Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Н. Шириков, Жорданова плоскость над полем положительной характеристики, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 2, 272–292

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3796>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 13:24:32

Жорданова плоскость над полем положительной характеристики

Е. Н. Шириков

В работе описывается первичный спектр и группа автоморфизмов жордановой плоскости над полем ненулевой характеристики. Рассматривается задача продолжения простого идеала центра жордановой плоскости до первичного идеала всей алгебры.

Библиография: 10 названий.

1. Введение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Жордановой плоскостью $\Lambda_2(\mathbb{K})$ над полем $\mathbb{K}$ называется $\mathbb{K}$ -алгебра, порожденная элементами X и Y с определяющим соотношением $YX = XY + Y^2$.

Известно [1], что одночлены $X^\bullet Y^\bullet$ образуют базис алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$. Поэтому любой элемент $w \in \Lambda_2(\mathbb{K})$ можно единственным образом записать в каноническом виде $w = \sum \alpha_{ij} X^i Y^j$. В наших рассуждениях мы предполагаем, что все элементы алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$ записаны именно в такой форме. Тогда мы можем корректно определить $\deg_X w$ – степень по X элемента w , а именно: мы будем говорить, что $\deg_X w = n$, если $w = \sum_{i=0}^n X^i \varphi_i(Y)$, где $\varphi_n \neq 0$. В случаях, когда нас будет интересовать только старший по $\deg_X w$ член элемента w , мы будем использовать следующее обозначение: $w = X^n \varphi_n(Y) + (\deg_X < n)$.

Умножение в алгебре $\Lambda_2(\mathbb{K})$ устроено следующим образом [1].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. Имеет место формула

$$Y^m X^n = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \frac{(m+n-l-1)!}{(m-1)!} X^l Y^{m+n-l}, \quad \text{где } m, n \in \mathbb{N}.$$

В частности, если $w = \sum_{i \geq 0, j \geq 0} \alpha_{ij} X^i Y^j \in \Lambda_2(\mathbb{K})$, то $Yw = \sum_{k \geq 0} w_X^{(k)} Y^{k+1}$, где $w_X^{(k)} = \sum_{i \geq k, j \geq 0} \alpha_{ij} i! / ((i-k)! X^{i-k} Y^j)$ – формальная производная w по X , $wX = Xw + w'_Y Y^2$, где $w'_Y = \sum_{i \geq 0, j \geq 1} j \alpha_{ij} X^i Y^{j-1}$ – формальная производная w по Y .

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00037) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-5666.2006.1).

Из утверждения 1.2 следует, что

$$\deg_X w_1 w_2 = \deg_X w_1 + \deg_X w_2, \quad \text{где } w_1, w_2 \in \Lambda_2(\mathbb{K}) \setminus (0).$$

В частности, $\Lambda_2(\mathbb{K})$ не имеет делителей нуля. Очевидно также, что $\Lambda_2(\mathbb{K})$ – градуированная алгебра: $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$, где $A_0 = \mathbb{K}$, A_n – линейная оболочка мономов степени n .

Интерес к изучению жордановой плоскости объясняется следующими классификационными результатами [1]. Рассмотрим ассоциативные 2-порожденные градуированные алгебры $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$, где $A_0 = \mathbb{K}$ – поле, $A_1 = \langle X, Y \rangle$ – линейная оболочка порождающих X и Y . Пусть также A не имеет делителей нуля и $\dim A_2 = 3$. В работе [1] показано, что при некоторых дополнительных условиях (поле $\mathbb{K}$ не имеет квадратичных расширений и выполняется одно из двух условий на алгебру A : либо алгебра A центральна, либо $\dim A_n = n+1$) существует только два класса таких алгебр: либо $A = \Lambda_1(\lambda, \mathbb{K})$ – алгебра квантовых многочленов от двух переменных (квантовая плоскость) с определяющим соотношением $YX = \lambda XY$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{K}^*$, либо $A = \Lambda_2(\mathbb{K})$ – жорданова плоскость. Известно [1], что эти алгебры не изоморфны. Отметим, что эти алгебры являются кольцами косых многочленов Ore [2], [3].

Квантовая плоскость является частным случаем алгебры квантовых многочленов от нескольких переменных. Такие алгебры достаточно хорошо изучены: описаны первичные идеалы, эндоморфизмы, дифференцирования и действия алгебр Хопфа [4]–[7]. Некоторые интересные свойства квантовой плоскости описываются в работе [8]. Цель настоящей работы – изучение кольцевых свойств жордановой плоскости. Мы рассматриваем первичный спектр и автоморфизмы жордановой плоскости над произвольным полем положительной характеристики (теорема 5.7, теорема 7.2). Случай нулевой характеристики был рассмотрен в работе [1], где были получены следующие основные результаты.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $\text{char } \mathbb{K} = 0$, I – собственный первичный идеал алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$. Тогда либо $I = (Y)$, либо $I = (Y, \psi(X))$ для некоторого неприводимого многочлена $\psi \in \mathbb{K}[X]$.

Таким образом, в алгебре $\Lambda_2(\mathbb{K})$ существует единственный ненулевой минимальный первичный идеал. Следовательно, любой автоморфизм должен оставлять его на месте. Теорема 1.3 позволяет описать группу автоморфизмов жордановой плоскости для случая $\text{char } \mathbb{K} = 0$.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть $\text{char } \mathbb{K} = 0$, $\varphi \in \text{Aut } \Lambda_2(\mathbb{K})$. Тогда $\varphi(X) = \gamma X + g(Y)$, $\varphi(Y) = \gamma Y$ для некоторых $\gamma \in \mathbb{K}^*$ и $g \in \mathbb{K}[Y]$. Группа $\text{Aut } \Lambda_2(\mathbb{K})$ изоморфна группе $\mathbb{K}^* \times \mathbb{K}[Y]$ с операцией $\circ$, где

$$(\gamma_1, g_1(Y)) \circ (\gamma_2, g_2(Y)) = (\gamma_1 \gamma_2, \gamma_2 g_1(Y) + g_2(\gamma_1 Y)).$$

Заметим также, что все первичные идеалы $\Lambda_2(\mathbb{K})$ при $\text{char } \mathbb{K} = 0$ являются вполне первичными, т.е. соответствующие факторалгебры не имеют делителей нуля.

Следующая теорема [1] дает описание центра $Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$ жордановой плоскости в зависимости от характеристики поля $\mathbb{K}$.

ТЕОРЕМА 1.5. *Если $\text{char } \mathbb{K} = 0$, то $Z(\Lambda_2(\mathbb{K})) = \mathbb{K}$; если $\text{char } \mathbb{K} = p > 0$, то $Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$ – это подалгебра, порожденная элементами X^p и Y^p .*

Таким образом, в случае положительной характеристики алгебра $\Lambda_2(\mathbb{K})$ является конечно-порожденным свободным модулем над своим центром. В данной статье мы исследуем некоторые общие свойства идеалов жордановой плоскости над произвольным полем $\mathbb{K}$ положительной характеристики. Мы показываем, что задача описания первичных идеалов алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$ эквивалентна описанию всех простых идеалов алгебры коммутативных многочленов от двух переменных $\mathbb{K}[U, V]$ (теорема 5.7). Можно, однако, найти все минимальные ненулевые первичные идеалы, что позволяет описать группу автоморфизмов $\Lambda_2(\mathbb{K})$ (теорема 7.2). Оказывается, что в случае $\text{char } \mathbb{K} = p > 0$ автоморфизмы имеют такой же вид, как и в случае $\text{char } \mathbb{K} = 0$. Мы также описываем группу автоморфизмов, действующих тождественно на центре алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$ (теорема 7.4).

Традиционно для алгебр с “большим” центром рассматриваются вопросы о связи первичных идеалов всей алгебры и простых идеалов ее центра. Известно (лемма 5.6), что если I – первичный идеал алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$, то $\tilde{I} = I \cap Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$ – простой идеал алгебры $Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$. В данной работе мы решаем обратную задачу, а именно: мы доказываем, что если $\tilde{I}$ – собственный простой идеал центра $Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$, то существует и единственный такой первичный идеал $I \triangleleft \Lambda_2(\mathbb{K})$, что $\tilde{I} = I \cap Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$ (утверждение 6.1).

В работе приводится пример первичного, но не вполне первичного идеала (пример 5.2).

2. Основные определения и общие утверждения. Напомним определение первичного идеала [2], [9]. Пусть R – ассоциативное кольцо.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Кольцо R называется *первичным*, если из равенства $aRb = (0)$ для некоторых элементов $a, b \in R$ следует, что $a = 0$ или $b = 0$.

Для проверки первичности мы будем использовать следующее эквивалентное определение.

ЛЕММА 2.2. *Кольцо R первично тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующему условию: если A, B – двусторонние идеалы кольца R и $AB = (0)$, то либо $A = (0)$, либо $B = (0)$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Двусторонний идеал I кольца R называется *первичным*, если R/I – первичное кольцо, т.е. из равенства $aRb \subset I$ для некоторых элементов $a, b \in R$ следует, что $a \in I$ или $b \in I$. Множество всех первичных идеалов кольца R называется *первичным спектром* кольца и обозначается $\text{Spec}(R)$.

Для идеалов лемму 2.2 можно переформулировать следующим образом.

ЛЕММА 2.4. *Идеал I кольца R первичен тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующему условию: если A, B – двусторонние идеалы кольца R и $AB \subset I$, то либо $A \subset I$, либо $B \subset I$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Нам понадобится следующее отрицание первичности идеала: если идеал I не является первичным, то существуют такие двусторонние идеалы A и B , что $I \subset A, B$, $I \neq A, B$, но $AB \subset I$. В самом деле, если идеал I не является первичным, то по лемме 2.4 существуют такие двусторонние идеалы A_1 и B_1 , что $A_1 \not\subset I$ и $B_1 \not\subset I$, но $A_1 B_1 \subset I$. Положим $A = A_1 + I$, $B = B_1 + I$. Тогда $I \subset A, B$, $I \neq A, B$, но $AB = (A_1 + I)(B_1 + I) \subset I$, что и требовалось доказать.

