Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Ладоскин, Структура A_∞ -модуля над алгеброй многочленов в кольцах Стенли–Райснера, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 2, 224–231

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3795>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 15:01:25

УДК 512.541

Структура A_∞ -модуля над алгеброй многочленов в кольцах Стенли–Райснера

М. В. Ладошкин

Доказано, что на кольцах граней простого многогранника не существует нетривиального A_∞ -продолжения структуры модуля над алгеброй многочленов.

Библиография: 9 названий.

В последнее время результаты, полученные в дискретной и комбинаторной геометрии, например в [1], активно используются в алгебраической топологии и как вычислительные средства, и как объекты исследования. Большое количество примеров этого рассматривается, например, в книге [2]. Кроме этого, много приложений в области топологической теории действий торов на топологических многообразиях содержится в книге [3]. Там же A_∞ -структуры вводятся на комплексе Кошуля колец Стенли–Райснера.

A_∞ -пространства, описанные впервые Сташеффом в работе [4], позднее нашли применение в различных вычислительных задачах гомологической алгебры и алгебраической топологии. В работе [5] структуры A_∞ -алгебры и A_∞ -модуля были найдены на гомологиях произвольных заданных над полем алгебры и модуля соответственно. Позднее возможности продолжения дифференциальных и градуированных алгебры и модуля до соответствующих A_∞ -структур были рассмотрены в работах [6]–[9]. В них для исследования строятся комплексы Хохшильда для соответствующих объектов, гомологии которых отвечают за возможность нетривиального продолжения указанных структур.

В данной работе решается вопрос о возможности продолжения структуры модуля M над алгеброй A до структуры A_∞ -модуля для случая, когда модуль M является кольцом граней простого многогранника (кольцом Стенли–Райснера), рассматриваемым как модуль над алгеброй многочленов.

Основной результат работы сформулирован в теореме 2.2, в которой говорится, что на кольцах граней, являющихся фактор-алгебрами алгебры многочленов, не существует нетривиального продолжения до структуры A_∞ -модуля над указанной алгеброй.

Отметим, что в данной работе знаки во всех формулах написаны с учетом стандартного правила знаков при вычислении тензорного произведения отображений на тензорном произведении элементов.

1. A_∞ -структуры и комплекс Хохшильда для модулей над алгебрами.

Напомним определения, связанные с понятиями градуированной A_∞ -алгебры и градуированного A_∞ -модуля над градуированной A_∞ -алгеброй [4]. Во всех формулах в данном пункте суммирование ведется, кроме указанного, также по местам с номером k , на которых стоят операции внутри скобок.

A_∞ -алгеброй называется градуированный модуль A , снабженный набором операций $\{m_i\}: A^{\otimes i} \rightarrow A$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$m_i((A^{\otimes i})_q) \subset A_{q+i-2}, \quad i \geq 2, \quad (1)$$

$$\sum_j (-1)^{(j+1)(k+1)+i} m_{i-j+1}(1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes m_j \otimes \cdots \otimes 1) = 0.$$

Морфизмом из A_∞ -алгебры $(A, \{m_i\})$ в A_∞ -алгебру $(A', \{m'_i\})$ называется семейство гомоморфизмов $\{f_i: A^{\otimes i} \rightarrow A'\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$f_i((A^{\otimes i})_q) \subset A'_{q+i-1}, \quad i \geq 1,$$

$$\begin{aligned} & \sum_j (-1)^{(i-1)+(i-1)(k+1)} f_{i-j+1}(1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes m_j \otimes \cdots \otimes 1) \\ & + \sum_{k_1+\cdots+k_t=i} (-1)^{k_2+k_4+\cdots} m'_t(f_{k_1} \otimes \cdots \otimes f_{k_t}). \end{aligned} \quad (2)$$

Если $f_1 = \text{id}$, то морфизм A_∞ -алгебр является изоморфизмом в категории A_∞ -алгебр.

