Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Романюк, Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 2, 247–261

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3797>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 10:09:16

Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике

А. С. Романюк

Изучаются наилучшие M -членные тригонометрические приближения и наилучшие ортогональные тригонометрические приближения классов $B_{p,\theta}^r$ и $W_{p,\alpha}^r$ периодических функций многих переменных в равномерной метрике.

Библиография: 17 названий.

Введение. В настоящей работе исследуются некоторые вопросы приближения классов $B_{p,\theta}^r$, а также $W_{p,\alpha}^r$ периодических функций многих переменных в равномерной метрике. Более конкретно, речь будет идти о наилучших M -членных тригонометрических приближениях классов $B_{p,\theta}^r$ и наилучших ортогональных тригонометрических приближениях классов $B_{p,\theta}^r$ и $W_{p,\alpha}^r$. Названные ашпроксимативные характеристики будут определены в соответствующих частях работы, а здесь приведем используемые в дальнейшем обозначения и дадим определения исследуемых классов функций.

Пусть $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, обозначает d -мерное пространство с элементами $x = (x_1, \dots, x_d)$, $(x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d$ и $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^d [-\pi, \pi]$, — пространство 2π -периодических по каждому аргументу функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty, \quad p = \infty.$$

Всюду ниже будем предполагать, что для функций $f \in L_p(\pi_d)$ выполнено дополнительное условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = 1, \dots, d.$$

Множество таких функций будем обозначать $L_p^0(\pi_d)$.

Для функций $f \in L_p^0(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, рассмотрим разность первого порядка по j -й переменной с шагом h

$$\Delta_{h,j} f(x) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_d) - f(x)$$

и определим *разность l -го порядка*

$$\Delta_{h,j}^l f(x) = \overbrace{\Delta_{h,j} \dots \Delta_{h,j}}^l f(x)$$

в точке x_j с шагом h . Далее, если $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$, то *смешанная разность* порядка k с векторным шагом $h = (h_1, \dots, h_d)$ определяется следующим образом:

$$\Delta_h^k f(x) = \Delta_{h_1,1}^{k_1} \dots \Delta_{h_d,d}^{k_d} f(x).$$

Пусть задан вектор $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, d$, и параметры $1 \leq \theta \leq \infty$ и $1 \leq p \leq \infty$. Функция $f \in L_p^0(\pi_d)$ принадлежит классу $B_{p,\theta}^r$, если

$$\left(\int_{\pi_d} \|\Delta_h^k f(x)\|_p^\theta \prod_{j=1}^d \frac{dh_j}{h_j^{1+r_j\theta}} \right)^{1/\theta} \leq 1, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$\sup_h \|\Delta_h^k f(x)\|_p \prod_{j=1}^d h_j^{-r_j} \leq 1, \quad \theta = \infty.$$

При этом для векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$ и $r = (r_1, \dots, r_d)$ предполагаются выполненными условия $k_j > r_j$, $j = 1, \dots, d$. Классы $B_{p,\theta}^r$ введены Бесовым [1]; при $\theta = \infty$, $B_{p,\infty}^r = H_p^r$, где H_p^r – аналоги классов, введенных Никольским (см., например, [2; с. 189]).

В последующих рассуждениях нам будет удобно пользоваться определением классов $B_{p,\theta}^r$ в несколько другом виде. Для векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, и $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$, положим

$$\rho(s) = \{k : k = (k_1, \dots, k_d), 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}\}$$

и для $f \in L_p^0(\pi_d)$ обозначим

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

где

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$$

– коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Пусть $1 < p < \infty$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, d$. Тогда классы $B_{p,\theta}^r$ можно определить следующим образом (см., например, [3]):

$$B_{p,\theta}^r = \left\{ f(x) : \|f\|_{B_{p,\theta}^r} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \leq 1 \right\}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$B_{p,\infty}^r = \left\{ f(x) : \|f\|_{B_{p,\infty}^r} = \sup_s 2^{(s,r)} \|\delta_s(f, x)\|_p \leq 1 \right\}.$$

Приведенное определение классов $B_{p,\theta}^r$ можно распространить и на крайние значения $p = 1$ и $p = \infty$, несколько видоизменив “блоки” $\delta_s(f, x)$.

Пусть $V_l(t)$, $l \in \mathbb{N}$, обозначает ядро Валле–Пуссена порядка $2l - 1$:

$$V_l(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^l \cos kt + 2 \sum_{k=l+1}^{2l-1} \left(1 - \frac{k-l}{l}\right) \cos kt.$$

Сопоставим каждому вектору $s = (s_1, \dots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, d$, полином

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^d (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j))$$

и для $f \in L_p^0(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, положим

$$A_s(f, x) = f(x) * A_s(x),$$

где $*$ – операция свертки. Тогда при каждом $1 \leq p \leq \infty$, $r = (r_1, \dots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, d$, классы $B_{p,\theta}^r$ определяются следующим образом (см., например, [3; замечание 2.1]):

$$B_{p,\theta}^r = \left\{ f(x) : \|f\|_{B_{p,\theta}^r} = \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \leq 1 \right\}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$B_{p,\infty}^r = \left\{ f(x) : \|f\|_{B_{p,\infty}^r} = \sup_s 2^{(s,r)} \|A_s(f, x)\|_p \leq 1 \right\}.$$

Пусть $F_r(x, \alpha)$ обозначают многомерные аналоги ядер Бернулли, т.е.

$$F_r(x, \alpha) = 2^d \sum_k \prod_{j=1}^d k_j^{-r_j} \cos \left(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2} \right), \quad r_j > 0, \quad \alpha_j \in \mathbb{R},$$

и в сумме участвуют только те векторы $k = (k_1, \dots, k_d)$, у которых $k_j > 0$, $j = 1, \dots, d$. Тогда (см., например, [4; с. 31]) через $W_{p,\alpha}^r$ обозначим класс функций $f(x)$, представимых в виде

$$f(x) = \varphi(x) * F_r(x, \alpha) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} \varphi(y) F_r(x - y, \alpha) dy,$$

где $\varphi \in L_p(\pi_d)$, $\|\varphi\|_p \leq 1$.

