Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Громов, Задача Коши для уравнений в свертках
в пространствах аналитических векторнозначных функ-
ций, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 2, 190–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3798>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 14:44:38

Задача Коши для уравнений в свертках в пространствах аналитических векторнозначных функций

В. П. Громов

Данная работа посвящена задаче Коши неоднородных уравнений в свертках достаточно общей природы. Для решения поставленных задач применяется операторный метод, предложенный в более ранних работах автора. Решения рассматриваемых задач находятся конструктивно в форме хорошо сходящихся степенных векторнозначных рядов. Предлагаемый метод обеспечивает непрерывность получаемых решений относительно начальных данных и неоднородного члена уравнения.

Библиография: 10 названий.

Введение

Уравнения свертки широко распространены как в теоретических, так и в прикладных разделах современной математики. Они, как известно, содержат в себе многие классы дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений и находят применение при разработке многих проблем естествознания, в частности квантовой теории физики (см. [1]). Полная теория таких уравнений далека от завершения.

Данная работа посвящена задаче Коши неоднородных уравнений в свертках достаточно общей природы. Для решения поставленных задач применяется операторный метод, предложенный в работах автора [2], [3]. Решения рассматриваемых задач находятся конструктивно в форме хорошо сходящихся степенных векторнозначных рядов. Предлагаемый метод обеспечивает непрерывность получаемых решений относительно начальных данных и неоднородного члена уравнения.

Отметим, что уравнения в свертках в настоящее время довольно активно изучаются в различных направлениях. Достаточно обширная библиография таких задач дана, например, в работах Тревса [4]. В частности, в обстоятельной, сравнительно недавней работе Стейнберга [5] рассмотрена задача Коши для уравнений свертки в пространствах функций вещественной переменной, быстро убывающих на бесконечности. В этой работе используется классический метод Фурье и, опираясь на теорему Овсянникова [6], доказаны теоремы существования и единственности решений без явного построения этих решений.

1. Дифференциально-операторные уравнения в свертках

Воспользуемся следующими стандартными обозначениями: $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$, $p \geq 1$, $z^k = z_1^{k_1} \dots z_p^{k_p}$, k_p – целые неотрицательные числа, $|k| = k_1 + \dots + k_p$, $(k) = (k_1, \dots, k_p)$ – мультииндекс. Буквой t в дальнейшем обозначается одномерная переменная: $t \in \mathbb{R}$ или $t \in \mathbb{C}$.

Пространство всех целых функций многих комплексных переменных с топологией равномерной сходимости на компактах обозначается $H(\mathbb{C}^p)$, пространство целых функций экспоненциального типа – $[1, \infty)$.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^m u(t, z)}{dt^m} = l_0 * u(t, z) + F(z), \quad m \geq 1, \quad (1.1)$$

где l_0 – фиксированный функционал, действующий по переменной z , $F(z)$ – фиксированная функция – неоднородный член уравнения.

Операция свертки, порождаяемая функционалом l_0 , порождает оператор A по правилу

$$A[u(t, z)] = l_0 * u(t, z) = l_0[u(t, z + h)], \quad z + h = (z_1 + h_1, \dots, z_p + h_p).$$

В дальнейшем функционал l_0 и порождаемый им оператор A уточняются.

Функцию

$$\varphi_0(\xi) = l_0[e^{(\xi \cdot z)}], \quad \xi \cdot z = (\xi_1 z_1 + \dots + \xi_p z_p)$$

называем *характеристической функцией* оператора A . Если не оговорено противное, то в разделе 1 предполагается, что $l_0 \in [1, \infty)^*$ и $\varphi_0(\xi)$ – целая функция многих комплексных переменных. Однако возможны и другие требования относительно l_0 и $\varphi_0(\xi)$.

Ставится следующая задача (задача Коши): найти решение $u(t, z)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\left. \frac{d^k u(t, z)}{dt^k} \right|_{t=0} = f_k(z), \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (1.2)$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть $l_0 \in [1, \infty)^*$. Задача (1.1), (1.2) имеет решение при любых заданных функциях $f_0, f_1, \dots, f_{m-1}$, $F \in [1, \infty)$, и оно представляется в виде

$$u(t, z) = \sum_{k=0}^{m-1} u_k(t, z, f_k) + u_r(t, z, F), \quad (1.3)$$

где

$$u_k(t, z, f_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(f_k)(z)}{(nm+k)!} t^{nm+k}, \quad (1.4)$$

$$u_r(t, z, F) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(F)(z)}{(nm+m)!} t^{m(n+1)}. \quad (1.5)$$

Степенные ряды (1.4), (1.5) сходятся абсолютно по топологии пространства $H(\mathbb{C}^p)$ в каждой точке t и представляют целые вектор-функции экспоненциального типа. Решение (1.3) непрерывно относительно начальных данных и неоднородного члена уравнения.