A_∞ -модулем над A_∞ -алгеброй $(A, \{m_i\})$ называется градуированный модуль M , снабженный набором действий $\{p_i: A^{\otimes i} \otimes M \rightarrow M\}$, $i \geq 1$, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$p_i((A^{\otimes i} \otimes M)_q) \subset M_{q-i+1},$$

$$\begin{aligned} & \sum (-1)^{k(j+1)+i} p_{i-j+1}(1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes m_j \otimes \cdots \otimes 1) \\ & + \sum (-1)^{(i-1)(j-1)} p_{i-j}(1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes p_j) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Морфизмом A_∞ -модулей $(M, \{p_i\})$ и $(M', \{p'_i\})$ соответственно над A_∞ -алгебрами $(A, \{m_i\})$ и $(A', \{m'_i\})$ называется пара семейств гомоморфизмов $\{f_i: A^{\otimes i} \rightarrow A'\}$, $\{g_i: A^{\otimes i} \otimes M \rightarrow M'\}$, $i \geq 0$, где $\{f_i\}$ – морфизм A_∞ -алгебр, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$g_i(A^{\otimes i} \otimes M)_q \subset M'_{q-i},$$

$$\begin{aligned} & \sum (-1)^{k(j-1)+i} g_{i-j+1}(1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes m_j \otimes \cdots \otimes 1) \\ & + \sum (-1)^{j(i+1)+1} g_{i-j}(1 \otimes \cdots \otimes p_j) \\ & + \sum_{k_1+\cdots+k_t=i+1} (-1)^{k_2+k_4+\cdots} p'_t(f_{k_1} \otimes \cdots \otimes f_{k_{t-1}} \otimes g_{k_t}). \end{aligned} \quad (4)$$

Если $f_1 = \text{id}$, $f_i = 0$, при $i > 1$, $g_1 = \text{id}$, то морфизм A_∞ -модулей является изоморфизмом в категории A_∞ -модулей.

Формулы (1), (3) называют *соотношениями Сташеффа* соответственно для градуированных A_∞ -алгебр и градуированных A_∞ -модулей над градуированными A_∞ -алгебрами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. A_∞ -алгебру $(A, \{t_i\})$ будем называть *продолжением* алгебры (A, π) , если отображение m_2 совпадает с умножением π в алгебре. Если все высшие умножения t_i , $i > 2$, равны нулю, то продолжение будем называть *тривиальным*.

В работах [6], [7] описывается комплекс Хохшильда для алгебры, гомологии которого отвечают за возможность нетривиального продолжения алгебры. В частности, показывается, что если гомологии комплекса Хохшильда в размерностях $(n, n-1)$ равны нулю, то для данной алгебры существует, с точностью до изоморфизма A_∞ -алгебр, только тривиальное продолжение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. A_∞ -модуль над алгеброй $(M, \{p_i\})$ будем называть *продолжением* модуля над алгеброй (M, μ) , если отображение p_1 совпадает со структурным действием μ в модуле. Если все высшие действия p_i , $i > 1$, равны нулю, то продолжение будем называть *тривиальным*.

Приведем основные понятия, связанные с комплексом Хохшильда для модулей над алгебрами и его применению к описанию продолжений модуля над алгеброй [9].

Пусть (M, μ) – левый градуированный модуль над алгеброй (A, π) , где структурное отображение $\mu: A \otimes M \rightarrow M$ для модуля M удовлетворяет условию $\mu(1 \otimes \mu) = \mu(\pi \otimes 1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. *Комплексом Хохшильда* для модуля M над алгеброй A будем называть

$$S^*(A, M) = \sum_{n,k} S^{n,k}(A, M),$$

где $S^{n,k}(A, M) = \text{Hom}^k(A^{\otimes n} \otimes M, M)$, а дифференциал $\delta: S^{n,k}(A, M) \rightarrow S^{n+1,k}(A, M)$ определяется формулой

$$\delta f = (-1)^{n+1} \mu(1 \otimes f) + \sum (-1)^{i+n+1} f(1 \otimes \cdots \otimes \pi \otimes \cdots \otimes 1) + f(1 \otimes \cdots \otimes \mu). \quad (5)$$

В [9] доказывается

ТЕОРЕМА 1.1. *Если гомологии комплекса Хохшильда для модулей над алгебрами $H^{n,1-n}(S^*(A, M)) = 0$ при $n > 1$, то любое продолжение модуля M над фиксированной алгеброй A изоморфно тривиальному как A_∞ -модуль над алгеброй A .*

2. Продолжение колец Стенли–Райснера. Приведем определения колец граней из [1]. Пусть P – простой многогранник с t гипергранями $F_1, \dots, F_m$. Это означает, что все его гиперграни находятся в общем положении. Зафиксируем некоторое коммутативное кольцо с единицей k . В нашем случае k является кольцом $\mathbb{Z}$ или полем. Рассмотрим алгебру многочленов от t переменных $k[v_1, \dots, v_m]$. Эту алгебру превратим в градуированную, полагая размерность каждого из v_i равной 2. Будем обозначать полученную градуированную алгебру через $k[m]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Кольцом Стенли–Райснера (или кольцом граней) простого многогранника P называется факторкольцо*

$$k[P] = k[m]/J,$$

где J – идеал, порожденный такими мономами $v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_t}$, для которых выполняется условие $F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_t} = \emptyset$.