В коммутативном случае первичное кольцо – это в точности кольцо без делителей нуля, а понятие первичного идеала совпадает с понятием простого идеала. В общем случае это неверно: кольцо без делителей нуля является первичным, однако существуют примеры первичных колец, в которых есть делители нуля (пример 5.2). Аналогом простых идеалов в некоммутативном случае являются вполне первичные идеалы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Двусторонний идеал I кольца R называется *вполне первичным*, если R/I – кольцо без делителей нуля.

Нам также понадобятся следующие утверждения о многочленах над полем ненулевой характеристики. Здесь мы предполагаем, что $\mathbb{K}$ – поле, $\text{char } \mathbb{K} = p > 0$, где p – фиксированное простое число, и $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{K}$. Через $\mathbb{N}_0$ здесь и далее мы будем обозначать множество, состоящее из всех натуральных чисел и нуля.

ЛЕММА 2.7. Пусть $\psi \in \mathbb{K}[t]$, $n\psi(t) = \psi'(t)t$, $n \in \mathbb{N}_0$, причем $n \equiv q \pmod{p}$, $0 \leq q \leq p - 1$. Тогда $\psi(t) = \tilde{\psi}(t^p)t^q$ для некоторого многочлена $\tilde{\psi} \in \mathbb{K}[t]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\psi(t) = \sum_{i=0}^l \alpha_i t^i, \quad \alpha_l \neq 0.$$

Так как $n\psi(t) = \psi'(t)t$, то $n \sum_{i=0}^l \alpha_i t^i = \sum_{i=0}^l i \alpha_i t^i$, т.е. $(n - i)\alpha_i = 0$, $0 \leq i \leq l$. Если $\alpha_i \neq 0$, то $i \equiv n \pmod{p}$. Следовательно,

$$\psi(t) = \sum_{i \equiv q \pmod{p}} \alpha_i t^i = \tilde{\psi}(t^p)t^q,$$

что и требовалось доказать.

Обозначим $\sqrt[p]{\mathbb{K}} = \{\alpha \in \mathbb{K} \mid \alpha^p \in \mathbb{K}\}$, т.е. $\sqrt[p]{\mathbb{K}}$ – это множество корней степени p из элементов поля $\mathbb{K}$. Легко проверить, что $\sqrt[p]{\mathbb{K}}$ – поле, $\mathbb{K} \subseteq \sqrt[p]{\mathbb{K}}$. В следующих утверждениях мы без ограничения общности предполагаем, что старшие коэффициенты всех рассматриваемых многочленов равны 1.

ЛЕММА 2.8. Пусть $a \in \mathbb{K}[t]$ – неприводимый многочлен. Тогда $a(t^p) = (b(t))^p$, где $b \in \sqrt[p]{\mathbb{K}[t]}$ – неприводимый многочлен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a(t) = \sum \alpha_i t^i$, где $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Существуют такие элементы $\beta_i \in \sqrt[p]{\mathbb{K}}$, что $\beta_i^p = \alpha_i$. Пусть $b(t) = \sum \beta_i t^i \in \sqrt[p]{\mathbb{K}[t]}$. Тогда

$$(b(t))^p = \left(\sum \beta_i t^i \right)^p = \sum \alpha_i t^{pi} = a(t^p).$$

Предположим, что b раскладывается в кольце $\sqrt[p]{\mathbb{K}[t]}$ на нетривиальные множители, т.е. $b = b_1 b_2$, где $b_1, b_2 \in \sqrt[p]{\mathbb{K}[t]} \setminus \mathbb{K}$. Но тогда

$$a(t^p) = (b(t))^p = (b_1(t))^p (b_2(t))^p,$$

где $(b_i(t))^p = a_i(t^p)$ для некоторых многочленов $a_i \in \mathbb{K}[t] \setminus \mathbb{K}$, $i = 1, 2$. Тогда $a = a_1 a_2$, что противоречит неприводимости многочлена a .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.9. Пусть $a \in \mathbb{K}[t]$ – неприводимый многочлен. Тогда либо многочлен $a(t^p)$ также неприводим в кольце $\mathbb{K}[t]$, либо $a(t^p) = (b(t))^p$, где $b \in \mathbb{K}[t]$ – неприводимый многочлен. В частности, число различных неприводимых делителей многочлена $a(t^p)$ в кольце $\mathbb{K}[t]$ равно единице.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $c \in \mathbb{K}[t]$ – некоторый делитель многочлена $a(t^p)$, причем $0 < \deg c(t) < \deg a(t^p)$. По лемме 2.8 $a(t^p) = (b(t))^p$ для некоторого неприводимого многочлена $b \in \sqrt[p]{\mathbb{K}[t]}$. Тогда $c = b^s$, где $1 \leq s \leq p-1$. Следовательно, $(s, p) = 1$, т.е. $us + vp = 1$ для некоторых $u, v \in \mathbb{Z}$. Тогда в поле $\sqrt[p]{\mathbb{K}(t)}$ имеет место следующее равенство: $b = b^{us+vp} = (b^s)^u (b^p)^v \in \mathbb{K}(t)$. Значит, $b \in \mathbb{K}[t]$.

СЛЕДСТВИЕ 2.10. Пусть $f \in \mathbb{K}[t]$ и $a \in \mathbb{K}[t]$ – неприводимый делитель многочлена $f(t^p)$ в кольце $\mathbb{K}[t]$. Тогда либо $a(t) = p(t^p)$ для некоторого $p \in \mathbb{K}[t]$, либо $f(t^p)$ делится на $(a(t))^p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(t) = p_1(t)p_2(t) \cdots p_s(t)$ – разложение $f(t)$ на простые множители. Тогда $f(t^p) = p_1(t^p)p_2(t^p) \cdots p_s(t^p)$, где по утверждению 2.9 либо многочлен $p_i(t^p)$ неприводим, либо $p_i(t^p) = (q_i(t))^p$ для некоторого неприводимого многочлена $q_i \in \mathbb{K}[t]$, $1 \leq i \leq s$. Отсюда либо $a(t) = p_i(t^p)$, либо $a(t) = q_i(t)$. В последнем случае $f(t^p)$ делится на $(a(t))^p$.

3. Простые идеалы кольца многочленов от двух переменных. Нам понадобится следующее самое общее описание простых идеалов кольца $\mathbb{K}[U, V]$ многочленов от двух переменных над полем $\mathbb{K}$. Заметим, что здесь мы не накладываем никаких условий на характеристику поля $\mathbb{K}$.

Пусть $I \triangleleft \mathbb{K}[U, V]$. Определим минимальный многочлен f идеала I . Для этого заметим, что $\mathbb{K}[U, V] = \mathbb{K}[V][U]$, т.е. элементы кольца $\mathbb{K}[U, V]$ можно рассматривать как многочлены от U с коэффициентами из кольца $\mathbb{K}[V]$. Теперь рассмотрим многочлены минимальной степени по U , лежащие в $I \setminus \{0\}$. Среди всех таких многочленов выберем тот, у которого старший коэффициент, являющийся многочленом от V , имеет минимальную степень и старший коэффициент 1. Проверим, что это определение корректно.

ЛЕММА 3.1. Минимальный многочлен идеала $I \triangleleft \mathbb{K}[U, V]$ определяется однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что

$$f = \sum_{i=0}^n U^i \varphi_i(V) \quad \text{и} \quad g = \sum_{i=0}^n U^i \psi_i(V)$$

– различные минимальные многочлены идеала I . Тогда по определению минимального многочлена $\deg \varphi_n = \deg \psi_n$ и старшие коэффициенты многочленов $\varphi_n(V)$ и $\psi_n(V)$ равны единице. Тогда

$$f - g = \sum_{i=0}^n U^i (\varphi_i(V) - \psi_i(V)) \in I \setminus \{0\},$$

где либо $\deg_U(f - g) < n$, либо $\deg_U(f - g) = n$ и $\deg(\varphi_n - \psi_n) < \deg \varphi_n$. Значит, многочлены f и g не являются минимальными, противоречие.

Пусть $I \triangleleft \mathbb{K}[U, V]$ – собственный простой идеал, $f = \sum_{i=0}^n U^i \varphi_i(V)$ – его минимальный многочлен. Так как идеал I простой, то многочлен f неприводим.

ЛЕММА 3.2. *Если $n = 0$, т.е. $f \in \mathbb{K}[V]$, то либо $I = (f)$, либо $I = (f, g)$, где $g = g(U, V) = U^s + \sum_{i=0}^{s-1} U^i \psi_i(V)$, причем $s \geq 1$, $\deg \psi_i < \deg f$, где $1 \leq i \leq s-1$, и многочлен g неприводим. В последнем случае g – многочлен минимальной степени по U в множестве $I \setminus (f)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $I \neq (f)$. Так как многочлен f неприводим, то $\mathbb{K}[V]/(f)$ является полем. Тогда

$$\mathbb{K}[U, V]/(f) \cong \left(\mathbb{K}[V]/(f) \right)[U]$$

является кольцом главных идеалов, т.е. $I/(f) = (g_1 + (f))$ для некоторого $g_1 \in \mathbb{K}[U, V]$. Тогда $I = (f, g_1)$, причем g_1 – многочлен минимальной степени по U в множестве $I \setminus (f)$. В самом деле, пусть $\deg d_1 = s$ и $h \in I \setminus (f)$. Так как $h + (f) \in (g_1 + (f))$, то $h + (f) = (g_1 + (f))(a + (f))$ для некоторых многочленов $a, b \in \mathbb{K}[U, V]$, причем $a + (f) \neq 0$ в $\mathbb{K}[U, V]/(f)$ т.е. $f \nmid a$. Тогда $h = g_1 a + f b$. Пусть

$$a = \sum_{i=1}^m U^i \alpha_i(V), \quad b = \sum U^i \beta_i(V),$$

причем без ограничения общности можно считать, что $f \nmid \alpha_m$. Тогда коэффициент при U^{m+s} в многочлене h равен $\alpha_m + f \beta_{m+s} \neq 0$. Значит,

$$\deg_U h \geq m + s \geq s = \deg_U g_1.$$

Пусть

$$g_1 = g_1(U, V) = \sum_{i=0}^s U^i \varphi_i(V).$$

Так как $I \neq (f)$, то без ограничения общности можно считать, что $f \nmid \varphi_s$. Так как многочлен f неприводим, то $(f, \varphi_s) = 1$. Тогда существуют такие многочлены $a, b \in \mathbb{K}[V]$, что $a f + b \varphi_s = 1$. Тогда

$$U^s f a + g b = U^s + \sum_{i=0}^{s-1} U^i b \varphi_i \in I.$$

В частности, $s \geq 1$. Действительно, если $s = 0$, то $1 = U^s f a + g b \in I$, откуда $I = \mathbb{K}[U, V]$, что неверно, так как I – собственный идеал. Далее, обозначим остаток от деления $b\varphi_i$ на f через ψ_i , $0 \leq i \leq s-1$. Положим $g = U^s + \sum_{i=0}^{s-1} U^i \psi_i$. Тогда $g \in I$ и $\deg \psi_i < \deg f$, $1 \leq i \leq s-1$. Проверим, что $(f, g) = (f, g_1) = I$. В самом деле, $g_1 - g\varphi_s \in I$ и $\deg_U(g_1 - g\varphi_s) < s$. Но g_1 – многочлен минимальной степени по U в множестве $I \setminus (f)$. Следовательно, $g_1 - g\varphi_s \in (f)$, так что $(f, g) = (f, g_1) = I$. Остается заметить, что из простоты идеала I следует неприводимость многочлена g в кольце $\mathbb{K}[U, V]$.