В дальнейшем будем предполагать, что координаты векторов $r = (r_1, \dots, r_d)$, содержащихся в определениях классов, упорядочены в виде: $0 < r_1 = r_2 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_d$. Вектору $r = (r_1, \dots, r_d)$ поставим в соответствие вектор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$, $\gamma_j = r_j/r_1$, $j = 1, \dots, d$, которому, в свою очередь, сопоставляется вектор $\gamma' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_d)$, где $\gamma'_j = \gamma_j$ при $j = 1, \dots, \nu$ и $1 < \gamma'_j < \gamma_j$, $j = \nu + 1, \dots, d$.

Полученные результаты будем формулировать в терминах порядковых соотношений. Для функций $\mu_1(N)$ и $\mu_2(N)$ запись $\mu_1 \ll \mu_2$ означает, что существует постоянная $C_1 > 0$ такая, что $\mu_1(N) \leq C_1 \mu_2(N)$. Соотношение $\mu_1 \asymp \mu_2$ равносильно тому, что выполнены порядковые неравенства $\mu_1 \ll \mu_2$ и $\mu_1 \gg \mu_2$. Отметим, что постоянные C_i , $i = 1, 2, \dots$, которые будут присутствовать в определениях функций и в порядковых соотношениях, могут зависеть только от тех параметров, которые содержатся в определениях классов, от метрики и от размерности пространства $\mathbb{R}^d$.

Если A – конечное множество, то через $|A|$ будем обозначать количество элементов A .

1. Наилучшие M -членные тригонометрические приближения. Для $f \in L_q(\pi_d)$ обозначим

$$e_M(f)_q = \inf_{k^j, c_j} \left\| f(\cdot) - \sum_{j=1}^M c_j e^{i(k^j, \cdot)} \right\|_q,$$

где $\{k^j\}_{j=1}^M$ – набор векторов $k^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$ с целочисленными координатами, c_j – произвольные числа. Если F – класс функций, то полагаем

$$e_M(F)_q = \sup_{f \in F} e_M(f)_q.$$

Величина $e_M(f)_2$ для функций одной переменной была введена Стечкиным [5] при формулировке им критерия абсолютной сходимости рядов Фурье. Несколько позже величины $e_M(f)_q$ и $e_M(F)_q$, $1 \leq q \leq \infty$, начали исследовать уже с точки зрения аппроксимации соответственно индивидуальных функций и классов функций.

Следует отметить, что полученные при этом результаты нашли применение в вопросах исследования других аппроксимативных характеристик, в частности колмогоровских поперечников классов функций. С более подробной информацией и соответствующей библиографией можно ознакомиться, например, в работе [6], которая посвящена изучению наилучших M -членных тригонометрических приближений классов $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq p < \infty$, в метрике L_q , $1 < q < \infty$. Отметим, что в [6], в частности, установлены оценки

$$e_M(B_{p,\theta}^r)_q \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1-1/p+1/2} (\log^{\nu-1} M)^{1/2-1/\theta},$$

$1 \leq p \leq 2 < q < \infty$, $r_1 > 1/p$, $1 \leq \theta \leq \infty$ (теорема 2.1);

$$e_M(B_{p,\theta}^r)_q \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1+1/2-1/\theta},$$

$2 \leq p \leq q < \infty$, $r_1 > 1/2$, $1 \leq \theta \leq \infty$ (теорема 2.2).

Эти результаты нами будут использованы при получении оценок снизу наилучших M -членных тригонометрических приближений классов $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq p < \infty$, в равномерной метрике. Что касается оценок сверху величин $e_M(B_{p,\theta}^r)_\infty$, то для их установления потребовалась определенная модификация тех рассуждений, которые применялись для оценок величин $e_M(B_{p,\theta}^r)_q$, $1 < q < \infty$.

Теперь перейдем к формулировке и доказательству полученных утверждений.

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $2 \leq \theta < \infty$, $r_1 > \max\{1/p, 1/2\}$. Тогда при $d \geq 2$

$$(M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1-(1/p-1/2)+} (\log^{\nu-1} M)^{1/2-1/\theta}$$

$$\ll e_M(B_{p,\theta}^r)_\infty \ll (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1-(1/p-1/2)+} (\log^{\nu-1} M)^{1/2-1/\theta} \sqrt{\log M}, \quad (1)$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим в (1) оценку сверху. В проводимых ниже рассуждениях нам будет удобно предполагать, что M связаны с числами $l \in \mathbb{N}$ посредством соотношения $C_2 2^l l^{\nu-1} \leq M < C_3 2^l l^{\nu-1}$ ($M \asymp 2^l l^{\nu-1}$), где $0 < C_2 \leq C_3$ – не зависящие от M и l постоянные. Понятно, что при установлении порядковых соотношений это предположение не ограничивает общности рассуждений.

Пусть сначала $p = 2$. Рассмотрим для $f \in B_{2,\theta}^r$ приближающий полином $t_M(x)$ вида

$$t_M(x) = \sum_{(s,\gamma') < l} \delta_s(f, x) + P(x), \quad (2)$$

где $l \in \mathbb{N}$ подобрано по M согласно указанному выше соотношению, а $P(x)$ – полином, который будет сконструирован в процессе получения оценки. Заметим, что в силу соотношения $\sum_{(s,\gamma') < l} 2^{(s,1)} \ll 2^{l\nu-1}$, которое следует из леммы Г [4; с. 11], количество гармоник в первом слагаемом (2) не превышает по порядку $2^{l\nu-1}$. Следовательно, количество гармоник и в полиноме $P(x)$ также не должно превышать по порядку $2^{l\nu-1}$.

