Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Менихес, Об одном достаточном условии регуляризуемости линейных обратных задач, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 2, 242–246

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3794>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 05:30:30

Об одном достаточном условии регуляризуемости линейных обратных задач

Л. Д. Менихес

Исследуется регуляризуемость отображений, обратных к линейным непрерывным операторам, действующим из $C(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$. Получено достаточное условие регуляризуемости таких отображений в терминах свойств продолженного оператора. Показано, что в определенном смысле полученное условие является точным.

Библиография: 4 названия.

В статье [1] исследовалась связь регуляризуемости обратных отображений для интегральных операторов из $C[0, 1]$ в $L_2[0, 1]$ со структурой ядра продолженного на $L_2[0, 1]$ оператора. Замеченная связь регуляризуемости с ядром продолженного оператора оказалась весьма плодотворной. В данной работе с помощью этой связи доказывается одно достаточное условие регуляризуемости в определенном смысле неулучшаемое. Несмотря на то, что регуляризуемость отображений определяется в банаховых пространствах, для доказательства рассматриваемого условия приходится покидать рамки банахового анализа и привлекать ненормируемые локально выпуклые пространства.

1. Напомним некоторые определения.

Пусть X, Y – метрические пространства, f – отображение с областью определения $D(f) \subset X$ и множеством значений в Y . Отображение f называется *регуляризуемым*, если существует семейство отображений $\{R_\delta, \delta \in (0, \delta_0)\}$, $R_\delta: X \rightarrow Y$, такое, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\rho(x, x') \leq \delta} \rho(f(x), R_\delta(x')) = 0$$

для любого $x \in D(f)$.

Отображение f называется *B -измеримым первого класса*, если $D(f) = X$ и прообраз любого открытого множества есть множество типа F_σ .

Винокуровым [2] было доказано, что в случае сепарабельного пространства Y отображение f регуляризуемо в том и только том случае, когда $f|_{D(f)}$ является B -измеримым отображением первого класса.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Администрации Челябинской области (грант р 2001 Урал N 01-01-96426).

В данной работе мы изучаем вопрос о регуляризуемости линейных обратных задач, т.е. $f = A^{-1}$, где $A: E \rightarrow F$ – линейное уплотнение (непрерывное и инъективное отображение), E и F – банаховы пространства.

В [1] доказано, что если E_1, E_2, E_3 – банаховы пространства, E_1 сепарабельно и E_2 рефлексивно, $A: E_1 \rightarrow E_2$ и $B: E_2 \rightarrow E_3$ – линейные непрерывные операторы, $\ker B$ – конечномерно, A^{-1} регуляризуемо и BA – инъективный оператор, то отображение $(BA)^{-1}$ регуляризуемо.

Вначале мы обобщим этот результат на случай локально выпуклого пространства E_2 .

Напомним, что локально выпуклое пространство E называется *полурефлексивным*, если каноническое вложение E во второе сопряженное E^{**} является отображением на все E^{**} . Если еще к тому же каноническое отображение является изоморфизмом E на E^{**} с сильной топологией, то E называется *рефлексивным* пространством. Для банаховых пространств полурефлексивность эквивалентна рефлексивности. Однако существуют локально выпуклые полурефлексивные пространства, не являющиеся рефлексивными (см. [3; гл. 4, раздел 5.6]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть E_1, E_3 – банаховы пространства, E_2 – локально выпуклое полурефлексивное пространство, E_1 сепарабельно, $A: E_1 \rightarrow E_2$ и $B: E_2 \rightarrow E_3$ – линейные непрерывные операторы, $A^{-1}|_{A(E_1)}$ – B -измеримое отображение первого класса, $\ker B$ – конечномерное подпространство и $A(E_1) \cap \ker B = \{0\}$. Тогда отображение $(BA)^{-1}$ регуляризуемо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p – естественное отображение $p: E_2 \rightarrow E_2/\ker B$. Тогда оператор B можно представить в виде произведения $B = Cp$, где C – линейный непрерывный инъективный оператор, $C: E_2/\ker B \rightarrow E_3$. Известно (см. [3; гл. 4, раздел 5.7]), что факторпространство полурефлексивного пространства не всегда полурефлексивно, но замкнутое подпространство полурефлексивного пространства полурефлексивно. Поэтому $E_2/\ker B$ будет полурефлексивным пространством в силу конечномерности $\ker B$, так как тогда $\ker B$ дополняемо и $E_2/\ker B$ изоморфно дополнению. Отсюда и из инъективности C получаем

$$\overline{C^*E_3^*} = (E_2/\ker B)^*. \quad (1)$$

Здесь и далее в сопряженных пространствах рассматривается сильная топология. Далее, так как сопряженное к факторпространству $E_2/\ker B$ есть аннулятор ядра $\ker B$ и $\ker B$ конечномерно, то $p^*(E_2/\ker B)^*$ – подпространство конечной коразмерности в E_2^* .