ЛЕММА 3.3. Если $n \in \mathbb{N}$, то $I = (f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим локализованное кольцо

$$R = \mathbb{K}[U, V]_{\varphi_n(V)} = (\mathbb{K}[V]_{\varphi_n(V)})[U].$$

Если $h \in \mathbb{K}[U, V]$, то в кольце R имеем $h \equiv \sum_{i < n} U^i \beta_i(V) \pmod{(f)}$ для некоторых $\beta_i \in \mathbb{K}[V]_{\varphi_n(V)}$. Следовательно, существует такое $N \in \mathbb{N}$, что в $\mathbb{K}[U, V]$ имеем $h\varphi_n^N \equiv \sum_{i < n} U^i \alpha_i(V) \pmod{(f)}$ для некоторых $\alpha_i \in \mathbb{K}[V]$. Пусть теперь $h \in I$. Тогда $\sum_{i < n} U^i \alpha_i(V) \in I$, откуда $\sum_{i < n} U^i \alpha_i(V) = 0$ в силу выбора f . Итак, $h\varphi_n^N \in (f)$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Отсюда в силу неприводимости многочлена f получаем, что $h \in (f)$. Значит, $I = (f)$.

ЛЕММА 3.4. Пусть многочлены f и g удовлетворяют условиям леммы 3.2 и $I = (f, g)$ – простой идеал. Тогда I – максимальный идеал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из вида f и g следует, что $\mathbb{K}[U, V]/I$ порождается как линейное пространство над $\mathbb{K}$ всеми одночленами $U^i V^j$, где $0 \leq i \leq s-1$, $1 \leq j \leq \deg f - 1$. Так как идеал I простой, то $\mathbb{K}[U, V]/I$ – конечномерная коммутативная алгебра с единицей и без делителей нуля. Но тогда $\mathbb{K}[U, V]/I$ является полем [10]. Следовательно, идеал I является максимальным.

Эти результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $\mathbb{K}$ – поле, $I \triangleleft \mathbb{K}[U, V]$ – собственный простой идеал. Тогда либо $I = (f)$ для некоторого неприводимого многочлена $f \in \mathbb{K}[U, V]$, либо $I = (f, g)$, где

$$f = f(V), \quad g = g(U, V) = U^s + \sum_{i=0}^{s-1} U^i \psi_i(V),$$

причем $s \geq 1$, $\deg \psi_i < \deg f$, где $1 \leq i \leq s-1$, и многочлены f и g неприводимы. В последнем случае g – многочлен минимальной степени по U в множестве $I \setminus (f)$. Простые идеалы вида $I = (f, g)$ являются максимальными.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Для любого неприводимого многочлена $f \in \mathbb{K}[U, V]$ идеал (f) является простым. Однако в общем случае не все идеалы вида $I = (f, g)$ являются простыми. Пусть, например, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $f = V^2 + 1$, $g = U^2 + 1$. Очевидно, многочлены f и g удовлетворяют условиям теоремы 3.5. Но $f - g = V^2 - U^2 = (V - U)(V + U)$, где $V \pm U \notin I$. Если же поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, то I является собственным простым идеалом в том и только том случае, если либо $I = (f)$ для некоторого неприводимого многочлена $f \in \mathbb{K}[U, V]$, либо $I = (V - \alpha, U - \beta)$ для некоторых

$\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Действительно, если $I = (f, g)$, где f и g удовлетворяют условиям теоремы 3.5, и $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, то $f = V - \alpha$, $g = U - \beta$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ и, следовательно, $\mathbb{K}[U, V]/I \cong \mathbb{K}$, т.е. I – простой идеал.

4. Минимальный многочлен собственного идеала жордановой плоскости. Восстановление идеала по минимальному многочлену. Теперь исследуем некоторые общие свойства идеалов алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$. Пусть I – собственный идеал алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$. Как и в п. 3, определим *минимальный многочлен* идеала I . Напомним [1], что одночлены $X^\bullet Y^\bullet$ образуют базис алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$, так что любой элемент $w \in \Lambda_2(\mathbb{K})$ можно единственным образом записать в каноническом виде $w = \sum \alpha_{ij} X^i Y^j$, и в наших рассуждениях мы предполагаем, что все элементы алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$ записаны именно в такой форме. Тогда мы можем корректно определить $\deg_X w$ – степень по X элемента w , а именно: мы будем говорить, что $\deg_X w = n$, если $w = \sum_{i=0}^n X^i \varphi_i(Y)$, где $\varphi_n \neq 0$. Итак, определим минимальный многочлен идеала I следующим образом: рассмотрим многочлены минимальной степени по X , лежащие в $I \setminus \{0\}$. Среди всех таких многочленов выберем многочлен, старший коэффициент которого, т.е. многочлен от Y , имеет минимальную степень и старший коэффициент 1. Как и в случае кольца $\mathbb{K}[U, V]$, нетрудно показать, что минимальный многочлен идеала определен однозначно (лемма 3.1).

Далее мы везде предполагаем, что $\text{char } \mathbb{K} = p > 0$, где p – фиксированное простое число, и $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{K}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. Пусть I – собственный идеал алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$, $f(X, Y)$ – его минимальный многочлен. Тогда $f(X, Y) = \tilde{f}(X^p, Y^p) Y^q$, где $\tilde{f}(X^p, Y^p) \in Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$, $0 \leq q \leq p - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что $f = \sum_{i=0}^r X^{pi} \psi_i(Y)$ для некоторого $r \geq 0$. Пусть $f = \sum_{i=0}^m X^i \psi_i(Y)$, где $\psi_m \neq 0$. Если $m = 0$, то $f = \psi_0(Y)$. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Положим $f_1 = \sum_{p \nmid i} X^i \psi_i(Y)$, $f_2 = \sum_{p \mid i} X^i \psi_i(Y)$. Тогда $f = f_1 + f_2$, причем $Y f_2 = f_2 Y$. Докажем, что $f_1 = 0$. Допустим противное. Тогда $\deg_X f_1 = m_1$, $p \nmid m_1$, $\psi_{m_1} \neq 0$. По утверждению 1.2

$$\begin{aligned} Y f - f Y &= Y f_1 - f_1 Y = \sum_{k \geq 1} (f_1)_X^{(k)} Y^{k+1} \\ &= m_1 X^{m_1-1} \psi_{m_1}(Y) + (\deg_X < m_1 - 1) \in I, \end{aligned}$$

т.е. $\deg_X(Y f_1 - f_1 Y) = m_1 - 1 < m$, что противоречит определению многочлена f . Итак, $f = \sum_{i=0}^r X^{pi} \psi_{pi}(Y)$ для некоторого $r \in \mathbb{N}_0$. Переобозначим ψ_{pi} через ψ_i . Тогда $f = \sum_{i=0}^r X^{pi} \psi_i(Y)$. Отметим, что $Y f = f Y$. Пусть $\psi_r(Y) = \sum_{j=0}^n a_j Y^j$. По определению минимального многочлена $a_n = 1$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $n = 0$. Так как идеал I собственный, то $r \geq 1$. Тогда $f = X^{pr} + \sum_{i=0}^{r-1} X^{pi} \psi_i(Y)$, $f X - X f \in I$. По утверждению 1.2

$$f X - X f = \sum_{i=0}^{r-1} X^{pi} \psi'_i(Y) Y^2,$$

т.е. $\deg_X(f X - X f) < pr$. По определению многочлена f получаем, что $f X = X f$. Следовательно, $f \in Z(\Lambda_2(\mathbb{K})) \setminus \mathbb{K}$.