В частности, если P – n -мерный симплекс, рассматриваемый как простой многогранник, то идеал J порожден мономом $v_1 v_2 \cdots v_{n+1}$. Если P – трехмерный куб I^3 , то идеал J будет порождаться мономами $v_1 v_4, v_2 v_5, v_3 v_6$.

Пусть $k[n]$ – алгебра многочленов от n переменных степени 2. Эта алгебра будет градуированной, коммутативное умножение в ней мы будем обозначать в дальнейшем знаком $*$. Пусть J – идеал из определения 2.1, т.е. идеал в алгебре, порождающий кольцо граней $k[P]$ некоторого простого многогранника P . Фактор-алгебра $k[P] = k[n]/J$ обладает стандартной структурой модуля над алгеброй, задаваемой проекцией $\text{pr}: k[n] \rightarrow J$, т.е. $\mu: k[n] \otimes k[P] \rightarrow k[P]$ определяется формулой $\mu(f \otimes g) = \text{pr}(f * g)$, где $f \in k[n]$, $g \in k[P]$. Заметим, что $\mu(f \otimes g) = f * g$, если $f \in k[P]$, и $\mu(f \otimes g) = 0$ в противном случае.

Рассмотрим комплекс Хохшильда $S(k[n], k[P])$ для модуля $k[P]$ над алгеброй $k[n]$ (см. определение 1.3 и [5]).

Докажем следующие утверждения, которые будут использованы далее.

ЛЕММА 2.1. *Пусть $f \in S(k[n], k[P])$, $a_i \in k[n]$, $b_j \in k[P]$. Тогда, если $\delta f = 0$, то справедливо равенство*

$$\begin{aligned} & (-1)^{n+1} \mu(a_1 \otimes f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes b_1 \otimes b_2)) \\ & \quad + (-1)^n f(a_1 * a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes b_1 \otimes b_2) + \cdots \\ & \quad + (-1) f(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n * b_1 \otimes b_2) \\ & = (-1)^{n+1} \mu(a_1 \otimes f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes b_2 \otimes b_1)) \\ & \quad + (-1)^n f(a_1 * a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes b_2 \otimes b_1) + \cdots \\ & \quad + (-1) f(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n * b_2 \otimes b_1). \end{aligned} \tag{6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\delta f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes \cdots \otimes b_1 \otimes b_2) = 0$, то, используя (5), получим

$$\begin{aligned} & (-1)^{n+1} \mu(a_1 \otimes f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes b_1 \otimes b_2)) \\ & \quad + (-1)^n f(a_1 * a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes b_1 \otimes b_2) + \cdots \\ & \quad + (-1) f(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n * b_1 \otimes b_2) + f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes b_1 * b_2) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично, так как $\delta f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes \cdots \otimes b_2 \otimes b_1) = 0$, то имеем

$$\begin{aligned} & (-1)^{n+1} \mu(a_1 \otimes f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes b_2 \otimes b_1)) \\ & \quad + (-1)^n f(a_1 * a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes b_2 \otimes b_1) + \cdots \\ & \quad + (-1) f(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n * b_2 \otimes b_1) + f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes b_2 * b_1) = 0. \end{aligned}$$

Так как умножение $*$ коммутативно, то

$$\mu(b_1 \otimes b_2) = b_1 * b_2 = b_2 * b_1 = \mu(b_2 \otimes b_1).$$

Заметив, что тогда

$$f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes b_1 * b_2) = f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes b_2 * b_1),$$

получим требуемое в условии леммы равенство.