Итак, предположим, что полином $t_M(x)$ вида (2) построен. Тогда для $f \in B_{2,\theta}^r$ и $\alpha > 1$ (это число будет уточнено ниже) можем записать

$$\begin{aligned} \|f(x) - t_M(x)\|_\infty &= \left\| f(x) - \sum_{(s,\gamma') < \alpha l} \delta_s(f, x) + \sum_{l \leq (s,\gamma') < \alpha l} \delta_s(f, x) - P(x) \right\|_\infty \\ &\leq \left\| f(x) - \sum_{(s,\gamma') < \alpha l} \delta_s(f, x) \right\|_\infty + \left\| \sum_{l \leq (s,\gamma') < \alpha l} \delta_s(f, x) - P(x) \right\|_\infty \\ &= \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Получим сначала оценку слагаемого $\mathcal{I}_2$. Для этого нам понадобится вспомогательное утверждение.

Пусть $L \in \mathbb{N}$ и

$$T(\Omega_L; x) = \sum_{j=1}^L c_j e^{i(k^j, x)}, \quad \Omega_L = \{k^1, k^2, \dots, k^L\},$$

где $k^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$, $j = 1, \dots, L$.

ЛЕММА 1 [7]. Для всякого тригонометрического полинома $T(\Omega_M; x)$ с количеством гармоник не более M , степень которого не выше N , и для любого натурального $S \leq M$ существует тригонометрический полином $T(\Omega_S; x)$, у которого не более S коэффициентов отлочно от нуля и такой, что

$$\|T(\Omega_M; x) - T(\Omega_S; x)\|_\infty \ll (MS^{-1} \log N)^{1/2} \|T(\Omega_M; x)\|_2;$$

при этом $\Omega_S \subset \Omega_M$.

Заметим, что под степенью тригонометрического полинома понимается наибольшая из степеней экспонент, а степень $e^{i(k, x)}$ равна $|k_1| + \dots + |k_d|$.

Таким образом, согласно неравенству Минковского и лемме 1 будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &\leq \left\| \sum_{j=l}^{[\alpha l]+1} \sum_{j \leq (s,\gamma') < j+1} \delta_s(f, x) - P(x) \right\|_\infty \\ &\leq \sum_{j=l}^{[\alpha l]+1} \left\| \sum_{j \leq (s,\gamma') < j+1} \delta_s(f, x) - P_{n_j}(x) \right\|_\infty \end{aligned}$$

$$\ll \sum_{j=l}^{[\alpha l]+1} (n_j^{-1} 2^j j^\nu)^{1/2} \left\| \sum_{j \leq (s, \gamma') < j+1} \delta_s(f, x) \right\|_2, \quad (4)$$

где $P_{n_j}(x)$ – тригонометрические полиномы, приближающие полиномы

$$\sum_{j \leq (s, \gamma') < j+1} \delta_s(f, x)$$

согласно лемме 1, а $[b]$ – целая часть числа b .

Далее, при $2 < \theta < \infty$ вследствие неравенства Гёльдера с показателем $\theta/2$, а также соотношения

$$\sum_{(s, \gamma') \geq n} 2^{-\beta(s, \gamma')} \asymp 2^{-\beta n} n^{\nu-1}, \quad \beta > 0 \quad (5)$$

(см. [4; с. 11]), можем записать

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j \leq (s, \gamma') < j+1} \delta_s(f, x) \right\|_2 \\ &= \left(\sum_{j \leq (s, \gamma') < j+1} \|\delta_s(f, x)\|_2^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{j \leq (s, \gamma') < j+1} 2^{(s, r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_2^\theta \right)^{1/\theta} \left(\sum_{j \leq (s, \gamma') < j+1} 2^{-2(s, r)\theta/(\theta-2)} \right)^{1/2-1/\theta} \\ &\ll \|f\|_{B_{2, \theta}^r} 2^{-jr_1} j^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)} \leq 2^{-jr_1} j^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Легко видеть, что если $\theta = 2$, то

$$\left\| \sum_{j \leq (s, \gamma') < j+1} \delta_s(f, x) \right\|_2 \leq 2^{-jr_1}. \quad (7)$$

Подставив (7) и (6) в (4), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &\ll \sum_{j=l}^{[\alpha l]+1} (n_j^{-1} 2^j j^\nu)^{1/2} 2^{-jr_1} j^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)} \\ &= \sum_{j=l}^{[\alpha l]+1} (n_j^{-1} j^\nu)^{1/2} 2^{-j(r_1-1/2)} j^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Чтобы завершить оценку (8), зададим числа n_j , $j = l, \dots, [\alpha l] + 1$, формулой

$$n_j = [2^{l(r_1+1/2)} 2^{-j(r_1-1/2)} j^{\nu-1}]. \quad (9)$$

Тогда количество гармоник в полиноме $P(x)$ оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{j=l}^{[\alpha l]+1} n_j &\leq 2^{l(r_1+1/2)} \sum_{j=l}^{[\alpha l]+1} 2^{-j(r_1-1/2)} j^{\nu-1} \\ &\ll 2^{l(r_1+1/2)} 2^{-l(r_1-1/2)} l^{\nu-1} = 2^l l^{\nu-1} \asymp M. \end{aligned}$$

Подставив значения n_j из (9) в (8) и выполнив соответствующие преобразования, приходим к оценке

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &\ll 2^{-(l/2)(r_1+1/2)} \sum_{j=l}^{[\alpha l]+1} j^{-(\nu-1)/2} 2^{-(j/2)(r_1-1/2)} j^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)} j^{\nu/2} \\ &= 2^{-(l/2)(r_1+1/2)} \sum_{j=l}^{[\alpha l]+1} 2^{-(j/2)(r_1-1/2)} j^{-(\nu-1)/\theta} j^{\nu/2} \asymp 2^{-lr_1} l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)} l^{1/2} \\ &\asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+1/2-1/\theta} \sqrt{\log M}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для оценки слагаемого $\mathcal{I}_1$ нам понадобится неравенство, доказанное Никольским [8], известное как “неравенство разных метрик”.