Теорема 1 является одним из частных случаев более общего результата, относящегося к уравнениям в обобщенных производных Гельфонда–Леонтьева, к формулировке и доказательству которого мы и переходим.

Пусть дано уравнение

$$D_f^m u(t, z) = l_0 * u(t, z) + F(z), \quad m \geq 1, \quad (1.6)$$

где правая часть уравнения такая же, как в (1.1), а слева – обобщенная производная Гельфонда–Леонтьева порядка $m \geq 1$, действующая по переменной $t \in \mathbb{C}$, порожденная целой функцией f порядка роста $\rho > 0$ конечного типа $\sigma > 0$ и удовлетворяющая условию регулярности

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \neq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/\rho} \sqrt[n]{|a_n|} = (\sigma e \rho)^{1/\rho}. \quad (*)$$

Не ограничивая общности, полагаем $a_0 = 1$.

Операторы D_f^m введены в совместной работе [1] Гельфонда и Леонтьева и широко используются в различных задачах анализа. Отметим, в частности, что если $f(z) = e^z$, то $D_f^m = d^m/dt^m$. Так что уравнение (1.1) – действительно частный случай уравнения (1.6).

Ставится задача (задача Коши): найти решение уравнения (1.6), удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$D_f^m u(t, z)|_{t=0} = f_k(z), \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (1.7)$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть $l_0 \in [1, \infty)^*$. Задача (1.6), (1.7) имеет решение при любых заданных начальных функциях $f_0, f_1, \dots, f_{m-1} \in [1, \infty)$ и любом $F \in [1, \infty)$, и это решение представляется суммой вида (1.3), где

$$u_k(t, z, f_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm+k} A^n(f_k)(z) t^{nm+k}, \quad (1.8)$$

$$u_r(t, z, F) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m(n+1)} A^n(F)(z) t^{m(n+1)}. \quad (1.9)$$

Ряды (1.8), (1.9) сходятся абсолютно по топологии пространства $H(\mathbb{C}^p)$ в каждой точке $t \in \mathbb{C}$ и представляют целые вектор-функции, порядок роста которых не превосходит ρ . Решение (1.3) непрерывно относительно начальных данных и неоднородного члена уравнения.

Напомним, что здесь $\{a_n\}$ – тейлоровские коэффициенты фиксированной функции f , порождающей операторы D_f^m , а ρ – ее порядок роста, A – оператор свертки, порожденный функционалом l_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Оператор свертки $A(\Phi) = l_0 * \Phi(z)$ определим на пространстве $[1, \infty)$ целых функций экспоненциального типа. Именно этому пространству принадлежат начальные данные и неоднородный член уравнения (1.6). Этот оператор непрерывно действует на $[1, \infty)$, переводит пространство $[1, \infty)$ в себя и имеет порядок $\beta(A) = 0$ и тип $\alpha(A) = \infty$. Действительно, каждая функция $\Phi \in [1, \infty)$ представляется следующим интегралом Бореля:

$$\Phi(z) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{\Delta_{r+\varepsilon}} e^{(\xi \cdot z)} \gamma_p(\xi) d\xi, \quad \xi \cdot z = (\xi_1 z_1 + \dots + \xi_p z_p),$$

где $\gamma_p(\xi)$ – функция, ассоциированная по Борелю с функцией Φ , $\Delta_{r+\varepsilon}$ – тор $|\xi_i| = r_i$, $i = 1, \dots, p$, $\{r_i\}$ – сопряженные радиусы функции $\gamma_p(\xi)$, $\varepsilon > 0$.

Действуя оператором A^n на функции $\Phi(z)$, находим

$$A^n(\Phi)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{\Delta_{r+\varepsilon}} e^{(\xi \cdot z)} \gamma_p(\xi) \varphi^n(\xi) d\xi \in [1, \infty), \quad n = 0, 1, \dots,$$

где $\varphi_0(\xi)$ – характеристическая функция оператора A .