ЛЕММА 2.2. Пусть $f \in S(k[n], k[P])$, $a_i \in k[n]$, $b \in k[P]$. Тогда, если $\delta f = 0$, то справедливо равенство

$$\begin{aligned} & (-1)^n f(a_1 * a_2 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes b) + \cdots \\ & + f(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} * a_n \otimes 1 \otimes b) \\ & + (-1)^{n+1} \mu(a_1 \otimes f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1 \otimes b)) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\delta f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1 \otimes b) = 0$, то, используя (5), получим

$$\begin{aligned} & (-1)^{n+1} \mu(a_1 \otimes f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1 \otimes b)) \\ & + (-1)^n f(a_1 * a_2 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes b) + \cdots \\ & + f(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} * a_n \otimes 1 \otimes b) \\ & + (-1) f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n * 1 \otimes b) + f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes \mu(1 \otimes b)) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $a_n * 1 = a_n$, $\mu(1 \otimes b) = b$, то

$$\begin{aligned} & f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes \mu(1 \otimes b)) = f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1 * b) \\ & = f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes b), \\ & (-1) f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n * 1 \otimes b) = (-1) f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n \otimes b) \\ & = (-1) f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes b), \end{aligned}$$

откуда следует требуемое в условии равенство.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $f \in S(k[n], k[P])$. Если $\delta f = 0$, то существует $h \in S(k[n], k[P])$ такое, что $\delta g = f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что $a_i \in k[n]$, $i = 1, \dots, n, n+1$, $b \in k[P]$. Определим $g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes b)$ так, чтобы выполнялось требуемое в теореме условие $\delta g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b) = f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b)$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть a_n и b таковы, что

$$\mu(a_n \otimes b) = 0.$$

Тогда положим

$$g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes b) = -f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes c_n \otimes t \otimes b), \quad (8)$$

где c_n , t определяются условиями $c_n * t = a_n$, $\mu(t \otimes b) = 0$, причем t определяется однозначно по b . Это возможно, поскольку идеал J порожден мономами одной и той же степени. Поскольку $\delta f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes c_{n+1} \otimes t \otimes b) = 0$, то, применяя формулу (5), получим (считаем здесь a_{n+1} удовлетворяющим нашему предположению)

$$\begin{aligned} & (-1)^n \mu(a_1 \otimes f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes c_{n+1} \otimes t \otimes b)) \\ & + (-1)^{n+1} f(a_1 * a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes c_{n+1} \otimes t \otimes b) + \cdots \\ & + f(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n * c_{n+1} \otimes t \otimes b) \\ & + (-1) f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes c_{n+1} * t \otimes b) \\ & + f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes c_{n+1} \otimes \mu(t \otimes b)) = 0. \end{aligned}$$

По определению элементов c_{n+1} , t получим $a_{n+1} = c_{n+1} * t \mu(t \otimes b) = 0$ и

$$f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes c_{n+1} * t \otimes b) = f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1} \otimes b),$$

поэтому из последнего равенства следует, что

$$\begin{aligned} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b) &= (-1)^{n+1} f(a_1 * a_2 \otimes \cdots \otimes c_{n+1} \otimes t \otimes b) + \cdots \\ &+ f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n * c_{n+1} \otimes t \otimes b) \\ &+ (-1)^n \mu(a_1 \otimes f(a_2 \otimes \cdots \otimes c_{n+1} \otimes t \otimes b)). \end{aligned} \quad (9)$$

Применяя формулу (5), получим

$$\begin{aligned} & \delta g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b) \\ &= (-1)^{n+1} \mu(a_1 \otimes g(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b) + (-1)^n g(a_1 * a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b) + \cdots \\ &+ g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} * a_n \otimes a_{n+1} \otimes b) + (-1) g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n * a_{n+1} \otimes b) \\ &+ g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes \mu(a_{n+1} \otimes b))). \end{aligned}$$

Воспользовавшись определением отображения g для каждого из слагаемых, а также учитывая, что $g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes \mu(a_{n+1} \otimes b)) = 0$, получим

$$\begin{aligned} & \delta g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b) \\ &= (-1)^{n+1} \mu(a_1 \otimes (-1) f(a_2 \otimes \cdots \otimes c_{n+1} \otimes t \otimes b) \\ &+ (-1)^{n+1} f(a_1 * a_2 \otimes \cdots \otimes c_{n+1} \otimes t \otimes b) + \cdots \\ &+ (-1) f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} * a_n \otimes c_{n+1} \otimes t \otimes b) \\ &+ f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n * c_{n+1} \otimes t \otimes b)). \end{aligned}$$

Сравнивая полученное выражение с (9), получим

$$\delta g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b) = f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b),$$

что и требовалось показать.

