $l(w') = N - 1$. Поэтому

$$\langle [s_\alpha z], D \rangle = A(w^0)(s_\alpha z) = A(w')A_\alpha(s_\alpha z) = -A(w')A_\alpha(z) = -\langle [z], D \rangle.$$

Значит, для любого $w \in W$ имеем

$$\langle [w(z)], D \rangle = \varepsilon(w)\langle [z], D \rangle.$$

Согласно [7; гл. 9, упражнение 6.1] справедлива формула

$$\varpi = \frac{1}{N!} \sum_{w \in W} \varepsilon(w)(w\rho)^N.$$

Значение класса $[\rho^N]$ на фундаментальном классе гомологий по формуле Бореля–Хирцебруха (см. [8]) есть

$$\langle [\rho^N], D \rangle = N! \prod_{\gamma \in R_+} \frac{(\rho, \gamma)}{(\rho, \gamma)} = N!.$$

Значит, $\langle [\varpi], D \rangle = |W| = \chi(K/T)$.

В случае произвольной подсистемы U , порожденной некоторым множеством простых корней, обозначим через w_U^0 (единственный) элемент максимальной длины в $W(U)$. Тогда $w^0 = w_U^1 w_U^0$. Имеем

$$\langle [\varpi], D \rangle = A(w^0)(\varpi) = A(w^0)(\varpi_U \varpi(U)) = A(w_U^1)A(w_U^0)(\varpi_U \varpi(U)).$$

Так как элемент $\varpi(U)$ является $W(U)$ -инвариантным, то

$$A(w_U^0)(\varpi_U \varpi(U)) = \varpi_U A(w_U^0)(\varpi(U)) = |W(U)|\varpi_U.$$

Поэтому $A(w^0)(\varpi_U \varpi(U)) = |W(U)|A(w_U^1)(\varpi_U) = |W|$, откуда $\langle [\varpi_U], D_U \rangle = |W_U^1| = \chi(K/L)$, как и требовалось.

Теорема 5 обобщает известное утверждение о том, что значение класса ϖ на фундаментальном классе многообразия комплексных флагов, т.е. однородного пространства, определенного парой $(A_{n-1}, \emptyset)$, равно $n!$ (см. [9; п. 14.2]).

Автор благодарен А. Л. Оницику за полезное обсуждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд, С. И. Гельфанд, “Клетки Шуберта и когомологии пространств G/P ”, *УМН*, **28**:3 (1973), 3–26.
- [2] А. Н. Щетинин, “О когомологиях эрмитовых симметрических пространств”, *Матем. заметки*, **74**:6 (2003), 937–946.
- [3] А. Л. Оницик, *Топология транзитивных групп преобразований*, Физматлит, М., 1995.
- [4] Доан Куинь, “Многочлены Пуанкаре компактных однородных римановых пространств с неприводимой стационарной группой”, *Тр. сем. вектор. тензор. анализ.*, **14**, Изд-во МГУ, М., 1968, 33–93.
- [5] С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства*, Факториал Пресс, М., 2005.
- [6] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, Гл. 7–8: Подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли, Мир, М., 1978.
- [7] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, Гл. 9: Компактные вещественные группы Ли, Мир, М., 1986.
- [8] A. Borel, F. Hirzebruch, “Characteristic classes and homogeneous spaces. II”, *Amer. J. Math.*, **81** (1959), 315–382.
- [9] Ф. Хирцебрух, *Топологические методы в алгебраической геометрии*, Мир, М., 1973.

А. Н. Щетинин

Московский государственный технический университет

им. Н. Э. Баумана

E-mail: Sobaka_v_BMW750@mail.ru

Поступило

26.12.2005

Исправленный вариант

18.08.2006