Случай 2: $n \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$g = fX - Xf \in I, \quad S = nfY - g \in I, \quad T = a_{n-1}f - S \in I.$$

По утверждению 1.2

$$\begin{aligned} g &= f'_Y Y^2 = \sum_{i=0}^r X^{pi} \psi'_i(Y) Y^2, \\ S &= \sum_{i=0}^r X^{pi} (n\psi_i(Y)Y - \psi'_i(Y)Y^2), \\ T &= \sum_{i=0}^r X^{pi} (a_{n-1}\psi_i(Y) - (n\psi_i(Y)Y - \psi'_i(Y)Y^2)). \end{aligned}$$

Коэффициенты при X^{pr} в S и T равны

$$\sum_{j=0}^n (n-j)a_j Y^{j+1} \quad \text{и} \quad a_{n-1}a_0 + \sum_{j=1}^n (a_{n-1}a_j - (n-(j-1))a_{j-1})Y^j$$

соответственно. При $j = n$ получаем

$$a_{n-1}a_j - (n-(j-1))a_{j-1} = a_{n-1} - (n-(n-1))a_{n-1} = 0,$$

т.е. степень старшего коэффициента многочлена T меньше n . По определению многочлена f получаем, что $T = 0$. В частности, коэффициент при X^{pr} в T равен нулю, т.е. $a_{n-1}a_0 + \sum_{j=1}^n (a_{n-1}a_j - (n-(j-1))a_{j-1})Y^j = 0$. Следовательно, $a_{n-1}a_0 = 0$, $a_{n-1}a_j - (n-(j-1))a_{j-1} = 0$, $1 \leq j \leq n-1$, т.е.

$$a_{n-1}a_0 = 0,$$

$$a_{n-1}a_1 = na_0,$$

$$a_{n-1}a_2 = (n-1)a_1,$$

...

$$a_{n-1}a_{n-2} = 3a_{n-3},$$

$$a_{n-1}^2 = 2a_{n-2}.$$

Тогда $a_{n-1} = 0$. Действительно, предположим, что $a_{n-1} \neq 0$. Тогда $a_0 = 0$, следовательно, $a_1 = 0$, откуда $a_2 = 0$, и т.д. Поэтому $a_{n-2} = 0$, и из последнего уравнения получаем, что $a_{n-1} = 0$, противоречие. Итак, $a_{n-1} = 0$. Тогда $0 = T = a_{n-1}f - S = -S$, т.е. $n\psi_i(Y)Y = \psi'_i(Y)Y^2$, где $0 \leq i \leq r$. По лемме 2.7 получаем, что $\psi_i(Y) = \tilde{\psi}_i(Y^p)Y^q$ для некоторых многочленов $\tilde{\psi}_i \in \mathbb{K}[t]$, где $0 \leq i \leq r$ и $n \equiv q \pmod{p}$, $0 \leq q \leq p-1$. Окончательно имеем

$$f = \sum_{i=0}^r X^{ip} \tilde{\psi}_i(Y^p) Y^q = \left(\sum_{i=0}^r X^{ip} \tilde{\psi}_i(Y^p) \right) Y^q = \tilde{f}(X^p, Y^p) Y^q,$$

где $\tilde{f}(X^p, Y^p) = \sum_{i=0}^r X^{ip} \tilde{\psi}_i(Y^p) \in Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$. Утверждение 4.1 доказано полностью.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть I – собственный идеал алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$. Тогда

$$I \cap Z(\Lambda_2(\mathbb{K})) \neq (0),$$

т.е. любой собственный идеал алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$ является продолжением некоторого собственного идеала подалгебры $Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По утверждению 4.1 минимальный многочлен идеала I имеет вид $f = \tilde{f}(X^p, Y^p)Y^q$, где $\tilde{f}(X^p, Y^p) \in Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$, $0 \leq q \leq p-1$. Тогда $fY^{p-q} \in I \cap Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$, $fY^{p-q} \neq 0$. Очевидно, что $I \cap Z(\Lambda_2(\mathbb{K})) \triangleleft Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$.

Отметим, что по минимальному многочлену мы не всегда можем однозначно восстановить идеал. Например, $f = Y^p$ является минимальным многочленом идеалов (Y^p) и (X^p, Y^p) . Однако по минимальному многочлену мы можем восстановить некоторые свойства идеала, а именно имеет место следующее утверждение, которое ниже мы будем использовать при доказательстве первичности некоторых идеалов алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.3. Пусть I – собственный идеал алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$, $f(X, Y) = \tilde{f}(X^p, Y^p)Y^q$ – его минимальный многочлен, где $\tilde{f}(X^p, Y^p) \in Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$, $0 \leq q \leq p-1$, причем $\deg_X f = rp$, $r \in \mathbb{N}$. Пусть $\tilde{h}$ – неприводимый делитель многочлена $\tilde{f}$ в кольце $\mathbb{K}[U, V]$, причем $\deg_U \tilde{h} \geq 1$. Тогда $I \subseteq (\tilde{h}(X^p, Y^p))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f = \sum_{i=0}^r X^{ip} \tilde{\psi}_i(Y^p)Y^q$ и $g \in I$. Сначала докажем, что $g(\tilde{\psi}_r(Y^p)Y^q)^N = \tilde{f}(X^p, Y^p)w$ для некоторых $N \in \mathbb{N}_0$ и $w \in \Lambda_2(\mathbb{K})$. Индукция по $\deg_X g$. Если $\deg_X g < rp$, то $g = 0$ в силу минимальности многочлена f . Предположим, что для многочленов из идеала I , степень которых по X меньше z , где $z \geq rp$, наше утверждение верно. Пусть $g = \sum_{i=0}^z X^i \varphi_i(Y) \in I$. Тогда $S = g\tilde{\psi}_r(Y^p)Y^q - X^{z-pr} f \varphi_z(Y) \in I$, причем $\deg_X S < z$. По предположению индукции для некоторых $N_1 \in \mathbb{N}_0$ и $w_1 \in \Lambda_2(\mathbb{K})$ выполняется равенство $S(\tilde{\psi}_r(Y^p)Y^q)^{N_1} = \tilde{f}(X^p, Y^p)w_1$. Тогда

$$(g\tilde{\psi}_r(Y^p)Y^q - X^{z-pr} f \varphi_z(Y))(\tilde{\psi}_r(Y^p)Y^q)^{N_1} = \tilde{f}(X^p, Y^p)w_1,$$

откуда

$$g(\tilde{\psi}_r(Y^p)Y^q)^{N_1+1} = \tilde{f}(X^p, Y^p)(X^{z-pr} Y^q \varphi_z(Y)(\tilde{\psi}_r(Y^p)Y^q)^{N_1} + w_1).$$

Напомним [1], что одночлены $X^\bullet Y^\bullet$ образуют базис алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$, так что любой элемент $w \in \Lambda_2(\mathbb{K})$ можно единственным образом записать в каноническом виде $w = \sum \alpha_{ij} X^i Y^j$. Тогда можно корректно определить изоморфизм линейных пространств

$$\rho: \Lambda_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}[X_1, Y_1], \quad \rho\left(\sum_{i \geq 0, j \geq 0} \alpha_{ij} X^i Y^j\right) = \sum_{i \geq 0, j \geq 0} \alpha_{ij} X_1^i Y_1^j.$$

Отображение ρ не является гомоморфизмом алгебр, однако

$$\begin{aligned} \rho(g(X, Y)(\tilde{\psi}_r(Y^p)Y^q)^N) &= g(X_1, Y_1)(\tilde{\psi}_r(Y_1^p)Y_1^q)^N, \\ \rho(\tilde{f}(X^p, Y^p)w(X, Y)) &= \tilde{f}(X_1^p, Y_1^p)w(X_1, Y_1). \end{aligned}$$

Следовательно, в коммутативном кольце $\mathbb{K}[X_1, Y_1]$ выполняется тождество

$$g(X_1, Y_1)(\tilde{\psi}_r(Y_1^p)Y_1^q)^N = \tilde{f}(X_1^p, Y_1^p)w(X_1, Y_1).$$

Проверим, что в кольце $\mathbb{K}[X_1, Y_1]$ многочлены $(\tilde{\psi}_r(Y_1^p)Y_1^q)^N$ и $\tilde{h}(X_1^p, Y_1^p)$ взаимно просты. Предположим противное. Тогда существует такой неприводимый над $\mathbb{K}$ многочлен $d(Y_1)$, что $\tilde{h}(X_1^p, Y_1^p) : d(Y_1)$. Пусть

$$\tilde{h}(X_1^p, Y_1^p) = \sum_{i=0}^s X_1^{ip} \tilde{\varphi}_i(Y_1^p).$$

Тогда $\tilde{\varphi}_i(Y_1^p) : d(Y_1)$, $0 \leq i \leq s$. Так как многочлен $\tilde{h}$ неприводим в кольце $\mathbb{K}[U, V]$, то $d(Y_1)$ нельзя представить как многочлен от Y_1^p . Тогда по следствию 2.10 имеем $\tilde{\varphi}_i(Y_1^p) : (d(Y_1))^p$, $0 \leq i \leq s$. Пусть $(d(Y_1))^p = \tilde{d}(Y_1^p)$, $\tilde{d}(V) \in \mathbb{K}[V]$. Значит, $\tilde{\varphi}_i(V) : \tilde{d}(V)$, $0 \leq i \leq s$, т.е. $\tilde{h}(U, V) : \tilde{d}(V)$. Но $\deg_U \tilde{h} \geq 1$ и многочлен $\tilde{h}$ неприводим в кольце $\mathbb{K}[U, V]$. Противоречие. Итак, в кольце $\mathbb{K}[X_1, Y_1]$ многочлены $(\tilde{\psi}_r(Y_1^p)Y_1^q)^N$ и $\tilde{h}(X_1^p, Y_1^p)$ взаимно просты. Тогда из равенства $g(X_1, Y_1)(\tilde{\psi}_r(Y_1^p)Y_1^q)^N = \tilde{f}(X_1^p, Y_1^p) \times w(X_1, Y_1)$ получаем, что $g(X_1, Y_1) = \tilde{h}(X_1^p, Y_1^p)w_1(X_1, Y_1)$ для некоторого $w_1(X_1, Y_1) \in \mathbb{K}[X_1, Y_1]$. Так как

$$\begin{aligned} g(X_1, Y_1) &= \rho(g(X, Y)), \\ \tilde{h}(X_1^p, Y_1^p)w_1(X_1, Y_1) &= \rho(\tilde{h}(X^p, Y^p)w_1(X, Y)) \end{aligned}$$

и отображение ρ биективно, то $g(X, Y) = \tilde{h}(X^p, Y^p)w_1(X, Y)$. Следовательно, получаем $g(X, Y) \in (\tilde{h}(X^p, Y^p))$.

Утверждение 4.3 позволяет выделить случай, когда по минимальному многочлену идеал восстанавливается однозначно, а именно имеет место следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Пусть I – собственный идеал алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$, $f = \tilde{f}(X^p, Y^p)$ – его минимальный многочлен, где $\tilde{f} \in \mathbb{K}[U, V]$, причем $\deg_U \tilde{f} \geq 1$ и многочлен $\tilde{f}$ неприводим в кольце $\mathbb{K}[U, V]$. Тогда $I = (\tilde{f}(X^p, Y^p))$.