ТЕОРЕМА А. Пусть $m = (m_1, \dots, m_d)$, m_j – целые неотрицательные числа, $j = 1, \dots, d$, u

$$t(x) = \sum_{|k_j| \leq m_j} c_k e^{i(k, x)}.$$

Тогда при $1 \leq q < p \leq \infty$ имеет место неравенство

$$\|t\|_p \leq 2^d \prod_{j=1}^d m_j^{(1/q-1/p)} \|t\|_q. \quad (11)$$

Отметим, что в случае $d = 1$ и $p = \infty$ соответствующее неравенство доказал Джексон [9].

Итак, воспользовавшись последовательно неравенствами Минковского, Никольского и Гёльдера, а затем соотношением (5), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &\leq \sum_{(s, \gamma') \geq \alpha l} \|\delta_s(f, x)\|_\infty \ll \sum_{(s, \gamma') \geq \alpha l} 2^{\|s\|_1/2} \|\delta_s(f, x)\|_2 \\ &\leq \sum_{(s, \gamma') \geq \alpha l} 2^{(1/2)(s, \gamma)} \|\delta_s(f, x)\|_2 \\ &\leq \left(\sum_{(s, \gamma') \geq \alpha l} 2^{(s, r)\theta} \|\delta_s(f, x)\|_2^\theta \right)^{1/\theta} \left(\sum_{(s, \gamma') \geq \alpha l} 2^{-(s, \gamma)(r_1-1/2)(\theta/(\theta-1))} \right)^{1-1/\theta} \\ &\ll \|f\|_{B_{2, \theta}^r} 2^{-\alpha l(r_1-1/2)} l^{(\nu-1)(1-1/\theta)} \leq 2^{-\alpha l(r_1-1/2)} l^{(\nu-1)(1-1/\theta)}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\|s\|_1 = s_1 + \dots + s_d$.

Положив

$$\alpha = \frac{r_1}{r_1 - 1/2} + \frac{(\nu - 1) \log l}{2l(r_1 - 1/2)},$$

из (12) находим

$$\mathcal{I}_1 \ll 2^{-lr_1} l^{(\nu-1)(1/2-1/\theta)} \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+1/2-1/\theta}. \quad (13)$$

Подставив (13) и (10) в (3), приходим к оценке

$$e_M(B_{2,\theta}^r)_\infty \ll M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+1/2-1/\theta} \sqrt{\log M}. \quad (14)$$

Отправляясь от оценки (14) легко получить требуемые оценки в случаях $1 \leq p < 2$ и $2 < p \leq \infty$.

Итак, пусть $2 < p \leq \infty$. Тогда оценка величины $e_M(B_{p,\theta}^r)_\infty$ следует из (14) согласно включению $B_{p,\theta}^r \subset B_{2,\theta}^r$.

В случае $1 \leq p < 2$, применив к $A_s(f, x)$, $f \in B_{p,\theta}^r$, как к полиному степени 2^{s_j+1} по переменной x_j , $j = 1, \dots, d$, неравенство разных метрик (11), можем записать

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p,\theta}^r} &= \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} \|A_s(f, x)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \\ &\gg \left(\sum_s 2^{(s,r)\theta} 2^{(s,1)(1/2-1/p)\theta} \|A_s(f, x)\|_2^\theta \right)^{1/\theta} \\ &= \left(\sum_s 2^{(s,r-1/p+1/2)\theta} \|A_s(f, x)\|_2^\theta \right)^{1/\theta} = \|f\|_{B_{2,\theta}^{r-1/p+1/2}}, \end{aligned}$$

где $r-1/p+1/2$ – вектор с координатами $r_j-1/p+1/2$, $j = 1, \dots, d$. Следовательно, $B_{p,\theta}^r \subset B_{2,\theta}^{r-1/p+1/2}$, $1 \leq p < 2$, и в силу (14) имеем

$$\begin{aligned} e_M(B_{p,\theta}^r)_\infty &\ll e_M(B_{2,\theta}^{r-1/p+1/2})_\infty \\ &\ll (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1-1/p+1/2} (\log^{\nu-1} M)^{1/2-1/\theta} \sqrt{\log M}. \end{aligned}$$

Оценка сверху доказана.

Оценка снизу в (1) при $1 \leq p < \infty$ следует из известных оценок величин $e_M(B_{p,\theta}^r)_q$, которые получены в [6] (эти оценки приведены выше). В случае $p = \infty$ для получения оценки снизу величины $e_M(B_{\infty,\theta}^r)_\infty$ достаточно воспользоваться оценкой

$$e_M(B_{\infty,\theta}^r)_q \gg M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1+1/2-1/\theta}, \quad 1 < q \leq 2, \quad 1 \leq \theta \leq \infty,$$

которая установлена в [6; с. 98] в процессе доказательства теоремы 3.2.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Порядковые оценки величин $e_M(W_{p,\alpha}^r)_\infty$ и $e_M(H_p^r)_\infty$, $2 \leq p < \infty$, установлены Белинским [7]. При этом верхние и нижние оценки этих величин различаются множителем $\sqrt{\log M}$. Величины $e_M(W_{1,\alpha}^r)_\infty$ изучались в [10], где были установлены для них двусторонние оценки, различающиеся также множителем $\sqrt{\log M}$.