Далее, рассмотрим преобразование Фурье–Лапласа

$$F(l) = l[e^{(\xi \cdot z)}] = \varphi(\xi), \quad \forall l \in [1, \infty)^*.$$

Известно [1], что оператор F осуществляет топологический изоморфизм

$$[1, \infty)^* \approx H(\mathbb{C}^p).$$

При этом оператор A^* , сопряженный с A , преобразуется в оператор умножения в пространстве $H(\mathbb{C}^p)$ на характеристическую функцию $\varphi_0(\xi)$ оператора A , т.е.

$$A^* \approx B(\varphi) = \varphi_0 \cdot \varphi \quad \forall \varphi \in H(\mathbb{C}^p).$$

Оператор умножения в $H(\mathbb{C}^p)$ имеет нулевой порядок и бесконечный тип, следовательно, $\beta(A^*) = 0$, $\alpha(A^*) = \infty$. Пространство $[1, \infty)$ рефлексивно, а в рефлексивных пространствах справедливы равенства $\beta(A) = \beta(A^*)$, $\alpha(A) = \alpha(A^*)$ (см. [8]), и поэтому $\beta(A) = 0$, $\alpha(A) = \infty$.

Нулевой порядок оператора A обеспечивает абсолютную сходимость рядов (1.8) и (1.9) и их непрерывную зависимость от функций $f_0, f_1, \dots, f_{m-1}$ и F соответственно.

Непосредственной подстановкой функций u_k и u_r , опираясь на свойства оператора D_f^m , нетрудно убедиться, что

$$D_f^m(u_k) = A(u_k), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad D_f^s u_k(t, z, f_k)|_{t=0} = \delta_{sk}, \quad 0 \leq s \leq m-1.$$

Легко проверяется также, что функция $u_r(t, z, F)$ удовлетворяет уравнению (1.6) и всем начальным условиям:

$$D_f^m u_r(t, z, F) = A(u_r(t, z, F)) + F(z), \quad D_f^s u_r(t, z, F)|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq s \leq m-1.$$

Следовательно, сумма (1.3), где функции u_k и u_r определяются соответственно рядами (1.8) и (1.9), являются решениями задачи (1.6), (1.7). Наконец, по формулам, определяющим характеристики роста степенного ряда по его коэффициентам, находим, что u_k и u_r – целые вектор-функции, порядок роста которых не превосходит ρ . Теорема доказана.

Теорема 1, как отмечалось выше, является одним из частных случаев теоремы 2; она следует из теоремы 2, если $f(z) = e^z$.

Выделим два наиболее часто встречающихся в практике случая: $m = 1$, $m = 2$. В этих случаях ряды, представляющие решения, суммируются, и решения представляются красивыми компактными формулами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $m = 1$, тогда задача (1.6), (1.7) имеет решение при любых $f_0, F \in [1, \infty)$. Оно непрерывно относительно функций f_0 и F и представляется формулой

$$u(t, z) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{\Delta_r} e^{(\xi \cdot z)} \left\{ f(t\varphi(\xi))\gamma_0(\xi) + \left[\frac{f(t\varphi(\xi)) - 1}{\varphi(\xi)} \right] \gamma_F(\xi) \right\} d\xi, \quad (1.10)$$

где $\gamma_0(\xi)$, $\gamma_p(\xi)$ – функции, ассоциированные по Борелю с f_0 и F , Δ_r – тор $|\xi_i| = r_i$, $i = 1, \dots, p$, на котором функции γ_0 и γ_F аналитические и на котором нет нулей характеристической функции $\varphi(\xi)$ оператора A , f – функция, порождающая операторы D_f^m , $u(t, z)$ – целая вектор-функция со значениями в $[1, \infty)$ порядка роста, не превосходящего ρ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $m = 2$, тогда задача (1.6), (1.7) имеет решение при любых $f_0, f_1, F \in [1, \infty)$, оно непрерывно относительно функций f_0, f_1, F и представляется следующей формулой:

$$u(t, z) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{\Delta_r} e^{(\xi \cdot z)} \left\{ \gamma_0(\xi) \operatorname{Kh}(t\sqrt{\varphi(\xi)}) + \gamma_1(\xi) \frac{\operatorname{Sh}(t\sqrt{\varphi(\xi)})}{\sqrt{\varphi(\xi)}} + \gamma_F(\xi) \left[\frac{\operatorname{Kh}(t\sqrt{\varphi(\xi)}) - 1}{\varphi(\xi)} \right] \right\} d\xi, \quad (1.11)$$

где $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_F$ – функции, ассоциированные по Борелю с f_0, f_1 и F , Δ_r – тор $|\xi_i| = r_i$, $i = 1, \dots, p$, на котором функции $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_F$ аналитические и на котором нет нулей характеристической функции $\varphi(\xi)$ оператора A , $\operatorname{Kh}(z) = [f(z) + f(-z)] \cdot 2^{-1}$, $\operatorname{Sh}(z) = [f(z) - f(-z)] \cdot 2^{-1}$, $u(t, z)$ – целая вектор-функция со значениями в $[1, \infty)$ и ее порядок роста не превосходит ρ .