Отметим еще один важный для нас случай, когда по минимальному многочлену можно установить вид системы порождающих идеала.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.5. Пусть I – собственный идеал алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$, $f = \tilde{f}(Y^p)$ – его минимальный многочлен, причем $\tilde{f}$ неприводим в кольце $\mathbb{K}[V]$ и $f \neq Y^p$. Тогда либо $I = (f)$, либо

$$I = \left(f, X^{ps} + \sum_{i=0}^{s-1} X^{pi} \tilde{\varphi}_i(Y^p) \right),$$

где $s \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I \neq (f)$. В множестве $I \setminus (f)$ рассмотрим многочлены минимальной степени по X . Пусть эта степень равна m . Тогда $m \geq 1$. В самом деле, если $m = 0$, то существует такой многочлен $w \in I \setminus (f)$, что $\deg_X w = 0$, т.е. $w = w(Y)$. Разделим с остатком w на f : $w = fq + r$, где $r \neq 0$, так как $w \notin (f)$. Тогда $\deg r < \deg f$ и $r \in I$, что противоречит определению многочлена f . Итак, $m \geq 1$.

Выберем такой многочлен

$$g = \sum_{i=0}^m X^i \varphi_i(Y) \in I \setminus (f),$$

что $\varphi_m = 1$. Для этого рассмотрим в $\mathbb{K}[Y]$ подмножество J всех таких многочленов η , что

$$X^m \eta(Y) + \sum_{i=0}^{m-1} X^i \eta_i(Y) \in I$$

для некоторых $\eta_0, \dots, \eta_{m-1} \in \mathbb{K}[Y]$. Тогда $J \triangleleft \mathbb{K}[Y]$. Так как $\mathbb{K}[Y]$ – кольцо главных идеалов, то $J = (\psi(Y))$. Следовательно,

$$g = X^m \psi(Y) + \sum_{i=0}^{m-1} X^i \varphi_i(Y) \in I$$

для некоторых $\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1} \in \mathbb{K}[Y]$. Так как

$$hX - Xh = h'_Y Y^2 = X^m \psi'(Y) Y^2 + \sum_{i=0}^{m-1} X^i \varphi'_i(Y) Y^2 \in I,$$

то $\psi'(Y) Y^2 \in J$. Отсюда $\psi'(Y) Y^2 = \psi(Y)(\alpha Y + \beta)$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Пусть $\psi(Y) = \sum_{i=0}^n a_i Y^i$, $a_n \neq 0$. Выберем минимальный индекс j такой, что $a_j \neq 0$, т.е. $a_i = 0$ для всех $i < j$. В равенстве $\psi'(Y) Y^2 = \psi(Y)(\alpha Y + \beta)$ рассмотрим коэффициенты при Y^j : $(j-1)a_{j-1} = \alpha a_{j-1} + \beta a_j$. Отсюда $\beta = 0$, $\psi'(Y) Y^2 = \alpha \psi(Y) Y$, $\psi'(Y) Y = \alpha \psi(Y)$. Сравнивая старшие коэффициенты, получаем, что $\alpha = n$. Тогда по лемме 2.7 $\psi(Y) = \tilde{\psi}(Y^p) Y^q$, где $0 \leq q \leq p-1$, $n \equiv q \pmod{p}$. Далее, $f \in J$, так как $X^m f(Y) \in I$. Значит, $\tilde{f}(Y^p) : \tilde{\psi}(Y^p) Y^q$. Так как многочлен $\tilde{f}$ неприводим в кольце $\mathbb{K}[V]$ и $f \neq Y^p$, то $(f, Y) = 1$. Следовательно, $q = 0$, $\psi(Y) = \tilde{\psi}(Y^p)$, $\tilde{f} : \tilde{\psi}$, так что либо $\psi = 1$, либо $\psi = f$. В силу минимальности m существует такой многочлен $\sum_{i=0}^m X^i \omega_i(Y) \in I \setminus (f)$, что $\omega_m \notin (f)$. Так как $\omega_m(Y) \in J = (\psi(Y))$, то $\psi = 1$. Итак,

$$g = X^m + \sum_{i=0}^{m-1} X^i \varphi_i(Y) \in I \setminus (f).$$

Разделим многочлены φ_i с остатком на f : $\varphi_i = f q_i + r_i$, где $\deg r_i < \deg f$, $0 \leq i \leq s-1$. Тогда

$$X^m + \sum_{i=0}^{m-1} X^i r_i(Y) \in I \setminus (f).$$

Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\deg \varphi_i < \deg f$, $0 \leq i \leq m-1$.

Итак, в множестве $I \setminus (f)$ мы выбрали многочлен

$$g = X^m + \sum_{i=0}^{m-1} X^i \varphi_i(Y)$$

минимальной степени по X , причем $\deg \varphi_i < \deg f$, $0 \leq i \leq m-1$. Положим $g_1 = \sum_{p \nmid i} X^i \varphi_i(Y)$ и докажем, что $g_1 = 0$. Предположим противное. Тогда $\deg g_1 = m_1$, $p \nmid m_1$, $\varphi_{m_1} \neq 0$, причем по утверждению 1.2

$$Yg - gY = Yg_1 - g_1Y = m_1 X^{m_1-1} \varphi_{m_1}(Y) Y^2 + (\deg_X < m_1) \in I.$$

Тогда $Yg_1 - g_1Y \in (f)$ в силу минимальности m . В частности, $\varphi_{m_1}(Y) Y^2 \in (f)$. Так как $(f, Y) = 1$, то $\varphi_{m_1} \in (f)$, где $\deg \varphi_{m_1} < \deg f$. Но тогда $\varphi_{m_1} = 0$, противоречие. Следовательно, $g_1 = 0$, $m = ps$ и $g = \sum_{i=0}^s X^{ip} \varphi_{ip}(Y)$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$. Переобозначим φ_{ip} через φ_i . Тогда

$$g = X^{ps} + \sum_{i=0}^{s-1} X^{ip} \varphi_i(Y).$$

Рассмотрим

$$gX - Xg = g'_Y Y^2 = \sum_{i=0}^{s-1} X^{ip} \varphi'_i(Y) Y^2 \in I.$$

Тогда $gX - Xg \in (f)$ в силу минимальности m , т.е. $\varphi'_i(Y) Y^2 \in (f)$, $0 \leq i \leq s-1$. Так как $(f, Y) = 1$, то $\varphi'_i \in (f)$, где $\deg \varphi_i < \deg f$. Отсюда $\varphi'_i = 0$, т.е. $\varphi_i = \tilde{\varphi}_i(Y^p)$ для некоторых $\tilde{\varphi}_i \in \mathbb{K}[t]$. Итак,

$$g = X^{ps} + \sum_{i=0}^{s-1} X^{ip} \tilde{\varphi}_i(Y^p).$$

Осталось проверить, что $I = (f, g)$. Пусть $h \in I$. Индукцией по $\deg_X h$ докажем, что $h \in (f, g)$. Если $\deg_X h < m$, то $h \in (f)$ в силу минимальности m . Предположим, что для многочленов из идеала I , степень которых по X меньше z , где $z \geq m$, наше утверждение верно. Пусть

$$h = \sum_{i=0}^z X^i \eta_i(Y) \in I.$$

Тогда

$$h = \sum_{i=0}^{sp-1} X^i \eta_i(Y) + \sum_{i \geq sp} \left(g - \sum_{j=0}^{s-1} X^{jp} \tilde{\varphi}_j(Y^p) \right) X^{i-sp} \eta_i(Y) = gw_1 + w_2$$

для некоторых $w_1, w_2 \in \Lambda_2(\mathbb{K})$, причем $w_2 \in I$ и $\deg_X w_2 < z$. Тогда то по предположению индукции $w_2 \in (f, g)$. Тогда $h \in (f, g)$, что и требовалось доказать.

5. Первичные идеалы жордановой плоскости. Пример первичного, но не вполне первичного идеала. Основываясь на результатах п. 4, мы можем описать спектр жордановой плоскости над полем положительной характеристики. Сначала мы докажем первичность некоторых собственных идеалов, а затем – что других собственных первичных идеалов не существует. При доказательстве первичности мы будем использовать лемму 2.4 и замечание 2.5. Мы построим пример первичных, но не вполне первичных идеалов.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. Пусть $I = (\tilde{f}(X^p, Y^p))$, где $\deg_U \tilde{f} \geq 1$ и многочлен $\tilde{f}$ неприводим в кольце $\mathbb{K}[U, V]$. Тогда $I \in \text{Спец}(\Lambda_2(\mathbb{K}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. По лемме 2.4 существуют такие идеалы A и B , что $A, B \not\subseteq I$, но $AB \subset I$. Пусть f_A и f_B – минимальные многочлены идеалов A и B соответственно. По утверждению 4.1

$$f_A(X, Y) = \tilde{f}_A(X^p, Y^p)Y^{q_1}, \quad f_B(X, Y) = \tilde{f}_B(X^p, Y^p)Y^{q_2},$$

где $\tilde{f}_A(X^p, Y^p), \tilde{f}_B(X^p, Y^p) \in Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$, $0 \leq q_1, q_2 \leq p-1$. Тогда $f_A f_B \in I$, т.е.

$$\tilde{f}_A(X^p, Y^p) \tilde{f}_B(X^p, Y^p) Y^{q_1+q_2} = \tilde{f}(X^p, Y^p) w(X, Y)$$

для некоторого $w \in \Lambda_2(\mathbb{K})$. Так же, как и в доказательстве утверждения 4.3, можно показать, что в кольце $\mathbb{K}[X_1, Y_1]$ имеет место тождество

$$\tilde{f}_A(X_1^p, Y_1^p) \tilde{f}_B(X_1^p, Y_1^p) Y_1^{q_1+q_2} = \tilde{f}(X_1^p, Y_1^p) w(X_1, Y_1).$$

Так как $\deg_U \tilde{f} \geq 1$ и многочлен $\tilde{f}$ неприводим в кольце $\mathbb{K}[U, V]$, то

$$(Y_1^{q_1+q_2}, \tilde{f}(X_1^p, Y_1^p)) = 1$$

в кольце $\mathbb{K}[X_1, Y_1]$. Тогда $\tilde{f}_A(X_1^p, Y_1^p) \tilde{f}_B(X_1^p, Y_1^p) : \tilde{f}(X_1^p, Y_1^p)$. Так как многочлен $\tilde{f}$ неприводим в кольце $\mathbb{K}[U, V]$, то либо $\tilde{f}_A : \tilde{f}$, либо $\tilde{f}_B : \tilde{f}$. Но тогда по утверждению 4.3 либо $A \subseteq I$, либо $B \subseteq I$ соответственно. Полученное противоречие доказывает, что идеал I является первичным.