Случай 2. Пусть теперь a_n и b таковы, что $\mu(a_n \otimes b) = a_n * b$. Определим в этом случае

$$g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes b) = f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes b \otimes 1). \quad (10)$$

Покажем, что

$$\delta g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b) = f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b)$$

и в этом случае, когда a_{n+1} и b удовлетворяют условию $\mu(a_n \otimes b) = a_n * b$. Применяя формулу (5) к выражению $\delta g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b)$, получим

$$\begin{aligned} \delta g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b) &= (-1)^{n+1} \mu(a_1 \otimes g(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b)) \\ &\quad + (-1)^n g(a_1 * a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b) + \cdots \\ &\quad + (-1) g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n * a_{n+1} \otimes b) \\ &\quad + g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n \otimes \mu(a_{n+1} \otimes b)). \end{aligned}$$

Учитывая (10) и то, что $\mu(a_{n+1} \otimes b) = a_{n+1} * b$, имеем

$$\begin{aligned} \delta g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b) &= (-1)^{n+1} \mu(a_1 \otimes f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b \otimes 1)) \\ &\quad + (-1)^n f(a_1 * a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b \otimes 1) + \cdots \\ &\quad + (-1) f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n * a_{n+1} \otimes b \otimes 1) \\ &\quad + f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n \otimes a_{n+1} * b \otimes 1). \end{aligned}$$

Применяя к данному выражению лемму 2.1, по формуле (6) получим, считая $b_1 = b$, $b_2 = 1$, а n заменив на $n + 1$,

$$\begin{aligned} \delta g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b) &= (-1)^{n+1} \mu(a_1 \otimes f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes 1 \otimes b)) \\ &\quad + (-1)^n f(a_1 * a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes 1 \otimes b) + \cdots \\ &\quad + (-1) f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} * a_n \otimes a_{n+1} \otimes 1 \otimes b) \\ &\quad + f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1} * 1 \otimes b). \end{aligned}$$

В последнем выражении

$$f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n \otimes a_{n+1} * 1 \otimes b) = f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n \otimes a_{n+1} \otimes b),$$

а к остальным слагаемым в правой части применима лемма 2.2, из которой по формуле (7) (в которой n снова заменено на $n + 1$) следует, что

$$\delta g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b) = f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b),$$

что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Гомологии комплекса Хохшильда $S(k[n], k[P])$ для колец граней, рассматриваемых как модули над алгеброй многочленов, равны нулю.

Из теоремы 1.1 и следствия 2.1 следует

ТЕОРЕМА 2.2. *Для кольца граней $k[P]$ простого многогранника P любое продолжение структуры модуля над алгеброй многочленов $k[n]$ до структуры A_∞ -модуля над $k[n]$ изоморфно тривиальному.*

Автор благодарит С. В. Лапина за помощь в данной работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, Progress in Mathematics, **41**, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.
- [2] П. С. Новиков, *Топология*, РХД, М.-Ижевск, 2002.
- [3] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, М., 2004.
- [4] J. D. Stasheff, “Homotopy associativity of H-space, I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **108** (1963), 275–292; “Homotopy associativity of H-space, II”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **108** (1963), 293–312.
- [5] Т. В. Кадеишвили, “К теории гомологий расслоенных пространств”, *УМН*, **35**:3 (1980), 183–188.
- [6] В. А. Смирнов, “Функтор D для скрещенных тензорных произведений”, *Матем. заметки*, **20**:4 (1976), 465–472.
- [7] Т. В. Кадеишвили, “Структура A_∞ -алгебры и когомологии Хохшильда и Харрисона”, *Сборник работ по теории гомологии*, 4: Общие и конкретные гомологические функторы, Тбилисский математический институт им. А. М. Размадзе. Труды, **91**, Мецниереба, Тбилиси, 1988, 19–27.
- [8] В. А. Смирнов, “ A_∞ -структуры и функтор $\mathcal{D}$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:5 (2000), 147–162.
- [9] М. В. Ладошкин, “ A_∞ -модули над A_∞ -алгебрами и когомологии комплекса Хохшильда для модулей над алгебрами”, *Матем. заметки*, **89**:5 (2006), 717–728.

М. В. Ладошкин

Мордовский государственный университет, г. Саранск

E-mail: m01051977@mail.ru

Поступило

06.06.2006