Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Калябин, Критерий
неплотности $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ в $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, *Матем. заметки*, 2007,
том 82, выпуск 2, 315–316

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3793>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 06:20:29

Критерий неплотности $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ в $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$

Г. А. Калябин

Следуя [1], рассмотрим измеримую почти всюду конечную функцию $p(x) \geq 1$, $x \in \mathbb{R}^n$ (показатель суммируемости), и порождаемое ею банахово пространство $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ измеримых функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, таких, что для некоторого $\lambda = \lambda(f) > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} dx \leq 1. \quad (1)$$

Норма Люксембурга в $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ определяется как инфимум тех $\lambda > 0$, для которых выполняется (1).

Хорошо известно [2], что если $\sup p(x) := P_+ < \infty$, то пространство $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ограниченных функций (и даже пространство $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ бесконечно дифференцируемых финитных функций) всюду плотно в $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Бесов в личной беседе по окончании Конгресса общества ISAAC (г. Катания, Италия, июль 2005 г.) высказал предположение, что справедливо и обратное утверждение.

Нашей целью является доказательство обратного утверждения.

ТЕОРЕМА. Если $\text{ess sup } p(x) = \infty$, то пространство ограниченных функций $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ не плотно в $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$; более того, существует такая f , что $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = 1$, и для любой ограниченной функции $g(x)$ норма разности $\|f - g\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем $\mathbb{R}^n$ на последовательность непересекающихся множеств

$$E_k := \{x \in \mathbb{R}^n : k \leq p(x) < k+1\}, \quad k \in \{1, 2, \dots\};$$

по условию для бесконечного множества индексов лебегова мера $\text{meas}_n(E_k) > 0$; множество всех таких индексов обозначим через A . Выберем такие подмножества $E'_k \subset E_k$, $k \in A$, что $0 < \mu_k := \text{meas}_n(E'_k) < 0.5k^{-k-3}$. Для каждого $k \in A$ положительная функция

$$I_k(t) := \int_{E'_k} t^{p(x)} dx, \quad t > 0, \quad (2)$$

непрерывна и строго монотонно возрастает от нуля до $+\infty$, когда t изменяется в тех же пределах; поэтому существует единственное $t_k > 0$, для которого $I_k(t_k) = 0.5k^{-2}$. Отметим, что $t_k > k$, поскольку $I_k(k) \leq k^{k+1}\mu_k < 0.5k^{-2}$.

Далее, определим функцию $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, равенствами

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \bigcup_{k \in A} E'_k, \\ t_k, & \text{если } k \in E'_k, \ k \in A, \end{cases} \quad (3)$$

и покажем, что для нее выполняется заключение теоремы. Во-первых, имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p(x)} dx = \sum_{k \in A} \int_{E'_k} t_k^{p(x)} dx = 0.5 \sum_{k \in A} k^{-2} < 1, \quad (4)$$

и, следовательно, $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq 1$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-01050) и Американского фонда гражданских исследований и развития CRDF (проект SA-014-02).

Далее, пусть $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, т.е. $|g(x)| \leq M$, $M = \text{const}$, при п.в. $x \in \mathbb{R}^n$, и пусть $\lambda \in (0, 1)$; тогда для произвольного $k \in A$, $k \geq k(M) := 2M/(1 - \lambda)$, и всех $x \in E'_k$ с учетом того, что $t_k > k$, получаем соотношения

$$\frac{|f(x) - g(x)|}{\lambda f(x)} \geq \frac{t_k - M}{\lambda t_k} \geq \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{M}{k}\right) \geq \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{1 - \lambda}{2}\right) = \frac{1 + \lambda}{2\lambda} =: \tau > 1. \quad (5)$$

Отсюда в силу (4) и неравенства $p(x) \geq k$, $x \in E'_k$, следует

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x) - g(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx &\geq \sum_{k \in A, k > k(M)} \int_{E'_k} (\tau t_k)^{p(x)} dx \\ &\geq \sum_{k \in A, k > k(M)} \tau^k I_k(t_k) = 0.5 \sum_{k \in A, k > k(M)} \tau^k k^{-2} = +\infty, \end{aligned} \quad (6)$$

а это означает, что $\|f - g\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \geq 1$, выбирая здесь, в частности $g(x) \equiv 0$, заключаем, используя (4), что $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} = 1$, и этим завершается доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема остается справедливой и при замене $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ на пространства $L^{p(\cdot)}(\Omega, d\mu)$, где $(\Omega, d\mu)$ – абстрактное пространство с *неатомической* мерой.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В [3; замечание 4.3] построены *отдельные* примеры таких функций $p(x)$, что множество ограниченных функций с *компактным носителем* не плотно в $L^{p(\cdot)}([0, +\infty))$ или $L^{p(\cdot)}(0, 1)$.

Автор выражает глубокую благодарность С.Г. Самко и Д. Круз-Урибе за полезные консультации.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] S. G. Samko, *Integral Transforms and Spec. Funct.*, **16**:5–6 (2005), 461–482. [2] O. Kovacic, J. Rakosnik, *Czechoslovak Math. J.*, **41 (116)**:4 (1991), 592–618. [3] D. Cruz-Urbe, A. Florenza, “Approximation identities in variable L^p spaces”, *Math. Nachr.*, 2006 (to appear).

Г. А. Калябин

Институт систем обработки
изображений РАН, Самара, Россия
E-mail: kalyabin@lycos.com

Поступило
03.07.2006