В завершение этой части работы установим порядок величины $e_M(B_{p,\theta}^r)_\infty$ в одномном случае.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $r_1 > \max\{1/p, 1/2\}$. Тогда при $d = 1$

$$e_M(B_{p,\theta}^{r_1})_\infty \asymp M^{-r_1+(1/p-1/2)_+}. \quad (15)$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим в (15) оценку сверху. Пусть сначала $p = 2$. По заданному числу M подберем $l \in \mathbb{N}$ из неравенства $2^{l-1} \leq M < 2^l$ и для $s \in \mathbb{N}$ положим

$$M_s = \begin{cases} 2^s, & 1 \leq s \leq l, \\ [2^{l(r_1+1/2)} 2^{-s(r_1-1/2)}], & s > l. \end{cases} \quad (16)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} M_s &\leq \sum_{s=1}^l 2^s + \sum_{s=l+1}^{\infty} 2^{l(r_1+1/2)} 2^{-s(r_1-1/2)} \\ &\ll 2^l + 2^{l(r_1+1/2)} \sum_{s=l+1}^{\infty} 2^{-s(r_1-1/2)} \ll 2^l \asymp M. \end{aligned}$$

В последующих рассуждениях воспользуемся оценкой из [11; с. 39] (следствие 5.1), которая в используемых нами обозначениях имеет вид

$$e_{M_s}(\delta_s(f, x))_{\infty} \ll \left(\frac{2^s}{M_s} \right)^{1/2} \log \frac{2^s}{M_s} \|\delta_s(f, x)\|_2. \quad (17)$$

Таким образом, в силу выбора чисел M_s и оценки (17) для $f \in B_{2,\theta}^{r_1}$ можем записать

$$e_M(f)_{\infty} \leq \sum_{s>l} e_{M_s}(\delta_s(f, x))_{\infty} \ll \sum_{s>l} \left(\frac{2^s}{M_s} \right)^{1/2} \log \frac{2^s}{M_s} \|\delta_s(f, x)\|_2. \quad (18)$$

Далее, поскольку для $f \in B_{2,\theta}^{r_1}$ выполнено $\|\delta_s(f, x)\|_2 \ll 2^{-sr_1}$, то из (18) с учетом (16) будем иметь

$$\begin{aligned} e_M(f)_{\infty} &\ll \sum_{s>l} \left(\frac{2^s}{M_s} \right)^{1/2} (s-l) 2^{-sr_1} \ll \sum_{s>l} 2^{-s/2(r_1-1/2)} 2^{-l/2(r_1+1/2)} (s-l) \\ &= 2^{-l/2(r_1+1/2)} \sum_{s>l} 2^{-s/2(r_1-1/2)} (s-l) \\ &\ll 2^{-l/2(r_1+1/2)} 2^{-l/2(r_1-1/2)} = 2^{-lr_1} \asymp M^{-r_1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Оценка сверху в случае $p = 2$ установлена.

Оценки сверху в случаях $1 \leq p < 2$ и $2 < p \leq \infty$ следуют из (19) согласно включениям $B_{p,\theta}^{r_1} \subset B_{2,\theta}^{r_1-1/p+1/2}$ и $B_{p,\theta}^{r_1} \subset B_{2,\theta}^{r_1}$ соответственно.

Соответствующие оценки снизу в случаях $1 \leq p < 2$ и $2 \leq p < \infty$ следуют из результатов теорем 2.1 и 2.2 [6], которые приведены выше. Если же $p = \infty$, то оценка снизу величины $e_M(B_{\infty,\theta}^{r_1})_{\infty}$, $1 \leq \theta < \infty$, была получена при доказательстве теоремы 1. С помощью тех же рассуждений легко установить искомую оценку и в случае $\theta = \infty$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае $d = 1$, $1 \leq p \leq \infty$ и $r_1 > 1/p$ справедливо соотношение

$$e_M(W_{p,\alpha}^{r_1})_{\infty} \asymp M^{-\min(r_1, r_1-1/p+1/2)}.$$

Этот результат получен Белинским [12].

2. Наилучшие ортогональные тригонометрические приближения. Обозначим через Ω_M произвольный набор из M d -мерных векторов $k^1, \dots, k^M$, $k^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$, $j = 1, \dots, M$, с целочисленными координатами. Для функции $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \leq q \leq \infty$, в качестве приближающего полинома по системе экспонент $\{e^{i(k^j, x)}\}_{j=1}^M$ будем брать полином

$$S_M(f, x) = \sum_{j=1}^M \widehat{f}(k^j) e^{i(k^j, x)}$$

и рассматривать величину

$$e_M^\perp(f)_q = \inf_{\Omega_M} \|f(x) - S_M(f, x)\|_q.$$

Если $F \subset L_p(\pi_d)$ – некоторый класс функций, то полагаем

$$e_M^\perp(F)_q = \sup_{f \in F} e_M^\perp(f)_q.$$

Величину $e_M^\perp(F)_q$ называют *наилучшим ортогональным тригонометрическим приближением* класса F в пространстве L_q . Легко видеть, что между величинами $e_M^\perp(F)_q$ и $e_M(F)_q$ имеет место соотношение

$$e_M(F)_q \leq e_M^\perp(F)_q.$$

Отметим, что наилучшие ортогональные тригонометрические приближения классов $W_{p,\alpha}^r$, $1 < p < \infty$, и $B_{p,\theta}^r$, $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, в пространстве L_q , $1 < q < \infty$, изучались в работах [13], [14]. Обратим внимание, что, как следует из результатов работ [6], [14], существуют соотношения между параметрами p , q , θ и r_1 , для которых порядки величин $e_M(B_{p,\theta}^r)_q$ и $e_M^\perp(B_{p,\theta}^r)_q$ совпадают, а также и такие, для которых эти величины имеют разные порядки.