ПРИМЕР 5.2. Утверждение 5.1 позволяет построить примеры первичных, но не вполне первичных идеалов. Так, идеалы $I_\alpha = (X^p + \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_p$, первичны, так как многочлены $U + \alpha$, очевидно, неприводимы в $\mathbb{K}[U, V]$, но по малой теореме Ферма $X^p + \alpha = (X + \alpha)^p$, т.е. в факторалгебре $\Lambda_2(\mathbb{K})/I_\alpha$ есть делители нуля.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.3. Пусть $I = (\tilde{f}(Y^p))$, где $\tilde{f}(V) \neq V$ и многочлен $\tilde{f}(V)$ неприводим в кольце $\mathbb{K}[V]$. Тогда идеал I является первичным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. По замечанию 2.5 существуют такие идеалы A и B , что $I \subset A, B$, $I \neq A, B$, но $AB \subset I$. Пусть f_A и f_B – минимальные многочлены идеалов A и B соответственно. Так как $f(Y) \in A, B$, то минимальные многочлены f_A и f_B зависят только от Y . По утверждению 4.1 имеем $f_A = \tilde{f}_A(Y^p)Y^{q_1}$, $f_B = \tilde{f}_B(Y^p)Y^{q_2}$, причем $\deg f_A, \deg f_B \leq \deg f$. Тогда $f_A f_B \in I$, т.е. $\tilde{f}_A(Y^p) \tilde{f}_B(Y^p) Y^{q_1+q_2} = \tilde{f}(Y^p) w_1(Y)$ для некоторого $w_1 \in \mathbb{K}[Y]$. Так как $\tilde{f}(V) \neq V$, то $(Y^{q_1+q_2}, \tilde{f}(Y^p)) = 1$, т.е. $\tilde{f}_A(Y^p) \tilde{f}_B(Y^p) : \tilde{f}(Y^p)$, т.е. $\tilde{f}_A(V) \tilde{f}_B(V) : \tilde{f}(V)$. Так как многочлен $\tilde{f}(V)$ неприводим в кольце $\mathbb{K}[V]$, то либо $\tilde{f}_A : \tilde{f}$, либо $\tilde{f}_B : \tilde{f}$. Пусть, например, $\tilde{f}_A : \tilde{f}$. Так как $\deg f_A \leq \deg f$, то $\tilde{f}_A = \tilde{f}$, $q_1 = 0$. Так как $A \neq I$, то по утверждению 4.5

$$A = \left(f, X^{ps_1} + \sum_{i=0}^{s_1-1} X^{pi} \tilde{\varphi}_i(Y^p) \right),$$

где $s_1 \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\left(X^{ps_1} + \sum_{i=0}^{s_1-1} X^{pi} \tilde{\varphi}_i(Y^p) \right) \tilde{f}_B(Y^p) Y^{q_2} = \tilde{f}(Y^p) w_2(X, Y)$$

для некоторого $w_2(X, Y) \in \Lambda_2(\mathbb{K})$. Сравнивая коэффициенты при X^{ps_1} , получаем, что $\tilde{f}_B(Y^p) Y^{q_2} : \tilde{f}(Y^p)$. Далее аналогичными рассуждениями получаем, что

$$B = \left(f, X^{ps_2} + \sum_{i=0}^{s_2-1} X^{pi} \tilde{\psi}_i(Y^p) \right), \quad s_2 \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \left(X^{ps_1} + \sum_{i=0}^{s_1-1} X^{pi} \tilde{\varphi}_i(Y^p) \right) \left(X^{ps_2} + \sum_{i=0}^{s_2-1} X^{pi} \tilde{\psi}_i(Y^p) \right) \\ &= X^{p(s_1+s_2)} + (\deg_X < p(s_1+s_2)) \in (\tilde{f}(Y^p)), \end{aligned}$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает, что идеал I первичный.

Далее нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 5.4. Пусть $I = (f, g)$, где $f = \tilde{f}(Y^p)$, $s \in \mathbb{N}$, $g = X^{ps} + \sum_{i=0}^{s-1} X^{pi} \tilde{\varphi}_i(Y^p)$, $w(X, Y) \in I$, причем $\deg_X w < sp$. Тогда $w \in (f)$. В частности, g — многочлен минимальной степени по X из множества $I \setminus (f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $w = fw_1 + gw_2$, где

$$w_1 = \sum_{i=0}^n X^i a_i(Y), \quad w_2 = \sum_{i=0}^m X^i b_i(Y).$$

Допустим, что $w_2 \notin (f)$. Тогда существует такой коэффициент b_i , что $f \nmid b_i$. Выберем наибольший такой индекс i_0 , что $f \nmid b_{i_0}$, т.е. $b_i : f$ для всех $i > i_0$. Сравнивая коэффициенты при X^{ps+i_0} в выражении $w = fw_1 + gw_2$, получаем

$$0 = a_{i_0+sp} f + b_{i_0} + \tilde{\varphi}_{s-1} b_{i_0+p} + \cdots + \tilde{\varphi}_0 b_{i_0+sp},$$

где $\tilde{\varphi}_{s-1} b_{i_0+p} + \cdots + \tilde{\varphi}_0 b_{i_0+sp} : f$. Тогда $b_{i_0} : f$, что противоречит нашим предположениям. Следовательно, $w_2 \in (f)$, что и требовалось доказать.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.5. Пусть $I = (f, g)$, где $f = f(Y) = \tilde{f}(Y^p)$, $\tilde{f}(V) \neq V$,

$$g = g(X, Y) = \tilde{g}(X^p, Y^p) = X^{ps} + \sum_{i=0}^{s-1} X^{pi} \tilde{\varphi}_i(Y^p), \quad \text{где } s \in \mathbb{N},$$

многочлены $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ неприводимы в кольце $\mathbb{K}[U, V]$ и $(\tilde{f}(V), \tilde{g}(U, V))$ — простой идеал в кольце $\mathbb{K}[U, V]$. Тогда I — первичный идеал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. По замечанию 2.5 в алгебре $\Lambda_2(\mathbb{K})$ существуют такие идеалы A и B , что $I \subset A, B$, $I \neq A, B$, но $AB \subset I$. Пусть f_A и f_B – минимальные многочлены идеалов A и B соответственно. Так как $f(Y) \in A, B$, то минимальные многочлены f_A и f_B зависят только от Y . По утверждению 4.1 $f_A = \tilde{f}_A(Y^p)Y^{q_1}$, $f_B = \tilde{f}_B(Y^p)Y^{q_2}$, причем $\deg f_A, \deg f_B \leq \deg f$. Далее, $f_A f_B \in (I)$, и по лемме 5.4 $f_A f_B \in (f)$, т.е.

$$\tilde{f}_A(Y^p)\tilde{f}_B(Y^p)Y^{q_1+q_2} = \tilde{f}(Y^p)w_1(Y)$$

для некоторого $w_1 \in \mathbb{K}[Y]$. Так как многочлен $\tilde{f}$ неприводим в кольце $\mathbb{K}[U, V]$ и $\tilde{f}(V) \neq V$, то $(Y^{q_1+q_2}, \tilde{f}(Y^p)) = 1$, т.е.

$$\tilde{f}_A(Y^p)\tilde{f}_B(Y^p) : \tilde{f}(Y^p), \quad \tilde{f}_A(V)\tilde{f}_B(V) : \tilde{f}(V).$$

Так как многочлен $\tilde{f}(V)$ неприводим в кольце $\mathbb{K}[V]$, то либо $\tilde{f}_A : \tilde{f}$, либо $\tilde{f}_B : \tilde{f}$. Пусть, например, $\tilde{f}_A : \tilde{f}$. Так как $\deg f_A \leq \deg f$, то $\tilde{f}_A = \tilde{f}$, $q_1 = 0$. Так как $g \in I \subset A$, то $A \neq (f)$. Значит, по утверждению 4.5 $A = (f, g_1)$,

$$g_1 = X^{ps_1} + \sum_{i=0}^{s_1-1} X^{pi} \tilde{\alpha}_i(Y^p), \quad \text{где } s_1 \in \mathbb{N}.$$

Так как $I \neq A$, то $g_1 \notin I$, так что

$$\tilde{I} = I \cap Z(\Lambda_2(\mathbb{K})) \subsetneq A \cap Z(\Lambda_2(\mathbb{K})).$$

По лемме 5.4 g_1 – многочлен минимальной степени по X из множества $A \setminus (f)$. Так как $g \in A \setminus (f)$, то $1 \leq s_1 \leq s$. Предположим, что $s = s_1$. Тогда по лемме 5.4

$$g - g_1 = \sum_{i=0}^{s-1} X^{pi} (\tilde{\varphi}_i(Y^p) - \tilde{\alpha}_i(Y^p)) \in (f).$$

Тогда $I = (f, g) = (f, g_1) = A$, противоречие. Итак, $1 \leq s_1 < s$. Тогда по лемме 5.4

$$g_1 f_B = X^{ps_1} f_B + \sum_{i=0}^{s_1-1} X^{pi} \tilde{\alpha}_i(Y^p) f_B \in (f),$$

т.е. $f_B \in (f)$. Отсюда аналогично предыдущему рассуждению получаем, что

$$\tilde{I} \subsetneq B \cap Z(\Lambda_2(\mathbb{K})).$$

Очевидно, $Z(\Lambda_2(\mathbb{K})) \neq \tilde{I} \supseteq (\tilde{f}(Y^p), \tilde{g}(X^p, Y^p))$. По лемме 3.4 идеал $(\tilde{f}(Y^p), \tilde{g}(X^p, Y^p))$ является максимальным в $Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$. Следовательно, $\tilde{I} = (\tilde{f}(Y^p), \tilde{g}(X^p, Y^p))$. Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \tilde{I} \subsetneq A \cap Z(\Lambda_2(\mathbb{K})), \quad \tilde{I} \subsetneq B \cap Z(\Lambda_2(\mathbb{K})), \\ (A \cap Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))) (B \cap Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))) \subseteq \tilde{I}, \end{aligned}$$

где $(\tilde{f}(V), \tilde{g}(U, V))$ – простой идеал в кольце $\mathbb{K}[U, V]$, противоречие.