Теперь из (1) следует

$$\begin{aligned} \overline{(BA)^*E_3^*} &= \overline{(CpA)^*E_3^*} \\ &= \overline{A^*p^*C^*E_3^*} \supset A^*\overline{p^*C^*E_3^*} \supset A^*p^*\overline{C^*E_3^*} = A^*p^*(E_2/\ker B)^*. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь мы использовали непрерывность сопряженных операторов в сильной топологии сопряженных пространств (см. [3; гл. 4, раздел 7.4]). B -измеримость первого класса $A^{-1}|_{A(E_1)}$ влечет ненулевую характеристику $A^*E_2^* \subset E_1^*$. Но из (2) следует, что подпространство $\overline{(BA)^*E_3^*} \subset E_1^*$, содержит образ при отображении A^* пространства конечной коразмерности в E_2^* , т.е. $\overline{(BA)^*E_3^*}$ содержит подпространство

конечной коразмерности из $A^*E_2^*$. Так как тотальное подпространство конечного дефекта в подпространстве ненулевой характеристики также имеет ненулевую характеристику, характеристика $(BA)^*E_3^*$ отлична от 0. Но тогда и $(BA)^*E_3^*$ имеет ненулевую характеристику, что влечет регуляризуемость отображения $(BA)^{-1}$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим некоторую конструкцию пространства E_2 . Пусть $\{F_\alpha, \alpha \in I\}$ – семейство полурефлексивных пространств, $E_1 \subset F_\alpha$ для всех $\alpha \in I$; причем множество индексов I является направленным отношением “ $\leq$ ”: $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow F_\beta \subset F_\alpha$. Через $g_{\alpha\beta}$ для $\alpha \leq \beta$ обозначим вложение $g_{\alpha\beta}: F_\beta \rightarrow F_\alpha$, которое предполагается непрерывным. Пространство E_2 определим как проективный предел пространств F_α относительно отображений $g_{\alpha\beta}$: $E_2 = \varprojlim g_{\alpha\beta}F_\beta$.

Ясно, что как множество E_2 представляет собой пересечение $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$, а топология E_2 мажорирует топологию F_α для всех $\alpha \in I$. Точнее, топология E_2 является слабейшей из всех, которые мажорируют все топологии F_α .

2. Теперь обратимся к классическому вопросу о регуляризуемости отображений, обратных к операторам $A: C[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть линейное уплотнение $C: C[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ таково, что оно непрерывно по L_1 -норме и продолжение оператора C по непрерывности на $L_\infty[0, 1]$ имеет конечномерное ядро. Тогда отображение C^{-1} регуляризуемо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если бы пространство $L_\infty[0, 1]$ было бы полурефлексивным, то, положив $E_1 = C[0, 1]$, $E_2 = L_\infty[0, 1]$ и $E_3 = L_2[0, 1]$, мы бы сразу вывели теорему 2 из теоремы 1. Но пространство $L_\infty[0, 1]$ не является полурефлексивным. Однако мы все равно хотим применить теорему 1. В связи с этим, основная идея доказательства состоит в том, чтобы ввести на $L_\infty[0, 1]$ другую топологию, в которой оно станет полурефлексивным пространством. Но это мы должны сделать таким образом, чтобы не нарушить истинность остальных условий теоремы 1.

Итак, применим теорему 1, положив $E_1 = C[0, 1]$, $E_2 = \varprojlim g_{\alpha\beta}F_\beta$, где $F_\beta = L_2(\beta)$, β – абсолютно непрерывная мера, относительно которой стандартная мера Лебега μ также абсолютно непрерывна, $E_3 = L_2[0, 1]$. Сразу заметим, что E_2 – полурефлексивное пространство как проективный предел рефлексивных пространств (см. [3; гл. 4, раздел 5.8]). Здесь применима описанная выше схема построения E_2 в виде проективного предела. В самом деле, все рассматриваемые меры абсолютно непрерывны друг относительно друга, значит, определены вложения $g_{\alpha\beta}: L_2(\beta) \rightarrow L_2(\alpha)$. Напомним, что элемент $L_2(\nu)$ – это класс функций, но здесь классы совпадают, так как множества меры нуль совпадают по разным мерам. Непрерывность вложений легко следует из неравенства

$$\varphi_\alpha(x) \leq c\varphi_\beta(x), \quad (3)$$

где $\varphi_\alpha(x)$ и $\varphi_\beta(x)$ – плотности мер α и β соответственно, выполняющегося почти всюду.