Цель настоящего пункта – получение точных в смысле порядка оценок величин $e_M^\perp(B_{p,\theta}^r)_q$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $1 \leq p < \infty$, а также $e_M^\perp(W_{p,\alpha}^r)_\infty$, $1 < p < \infty$, и $e_M^\perp(W_{1,1}^r)_\infty$.

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 \leq p < \infty$, $r_1 > 1/p$ и $1 \leq \theta \leq \infty$. Тогда имеет место оценка

$$e_M^\perp(B_{p,\theta}^r)_\infty \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1-1/p} (\log^{\nu-1} M)^{1-1/\theta}. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху в (20) следует из теоремы 2.1 [15], в которой установлен порядок верхних граней уклонений ступенчатых гиперболических сумм Фурье $S_n^\gamma(f, x) = \sum_{(s,\gamma) \leq n} \delta_s(f, x)$, $f \in B_{p,\theta}^r$:

$$\sup_{f \in B_{p,\theta}^r} \|f(x) - S_n^\gamma(f, x)\|_\infty \asymp 2^{-n(r_1-1/p)} n^{(\nu-1)(1-1/\theta)}. \quad (21)$$

Действительно, пусть

$$Q_n^\gamma = \bigcup_{(s,\gamma) \leq n} \rho(s).$$

Тогда для количества элементов множества Q_n^γ имеет место оценка $|Q_n^\gamma| \ll 2^n n^{\nu-1}$ (см. [4; с. 11]). Следовательно, подобрав для M число $n \in \mathbb{N}$ из соотношения $|Q_n^\gamma| \leq M < |Q_{n+1}^\gamma|$ и воспользовавшись (21), будем иметь

$$e_M^\perp(B_{p,\theta}^r)_\infty \ll (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1-1/p} (\log^{\nu-1} M)^{1-1/\theta}.$$

Переходя к установлению в (20) соответствующей оценки снизу, отметим следующее обстоятельство. С помощью элементарных рассуждений можно показать, что искомую оценку достаточно получить при $\nu = d$. Для наилучших приближений классов H_p^r тригонометрическими полиномами с “номерами” гармоник из ступенчатого гиперболического креста и колмогоровских поперечников классов $W_{p,\alpha}^r$ соответствующие рассуждения приведены в [16]. Совершенно аналогично можно убедиться, что при установлении оценок снизу и других аппроксимативных характеристик классов $W_{p,\alpha}^r$ и $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq \theta \leq \infty$, также достаточно рассмотреть случай $\nu = d$.

Итак, пусть

$$\Theta_n = \{s : s_1 + \dots + s_d = n\} \quad \text{и} \quad \bar{Q}_n^1 = \bigcup_{s \in \Theta_n} \rho(s).$$

Тогда $|\bar{Q}_n^1| \asymp 2^n n^{d-1}$. Ниже будем считать, что числа M и n связаны соотношением

$$|\bar{Q}_n^1| \leq 4M < |\bar{Q}_{n+1}^1|.$$

Для $s \in \Theta_n$ положим

$$f_s(x) = \prod_{j=1}^d (V_{2^{s_j+1}}(x_j) - V_{2^{s_j}}(x_j))$$

и рассмотрим функцию

$$\Psi_1(x) = C_4 2^{-n(r_1+1-1/p)} n^{-(d-1)/\theta} \sum_{s \in \Theta_n} f_s(x), \quad 1 \leq \theta < \infty, \quad C_4 > 0.$$

(соответственно $\Psi_2(x) = C_5 2^{-n(r_1+1-1/p)} \sum_{s \in \Theta_n} f_s(x)$, $C_5 > 0$, при $\theta = \infty$).

Поскольку

$$\|f_s\|_p \asymp 2^{\|s\|_1(1-1/p)}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

то нетрудно проверить, что функции $\Psi_1(x)$ и $\Psi_2(x)$ с соответствующими постоянными C_4 и C_5 принадлежат классам $B_{p,\theta}^r$, $1 \leq \theta < \infty$, и H_p^r соответственно.

Далее, пусть $S_M(\Psi_1, x)$ – частная сумма, состоящая из M произвольных гармоник ряда Фурье функции $\Psi_1(x)$. В таком случае, принимая во внимание, что

$$\left\| \sum_{s \in \Theta_n} f_s(x) \right\|_\infty \asymp 2^n n^{d-1},$$

можем записать

$$\begin{aligned} \|\Psi_1(x) - S_M(\Psi_1, x)\|_\infty &\geq \|\Psi_1(x)\|_\infty - \|S_M(\Psi_1, x)\|_\infty \\ &\gg 2^{-n(r_1+1-1/p)} n^{-(d-1)/\theta} (2^n n^{d-1} - M) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\gg 2^{-n(r_1+1-1/p)} n^{-(d-1)/\theta} 2^n n^{d-1} \\
&= 2^{-n(r_1-1/p)} n^{(d-1)(1-1/\theta)} \\
&\asymp (M^{-1} \log^{d-1} M)^{r_1-1/p} (\log^{d-1} M)^{1-1/\theta}.
\end{aligned}$$

Аналогично в случае $\theta = \infty$ имеем

$$\|\Psi_2(x) - S_M(\Psi_2, x)\|_\infty \gg (M^{-1} \log^{d-1} M)^{r_1-1/p} \log^{d-1} M.$$

Оценка снизу и вместе с ней теорема доказана.