Итак, утверждение 5.1, утверждение 5.3 и утверждение 5.5 дают примеры ненулевых первичных идеалов жордановой плоскости над полем положительной характеристики. Очевидно, что идеалы, указанные в теореме 1.3, также являются первичными. Несложно проверить, что все эти идеалы являются собственными. Теперь, используя свойства минимального многочлена, мы докажем, что других собственных первичных идеалов нет. Нам понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА 5.6. Пусть Λ – ассоциативная $\mathbb{K}$ -алгебра с единицей, $I \triangleleft \Lambda$ – первичный идеал, $Z(\Lambda)$ – центр алгебры Λ . Тогда $\tilde{I} = I \cap Z(\Lambda)$ – простой идеал в подалгебре $Z(\Lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a, b \in Z(\Lambda)$ и $ab \in \tilde{I} \subset I$. Тогда $a\Lambda b = ab\Lambda \subset I$. Так как идеал I первичен, то либо $a \in I$, либо $b \in I$. Но $a, b \in Z(\Lambda)$. Значит, либо $a \in \tilde{I}$, либо $b \in \tilde{I}$. Следовательно, $\tilde{I}$ – простой идеал в подалгебре $Z(\Lambda)$, что и требовалось доказать.

Заметим, что обратное в общем случае неверно. Так, идеал (Y^p) является простым в подалгебре $Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$ и не является первичным в $\Lambda_2(\mathbb{K})$.

Докажем теперь основной результат работы.

ТЕОРЕМА 5.7. Пусть $\text{char } \mathbb{K} = p > 0$, I – собственный первичный идеал алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$. Тогда выполнено одно из следующих условий:

- (i) $I = (Y)$;
- (ii) $I = (Y, \psi(X))$ для некоторого неприводимого многочлена $\psi \in \mathbb{K}[X]$;
- (iii) $I = (\tilde{f}(X^p, Y^p))$ для некоторого неприводимого многочлена $f \in \mathbb{K}[U, V]$, $\tilde{f} \neq V$;
- (iv) $I = (\tilde{f}(Y^p), \tilde{g}(X^p, Y^p))$ для некоторых таких неприводимых многочленов $\tilde{f} \in \mathbb{K}[V]$ и $\tilde{g} \in \mathbb{K}[U, V]$, что $\tilde{f} \neq V$, $\tilde{g} = U^s + \sum_{i=0}^{s-1} U^i \tilde{\psi}_i(V)$, где $s \in \mathbb{N}$, и $(\tilde{f}(V), \tilde{g}(U, V))$ – простой идеал в кольце $\mathbb{K}[U, V]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I – собственный первичный идеал алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$, f – его минимальный многочлен. По утверждению 4.1 $f(X, Y) = \tilde{f}(X^p, Y^p)Y^q$, где $\tilde{f}(X^p, Y^p) \in Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$, $0 \leq q \leq p-1$. Рассмотрим 2 случая.

Случай 1: $\tilde{f}(X^p, Y^p) \in \mathbb{K}$. Так как идеал I собственный, то $1 \leq q \leq p-1$. Так как идеал I первичный, то $q = 1$, т.е. $Y \in I$. Предположим, что $I \neq (Y)$. Любой элемент алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$ можно единственным образом представить в виде $w(X, Y)Y + \varphi(X)$. Если $w(X, Y)Y + \varphi(X) \in I$, то $\varphi(X) \in I$. Следовательно, $I \cap \mathbb{K}[X] \neq (0)$. Так как $\mathbb{K}[X]$ – кольцо главных идеалов, то $I \cap \mathbb{K}[X] = (\psi(X))$. Тогда $I = (Y, \psi(X))$. Далее, $\Lambda_2(\mathbb{K})/I$ – первичное кольцо и $\Lambda_2(\mathbb{K})/I \cong \mathbb{K}[X]/(\psi(X))$. Следовательно, многочлен $\psi(X)$ неприводим.

Случай 2: $\tilde{f}(X^p, Y^p) \in Z(\Lambda_2(\mathbb{K})) \setminus \mathbb{K}$. Если $q \geq 1$, то $\tilde{f}(X^p, Y^p) \notin I$, $Y^q \notin I$, но $\tilde{f}(X^p, Y^p)\Lambda_2(\mathbb{K})Y^q \subseteq I$, что неверно. Значит, $q = 0$, т.е. $f(X, Y) = \tilde{f}(X^p, Y^p)$. Так как идеал I первичный, то многочлен $\tilde{f}(U, V)$ неприводим в кольце $\mathbb{K}[U, V]$. Если $\deg_U \tilde{f} \in \mathbb{N}$, то по следствию 4.4 $I = (\tilde{f}(X^p, Y^p))$. Пусть $\deg_U \tilde{f} = 0$, т.е. $f = \tilde{f}(Y^p)$. Так как $I \in \text{Спец}(\Lambda_2(\mathbb{K}))$, то $\tilde{f} \neq V$. Тогда по утверждению 4.5 либо $I = (\tilde{f}(Y^p))$, т.е. I – идеал вида (iii), либо $I = (\tilde{f}(Y^p), \tilde{g}(X^p, Y^p))$ для некоторого неприводимого

многочлена

$$\tilde{g} \in \mathbb{K}[U, V], \quad \tilde{g} = U^s + \sum_{i=0}^{s-1} U^i \tilde{\psi}_i(V), \quad \text{где } s \in \mathbb{N}.$$

Остается доказать, что в последнем случае $(\tilde{f}(V), \tilde{g}(U, V))$ – простой идеал в $\mathbb{K}[U, V]$. По лемме 5.6 $\tilde{I} = I \cap Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$ – простой идеал подалгебры $Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$. Так как f – минимальный многочлен идеала I , то $\tilde{f}(Y^p)$ – минимальный многочлен идеала $\tilde{I}$. По лемме 5.4 $\tilde{g}(X^p, Y^p)$ – многочлен минимальной степени по X из множества $I \setminus (f)$, так что $\tilde{g}(X^p, Y^p)$ – многочлен минимальной степени по X^p в множестве $\tilde{I} \setminus (f(Y^p))$. Тогда по лемме 3.2

$$\tilde{I} = (\tilde{f}(Y^p), \tilde{g}_1(X^p, Y^p)), \quad \text{где } \tilde{g}_1 = U^s + \sum_{i=0}^{s-1} U^i \tilde{\varphi}_i(V).$$

Тогда в силу минимальности s получаем, что $\tilde{g}(X^p, Y^p) - \tilde{g}_1(X^p, Y^p) \in (f(Y^p))$. Следовательно,

$$\tilde{I} = (\tilde{f}(Y^p), \tilde{g}_1(X^p, Y^p)) = (\tilde{f}(Y^p), \tilde{g}(X^p, Y^p)),$$

что и требовалось доказать.

6. Продолжение простого идеала центра до первичного идеала алгебры. Если I – первичный идеал алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$, то по лемме 5.6 $\tilde{I} = I \cap Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$ – простой идеал ее центра. Рассмотрим обратную задачу.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.1. Пусть $\tilde{I} \triangleleft \mathbb{K}[X^p, Y^p]$ – собственный простой идеал. Тогда существует и притом единственный такой первичный идеал $I \triangleleft \Lambda_2(\mathbb{K})$, что $\tilde{I} = I \cap Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3.5 достаточно рассмотреть следующие случаи.

Случай 1: если $\tilde{I} = (Y^p)$, то по теореме 5.7 имеем $I = (Y)$.

Случай 2: если $\tilde{I} = (\tilde{f}(X^p, Y^p))$, где многочлен $\tilde{f} \in \mathbb{K}[U, V]$ неприводим и $\tilde{f} \neq V$, то по теореме 5.7 имеем $I = (\tilde{f}(X^p, Y^p))$.

Случай 3: пусть $\tilde{I} = (Y^p, \tilde{g}(X^p))$, где многочлен $\tilde{g} \in \mathbb{K}[U]$ неприводим. Если $I \in \text{Спец}(\Lambda_2(\mathbb{K}))$ и $\tilde{I} = I \cap Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$, то $Y^p \in I$. Тогда $Y \in I$. Следовательно, $I = (Y, \psi(X))$, где $\psi \in \mathbb{K}[X]$ – неприводимый многочлен, причем $\psi(X) | \tilde{g}(X^p)$. По утверждению 2.9 такой многочлен ψ единственный, так что идеал I определяется единственным образом. Остается проверить, что $\tilde{I} = I \cap Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$. Очевидно, $Z(\Lambda_2(\mathbb{K})) \supsetneq I \cap Z(\Lambda_2(\mathbb{K})) \supset \tilde{I}$. По лемме 3.4 $\tilde{I}$ – максимальный в $Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$. Следовательно, $\tilde{I} = I \cap Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$.

Случай 4: $\tilde{I} = (\tilde{f}(Y^p), \tilde{g}(X^p, Y^p))$, где многочлены

$$\tilde{f}(V) \neq V \quad \text{и} \quad \tilde{g}(U, V) = U^s + \sum_{i=0}^{s-1} U^{s-1-i} \tilde{\psi}_i(V), \quad s \geq 1,$$

неприводимы. По теореме 5.7 условие $\tilde{I} = I \cap Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$ может выполняться только для идеала $I = (\tilde{f}(Y^p), \tilde{g}(X^p, Y^p))$. Необходимо только проверить, что $\tilde{I} = I \cap Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$. Как и в случае 3, получаем, что $Z(\Lambda_2(\mathbb{K})) \supsetneq I \cap Z(\Lambda_2(\mathbb{K})) \supset \tilde{I}$, и по лемме 3.4 $\tilde{I}$ – максимальный в $Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$. Следовательно, $\tilde{I} = I \cap Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$. Утверждение 6.1 доказано полностью.