Покажем справедливость неравенства (3). Пусть, напротив, оно неверно. Тогда существует возрастающая последовательность чисел (c_n) такая, что $c_n \rightarrow \infty$, а неравенство

$$\varphi_\alpha(x) > c_n\varphi_\beta(x) \quad (4)$$

выполняется на множестве A_n положительной меры. Обозначим через

$$H_n = A_n \setminus A_{n+1}.$$

Ясно, что можно так выбрать (c_n) , чтобы $\mu(H_n) = \omega_n > 0$. В силу того, что $c_n \rightarrow \infty$, существует последовательность положительных чисел (δ_n) такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_n = \infty. \quad (5)$$

Теперь рассмотрим следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\int_{H_n} \varphi_\beta(x) dx}} \sqrt{\delta_n} & \text{при } x \in H_n, \\ 0 & \text{при } x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n. \end{cases}$$

Из (4) и (5) следует, что $f(x) \in L_2(\beta)$, но $f(x) \notin L_2(\alpha)$, а это противоречит вложению $L_2(\beta) \subset L_2(\alpha)$. Неравенство (3) доказано.

Представим оператор C в виде произведения $C = BA$, где $A: C[0, 1] \rightarrow E_2$ – вложение и $B: E_2 \rightarrow L_2[0, 1]$ – продолжение C по непрерывности. Из условия сразу следует непрерывность B . То, что $A^{-1}|_{A(E_1)}$ – B -измеримое отображение первого класса, следует из известной регуляризуемости обратного отображения для вложения $i: C[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$. Теперь заметим, что как множества, $L_\infty[0, 1]$ и $\varprojlim g_{\alpha\beta} F_\beta$ совпадают. Действительно, это следует из того, что если $f(x) \notin L_\infty[0, 1]$, то существует абсолютно непрерывная мера β на $[0, 1]$, относительно которой стандартная мера Лебега также абсолютно непрерывна и такая, что $f(x) \notin L_2(\beta)$. Таким образом, теорема 2 следует из теоремы 1. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если интегральный оператор $A: C[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ инъективен и его продолжение на $L_\infty[0, 1]$ имеет конечномерное ядро, то A^{-1} регуляризуемо.

В [1] доказан частный случай этого следствия, если пространство $L_\infty[0, 1]$ заменить на $L_2[0, 1]$. Данное следствие существенно усиливает этот частный случай.

3. Теперь объясним, в каком смысле достаточное условие регуляризуемости, рассмотренное в теореме 2, является неулучшаемым. Чтобы каждый раз это не оговаривать, будем рассматривать операторы из $C[0, 1]$ в $L_2[0, 1]$, непрерывные в L_1 -норме.

Теорему 2 и известные ранее аналогичные более слабые результаты можно трактовать как исследование регуляризуемости обратного отображения A^{-1} , исходя из свойств продолженного оператора. Точнее, нас интересует инъективность этого продолжения на некоторые подпространства $L_2[0, 1]$. Во всех этих результатах регуляризуемость A^{-1} следует из инъективности продолжения A на подпространство M . Тогда становится ясным, что чем меньше M , тем более сильным является результат. В этих терминах теорема 2 может быть сформулирована так.

ТЕОРЕМА 2'. Если продолжение линейного уплотнения $C: C[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ на некоторое $M \subset L_2[0, 1]$ инъективно и M – подпространство конечной коразмерности в $L_\infty[0, 1]$, то C^{-1} регуляризуемо.

Этот результат не улучшаем в том смысле, что существует пример (он построен в [4]) интегрального оператора из $C[0, 1]$ в $L_2[0, 1]$, продолжение которого на некоторое подпространство $L_\infty[0, 1]$ бесконечной коразмерности инъективно, но обратное отображение не регуляризуемо.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Д. Менихес, “О регуляризуемости некоторых классов отображений, обратных к интегральным операторам”, *Матем. заметки*, **65**:2 (1999), 222–229.
- [2] В. А. Винокуров, “О понятии регуляризуемости разрывных отображений”, *ЖВМиМФ*, **11**:5 (1971), 1097–1112.
- [3] Х. Шефер, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1971.
- [4] Л. Д. Менихес, “О регуляризуемости отображений, обратных к интегральным операторам”, *Докл. АН СССР*, **241**:2 (1978), 282–285.

Л. Д. Менихес

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

E-mail: men@math.susu.ac.ru

Поступило

21.08.2002

Исправленный вариант

09.11.2006