В следующем утверждении установим порядок величины $e_M^\perp(W_{p,\alpha}^r)_\infty$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 < p < \infty$, $r_1 > 1/p$. Тогда

$$e_M^\perp(W_{p,\alpha}^r)_\infty \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1-1/p} (\log^{\nu-1} M)^{1-1/p}. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху в (22) следует из оценки приближения классов $W_{p,\alpha}^r$ ступенчатыми гиперболическими суммами Фурье $S_n^\gamma(f, x)$. В [17] установлено, что при $1 < p < \infty$ справедлива оценка

$$\sup_{f \in W_{p,\alpha}^r} \|f(x) - S_n^\gamma(f, x)\|_\infty \ll 2^{-n(r_1-1/p)} n^{(\nu-1)(1-1/p)}. \quad (23)$$

Поэтому подобрав по заданному M число $n \in \mathbb{N}$ из соотношения $|Q_n^\gamma| \leq M < |Q_{n+1}^\gamma|$ и воспользовавшись (23), будем иметь

$$e_M^\perp(W_{p,\alpha}^r)_\infty \ll (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1-1/p} (\log^{\nu-1} M)^{1-1/p}.$$

Для получения в (22) оценки снизу нам понадобится вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть $1 < q < \infty$, $r_1 > 1 - 1/q$. Тогда для ядер Бернулли $F_r(x, \alpha)$ имеет место соотношение

$$e_M^\perp(F_r(x, \alpha))_q \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1-1+1/q} (\log^{\nu-1} M)^{1/q}. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху в (24) следует из оценки приближения функции $F_r(x, \alpha)$ ее суммой Фурье $S_n^\gamma(F_r, x, \alpha)$ (см. [4; с. 38], при определенном выборе числа n . Соответствующую оценку снизу в (24) достаточно установить при $\nu = d$.

Пусть $S_M^*(F_r, x, \alpha)$ – частная сумма, содержащая M гармоник ряда Фурье функции $F_r(x, \alpha)$, для которой выполнено порядковое неравенство

$$\|F_r(x, \alpha) - S_M^*(F_r, x, \alpha)\|_q \ll (M^{-1} \log^{d-1} M)^{r_1-1+1/q} (\log^{d-1} M)^{1/q}. \quad (25)$$

Рассмотрим величину

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_3 &= \int_{\pi_d} (F_r(x, \alpha) - S_M^*(F_r, x, \alpha))(F_2(x, \alpha) - S_M^*(F_2, x, \alpha)) dx \\
&= \int_{\pi_d} F_r(x, \alpha)(F_2(x, \alpha) - S_M^*(F_2, x, \alpha)) dx,
\end{aligned} \quad (26)$$

где “2” (в нижнем индексе ядра Бернулли) обозначает вектор вида $(2, \dots, 2) \in \mathbb{N}^d$.

Тогда, с одной стороны, в силу неравенства Гёльдера и оценки (25) при $r_1 = 2$, будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3 &\leq \|F_r(x, \alpha) - S_M^*(F_r, x, \alpha)\|_q \|F_2(x, \alpha) - S_M^*(F_2, x, \alpha)\|_{q'} \\ &\ll \|F_r(x, \alpha) - S_M^*(F_r, x, \alpha)\|_q M^{-1-1/q'} (\log^{d-1} M)^{1+2/q'}, \end{aligned} \quad (27)$$

где $q' = q/(q-1)$.

С другой стороны, положив $Q_n^1 = \bigcup_{(s,1) \leq n} \rho(s)$, $(s, 1) = s_1 + \dots + s_d$ и подобрав по заданному M число $n \in \mathbb{N}$ из соотношения $|Q_{n-1}^1| \leq M < |Q_n^1|$, в силу (26) можем записать

$$\mathcal{I}_3 \gg \sum_{\substack{k \in Q_n^1 \\ k > 0}} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_j-2} \asymp \sum_{(s,1) > n} 2^{-(s,1)(r_1+1)}. \quad (28)$$

Далее, воспользовавшись оценкой

$$\sum_{(s,1) > n} 2^{-\alpha(s,1)} \asymp 2^{-\alpha n} n^{d-1}, \quad \alpha > 0,$$

из (28) находим

$$\mathcal{I}_3 \gg 2^{-n(r_1+1)} n^{d-1} \asymp M^{-(r_1+1)} (\log^{d-1} M)^{r_1+2}. \quad (29)$$

Наконец, сопоставив (27) и (29), приходим к искомой оценке

$$e_M^\perp(F_r(x, \alpha))_q \gg (M^{-1} \log^{d-1} M)^{r_1-1+1/q} (\log^{d-1} M)^{1/q}.$$

Лемма доказана.

Возвращаясь непосредственно к доказательству оценки снизу в (22), обозначим через Ω_M произвольный набор из M векторов $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, d$, и положим

$$S_M(f, x) = \sum_{k \in \Omega_M} \widehat{f}(k) e^{i(k, x)}.$$

Тогда согласно определению класса $W_{p, \alpha}^r$ можем записать

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_4 &= \sup_{f \in W_{p, \alpha}^r} \|f(x) - S_M(f, x)\|_\infty \\ &= \sup_{\|\varphi\|_p \leq 1} \left\| \varphi * F_r(x, \alpha) - \varphi * \sum_{k \in \Omega_M} e^{i(k, x)} * F_r(x, \alpha) \right\|_\infty. \end{aligned} \quad (30)$$

Обозначив

$$t_M(x) = \sum_{k \in \Omega_M} e^{i(k, x)} * F_r(x, \alpha),$$

продолжим (30)

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_4 &= \sup_{\|\varphi\|_p \leq 1} \|\varphi * (F_r(x, \alpha) - t_M(x))\|_\infty \\ &= \|F_r(x, \alpha) - t_M(x)\|_{p'} \geq e_M^\perp(F_r(x, \alpha))_{p'}. \end{aligned}$$

Для завершения оценки $\mathcal{I}_4$ осталось воспользоваться оценкой (24) при $q = p'$. Теорема доказана.