7. Автоморфизмы. Используя результаты п. 5 о первичных идеалах, мы опишем группу автоморфизмов жордановой плоскости над произвольным полем ненулевой характеристики. Оказывается, что в случае $\text{char } \mathbb{K} = p > 0$ автоморфизмы имеют такой же вид, что и в случае $\text{char } \mathbb{K} = 0$ (теорема 1.4). Мы также опишем подгруппу автоморфизмов, сохраняющих центр алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Из утверждения 1.2 следует, что элемент Y порождает идеал (Y) не только как двусторонний идеал, но и как правый (левый) $\Lambda_2(\mathbb{K})$ -модуль, т.е.

$$\Lambda_2(\mathbb{K})Y\Lambda_2(\mathbb{K}) = Y\Lambda_2(\mathbb{K}) = \Lambda_2(\mathbb{K})Y.$$

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть $\text{char } \mathbb{K} = p > 0$, $\varphi \in \text{Aut } \Lambda_2(\mathbb{K})$. Тогда $\varphi(X) = \gamma X + g(Y)$, $\varphi(Y) = \gamma Y$ для некоторых $\gamma \in \mathbb{K}^*$ и $g \in \mathbb{K}[t]$. Группа $\text{Aut } \Lambda_2(\mathbb{K})$ изоморфна группе $\mathbb{K}^* \times \mathbb{K}[Y]$ с операцией $\circ$, где

$$(\gamma_1, g_1(Y)) \circ (\gamma_2, g_2(Y)) = (\gamma_1\gamma_2, \gamma_2g_1(Y) + g_2(\gamma_1Y)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 5.7 (Y) – ненулевой минимальный первичный идеал. Тогда любой автоморфизм переводит его в минимальный ненулевой первичный идеал. Идеалы вида (ii) и (iv) не являются минимальными первичными, так что либо $\varphi((Y)) = (Y)$, либо $\varphi((Y)) = (\tilde{f}(X^p, Y^p))$, где многочлен $\tilde{f}(U, V)$ неприводим в кольце $\mathbb{K}[U, V]$ и $\tilde{f}(V) \neq V$. Рассмотрим второй случай. Пусть $\varphi(Y) = w(X, Y)\tilde{f}(X^p, Y^p)$ для некоторого $w(X, Y) \in \Lambda_2(\mathbb{K})$. В силу замечания 7.1 $\varphi(Y)$ порождает $(\tilde{f}(X^p, Y^p))$ как левый идеал, т.е. $\tilde{f}(X^p, Y^p) = u(X, Y)w(X, Y)\tilde{f}(X^p, Y^p)$ для некоторого $u(X, Y) \in \Lambda_2(\mathbb{K})$. Алгебра $\Lambda_2(\mathbb{K})$ не содержит делителей нуля, так что $1 = u(X, Y)w(X, Y)$. В градуированной алгебре это возможно лишь в том случае, если $w(X, Y) = \gamma \in \mathbb{K}^*$. Итак, $\varphi(Y) = \gamma\tilde{f}(X^p, Y^p)$. Однако $\varphi(v) \in Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$ в том и только том случае, если $v \in Z(\Lambda_2(\mathbb{K}))$. Следовательно, случай $\varphi((Y)) = (\tilde{f}(X^p, Y^p))$ невозможен, и $\varphi((Y)) = (Y)$. Аналогичными рассуждениями с помощью замечания 7.1 мы получаем, что $\varphi(Y) = \gamma Y$ для некоторого $\gamma \in \mathbb{K}^*$. Пусть

$$\varphi^{-1}(X) = \sum_{i=0}^n X^i \psi_i(Y).$$

Тогда

$$X = \varphi(\varphi^{-1}(X)) = \sum_{i=0}^n (\varphi(X))^i \psi_i(\gamma Y).$$

Обозначим

$$S = \sum_{i=0}^n (\varphi(X))^i \psi_i(\gamma Y), \quad \deg_X S = 1.$$

Если $n = 0$ или $\deg_X \varphi(X) = 0$, то $\deg_X S = 0$, что неверно. Значит, $\deg_X \varphi(X) \geq 1$ и $n \geq 1$. Если при этом $\deg_X \varphi(X) > 1$ или $n > 1$, то $\deg_X S > 1$, что также неверно. Значит, $\deg_X \varphi(X) = 1$ и $n = 1$, т.е. $\varphi(X) = Xf(Y) + g(Y)$, где $f \neq 0$. Подставим выражение для $\varphi(X)$ в выражение для X :

$$X = (Xf(Y) + g(Y))\psi_1(\gamma Y) + \psi_0(\gamma Y).$$

Сравнивая коэффициенты при X , получаем, что $f = \alpha \in \mathbb{K}$. Итак, $\varphi(X) = \alpha X + g(Y)$. Далее, $YX = XY + Y^2$, откуда

$$\begin{aligned}\varphi(Y)\varphi(X) &= \varphi(X)\varphi(Y) + (\varphi(Y))^2, \\ \gamma Y(\alpha X + g(Y)) &= (\alpha X + g(Y))\gamma Y + \gamma^2 Y^2.\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $\alpha Y^2 = \gamma Y^2$. Следовательно, $\alpha = \gamma$, т.е. $\varphi(X) = \gamma X + g(Y)$. Непосредственная проверка показывает, что группа $\text{Aut } \Lambda_2(\mathbb{K})$ изоморфна группе $\mathbb{K}^* \times \mathbb{K}[Y]$ с операцией $\circ$, где $(\gamma_1, g_1(Y)) \circ (\gamma_2, g_2(Y)) = (\gamma_1 \gamma_2, \gamma_2 g_1(Y) + g_2(\gamma_1 Y))$.

Пусть $G \subseteq \text{Aut } \Lambda_2(\mathbb{K})$ – подгруппа автоморфизмов, тождественных на центре алгебры $\Lambda_2(\mathbb{K})$. Если $\text{char } \mathbb{K} = 0$, то алгебра $\Lambda_2(\mathbb{K})$ центральна (теорема 1.5), и $G = \text{Aut } \Lambda_2(\mathbb{K})$. В случае $\text{char } \mathbb{K} = p > 0$ имеем $Z(\Lambda_2(\mathbb{K})) = \mathbb{K}[X^p, Y^p]$ и $G \cong \mathbb{Z}_p$. Для доказательства этого утверждения нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 7.3. Для всех $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{K}$ выполнено

$$(X + \gamma Y)^n = X^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \gamma(\gamma + 1) \cdots (\gamma + (k-1)) X^{n-k} Y^k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по n с помощью утверждения 1.2.

ТЕОРЕМА 7.4. Пусть $\text{char } \mathbb{K} = p > 0$. Тогда $G \cong \mathbb{Z}_p$. Если $\varphi \in G$, то $\varphi(X) = X + iY$, $\varphi(Y) = Y$ для некоторого $i \in \mathbb{Z}_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Автоморфизм $\varphi \in G$ в том и только том случае, если $\varphi(X^p) = (\varphi(X))^p = X^p$, $\varphi(Y^p) = (\varphi(Y))^p = Y^p$. По теореме 7.2 $\varphi(X) = \gamma X + g(Y)$, $\varphi(Y) = \gamma Y$ для некоторых $\gamma \in \mathbb{K}^*$ и $g \in \mathbb{K}[t]$. Тогда $\varphi(Y^p) = (\gamma Y)^p = \alpha^p Y^p = Y^p$, т.е. $\gamma^p = 1$. Тогда $0 = \gamma^p - 1 = (\gamma - 1)^p$, т.е. $\gamma = 1$, $\varphi(Y) = Y$, $\varphi(X) = X + g(Y)$. Покажем, что $\deg g(Y) \leq 1$. Действительно, если $g(Y) = \sum_{i=0}^n a_n Y^n$, $a_n \neq 0$, где $n \geq 2$, то

$$X^p = (\varphi(X))^p = a_n^p Y^{np} + w, \quad \text{где } w \in \bigoplus_{i=0}^{np-1} A_i.$$

Это противоречит определению градуированной алгебры, так что $\varphi(X) = X + \lambda Y + \mu$ для некоторых $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Тогда $(X + \lambda Y + \mu)^p = X^p$. Сравнивая в правой и левой частях свободные члены, получаем, что $\mu = 0$. По лемме 7.3

$$\begin{aligned}X^p &= (\varphi(X))^p = (X + \lambda Y)^p \\ &= X^p + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} \lambda(\lambda + 1) \cdots (\lambda + (k-1)) X^{p-k} Y^k \\ &= X^p + \lambda(\lambda + 1) \cdots (\lambda + (p-1)) Y^p.\end{aligned}$$

Следовательно, $\lambda(\lambda + 1) \cdots (\lambda + (p-1)) = 0$, т.е. $\lambda \in \mathbb{Z}_p$. Итак, $G = \{\varphi_i \mid i \in \mathbb{Z}_p\}$, где $\varphi_i(X) = X + iY$, $\varphi_i(Y) = Y$. Так как $\varphi_{i_2}(\varphi_{i_1}(X)) = X + (i_1 + i_2)Y$, $\varphi_{i_2}(\varphi_{i_1}(Y)) = Y$, то $G \cong \mathbb{Z}_p$.

Автор выражает искреннюю благодарность В. А. Артамонову за постановку задачи и руководство работой. Автор также признателен В. Т. Маркову за постоянное внимание к работе и ряд ценных замечаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. N. Shirikov, “Two-generated graded algebras”, *Algebra Discrete Math.*, 2005, № 3, 64–80.
- [2] J. C. McConnell, J. C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, With the cooperation of L. W. Small, Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, Chichester–New York–Birsbane–Toronto–Singapore, 1987.
- [3] O. Ore, “Theory of non-commutative polynomials”, *Ann. of Math.* (2), **34**:3 (1933), 480–508.
- [4] K. A. Brown, K. R. Goodearl, *Lectures on Algebraic Quantum Groups*, Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona, Birkhäuser, Basel, 2002.
- [5] В. А. Артамонов, “Квантовая проблема Серра”, *УМН*, **53**:4 (1998), 3–76.
- [6] V. A. Artamonov, “Automorphisms and derivations of quantum polynomials”, *Recent Advances in Lie Theory* (Vigo, 2000), Res. Exp. Math., **25**, Heldermann Verlag, Lemgo, 2002, 109–120.
- [7] V. A. Artamonov, “Action of Hopf algebras on generic quantum Malcev power series and quantum planes”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **134**:1 (2006), 1773–1798.
- [8] V. A. Jategaonkar, “A multiplicative analog of the Weyl algebra”, *Comm. Algebra*, **12**:13–14 (1984), 1669–1688.
- [9] И. Херстейн, *Некоммутативные кольца*, Мир, М., 1972.
- [10] Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, Факториал Пресс, М., 2001.

Е. Н. Шириков

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: evgenii_shirikov@mail.ru

Поступило

21.02.2006

Исправленный вариант

20.09.2006