В заключение получим порядок величины $e_M^\perp(W_{1,1}^r)_\infty$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $r_1 > 1$. Тогда

$$e_M^\perp(W_{1,1}^r)_\infty \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1-1}. \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для получения в (31) оценки сверху положим

$$\Gamma(N, \gamma) = \left\{ k = (k_1, \dots, k_d), k_j > 0, j = 1, \dots, d, \prod_{j=1}^d k_j^{\gamma_j} \leq N \right\}$$

и обозначим через $T(N, \gamma)$ множество тригонометрических полиномов $t(x)$ вида

$$t(x) = \sum_{|k| \in \Gamma(N, \gamma)} a_k e^{i(k, x)},$$

$|k| = (|k_1|, \dots, |k_d|)$. Отметим, что согласно определениям для $S_n^\gamma(f, x)$ имеет место включение

$$S_n^\gamma(f, x) \subset T(2^{n+1}, \gamma).$$

Пусть

$$S(f, \Gamma(N, \gamma)) = \sum_{|k| \in \Gamma(N, \gamma)} \widehat{f}(k) e^{i(k, x)}.$$

В (17) доказана оценка

$$\sup_{f \in W_{1,1}^r} \|f(x) - S(f, \Gamma(N, \gamma))\|_\infty \ll N^{-r_1+1},$$

или, в иных обозначениях при $2^n \leq N < 2^{n+1}$

$$\sup_{f \in W_{1,1}^r} \|f(x) - S(f, \Gamma(2^{n+1}, \gamma))\|_\infty \ll 2^{-n(r_1-1)}. \quad (32)$$

Таким образом, подобрав по заданному M соответствующим образом число $n \in \mathbb{N}$ и воспользовавшись (32), приходим к искомой оценке

$$e_M^\perp(W_{1,1}^r)_\infty \ll \sup_{f \in W_{1,1}^r} \|f(x) - S(f, \Gamma(2^{n+1}, \gamma))\|_\infty \ll (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1-1}.$$

Соответствующая оценка снизу в (31) следует из теоремы 3 при $p = 1$ и $\theta = 1$ согласно включению $B_{1,1}^r \subset W_{1,1}^r$, т.е.

$$e_M^\perp(W_{1,1}^r)_\infty \gg e_M^\perp(B_{1,1}^r)_\infty \asymp (M^{-1} \log^{\nu-1} M)^{r_1-1}.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Вопрос о порядках величин $e_M^\perp(W_{1,\alpha}^r)_\infty$ при $\alpha \neq 1$ остается, по-видимому, открытым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. В. Бесов, “О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения”, *Докл. АН СССР*, **126**:6 (1959), 1163–1165.
- [2] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1969.
- [3] П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, “Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям*, ч. 13, Тр. МИАН, **187**, Наука, М., 1989, 143–161.
- [4] В. Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной*, Тр. МИАН, **178**, Наука, М., 1986.
- [5] С. Б. Стечкин, “Об абсолютной сходимости ортогональных рядов”, *Докл. АН СССР*, **102**:2 (1955), 37–40.
- [6] А. С. Романюк, “Наилучшие M -членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:2 (2003), 61–100.
- [7] E. S. Belinskii, “Approximation of functions of several variables by trigonometric polynomials with given number of harmonics, and estimates of ε -entropy”, *Anal. Math.*, **15**:2 (1989), 67–74.
- [8] С. М. Никольский, “Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных”, Сборник статей : Посв. акад. И. М. Виноградову к его 60-летию, Тр. МИАН, **38**, Наука, М., 1951, 244–278.
- [9] D. Jackson, “Certain problems of closest approximation”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39** (1933), 889–906.
- [10] Э. С. Белинский, “Приближение периодических функций многих переменных “плавающей” системой экспонент и тригонометрические поперечники”, *Докл. АН СССР*, **284**:6 (1985), 1294–1297.
- [11] R. A. DeVore, V. N. Temlyakov, “Nonlinear approximation by trigonometric sums”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **2**:1 (1995), 29–48.
- [12] E. S. Belinskii, “Decomposition theorems and approximation by a “floating” system of exponentials”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **350**:1 (1998), 43–53.
- [13] Э. С. Белинский, “Приближение плавающей системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной”, *Исследования по теории функций многих вещественных переменных*, ЯГУ, Ярославль, 1988, 16–33.
- [14] А. С. Романюк, “Приближение классов периодических функций многих переменных”, *Матем. заметки*, **71**:1 (2002), 109–121.
- [15] А. С. Романюк, “Приближение классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения”, *Матем. сб.*, **195**:2 (2004), 91–116.
- [16] В. Н. Темляков, “Приближение функций с ограниченной смешанной разностью тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:1 (1982), 171–186.
- [17] В. Н. Темляков, “Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью”, *Всесоюзная школа по теории функций* (Dushanbe, 1986), Тр. МИАН, **189**, Наука, М., 1988, 138–168.

А. С. Романюк

Институт математики НАН Украины, г. Киев

 E-mail: funct@imath.kiev.ua

Поступило

28.03.2005

Исправленный вариант

17.11.2006