Заметим, что если $f(z) = e^z$, то $\operatorname{Kh}(z)$ и $\operatorname{Sh}(z)$ являются гиперболическими косинусом и синусом.

Предложения 1 и 2 являются следствием теоремы 2. Формулы (1.10) и (1.11) доказываются, исходя из представлений (1.8) и (1.9), используя преобразование Бореля функции пространства $[1, \infty)$. Действительно, каждая функция $\Phi \in [1, \infty)$ представляется интегралом Бореля:

$$\Phi(z) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{\Delta_{r+\varepsilon}} e^{(\xi \cdot z)} \gamma_\Phi(\xi) d\xi, \quad (\xi \cdot z) = (\xi_1 z_1 + \dots + \xi_p z_p),$$

где $\gamma_\Phi(\xi)$ – функция, ассоциированная по Борелю с функцией Φ , $\Delta_{r+\varepsilon}$ – тор $|\xi_i| = r_i$, $i = 1, \dots, p$, $\{r_i\}$ – сопряженные радиусы функции $\gamma_p(\xi)$, $\varepsilon > 0$.

Действуя на $\Phi(z)$ оператором A^n , находим

$$A^n[\Phi](z) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{\Delta_{r+\varepsilon}} e^{(\xi \cdot z)} \gamma_\Phi(\xi) \varphi^n(\xi) d\xi, \quad n = 0, 1, \dots,$$

где $\varphi(\xi)$ – характеристическая функция оператора A .

Подставляя эти выражения в равенства (1.8), (1.9) и (1.3) и суммируя соответствующие ряды при $m = 1$ и $m = 2$, получаем искомые формулы (1.10) и (1.11). Еще раз отметим, что если $f(z) = e^z$, то из формул (1.10) и (1.11) следуют компактные формулы, описывающие решения задачи (1.1), (1.2) при $m = 1$ и $m = 2$.

2. Уравнения бесконечного порядка в обобщенных частных производных Гельфонда–Леонтьева

В этом разделе результаты раздела 1 распространяются на дифференциально-операторные уравнения в обобщенных свертках, содержащие обобщенные частные производные Гельфонда–Леонтьева.

2.1. Как известно, операторы обобщенного дифференцирования Гельфонда–Леонтьева определены для аналитических функций одного переменного (см. [9]). Аналогичные операторы можно рассматривать и на пространствах функций многих комплексных переменных. Действительно, пусть

$$\tilde{f}(z) = \sum_{(n)} a_{(n)} z^n, \quad z \in \mathbb{C}^p, \quad (n) = (n_1, \dots, n_p),$$

– фиксированная целая функция конечного порядка $\rho_1 > 0$ типа $\sigma \neq 0, \infty$, удовлетворяющая следующему условию:

$$\forall a_{(n)} \neq 0 \quad \lim_{|n| \rightarrow \infty} |n|^{1/\rho_1} \sqrt[n]{|a_{(n)}|} > 0. \quad (2.1)$$

Не ограничивая общности, полагаем $a_{(0)} = 1$.

Пусть также $F(z) = \sum_{(n)} b_{(n)} z^n$, $z = z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p}$, – производная целая функция.

По определению выражение

$$D_{\tilde{f}}^{(m)}(F)(z) = \sum_{(n)} \frac{b_{(n+m)}}{a_{(n+m)}} a_{(n)} z^n, \quad (2.2)$$

$$(m) = (m_1, \dots, m_p), \quad (n+m) = (n_1 + m_1, \dots, n_p + m_p)$$

назовем *обобщенной частной производной Гельфонда–Леонтьева* функции F порядка (m) , порожденной функцией f .

В силу условия (2.1) ряды (2.2) сходятся абсолютно в каждой точке и представляют целую функцию $D_{\tilde{f}}^{(m)}(F)(z)$.

Отметим, что в данной работе операторы (2.2) используются и вводятся нами лишь в пространствах целых функций. Однако такие операторы можно рассматривать и в других пространствах функций многих комплексных переменных.

Приведем некоторые свойства оператора $D_{\tilde{f}}^{(m)}$, вытекающие из его определения:

- 1) $D^{(m)}[\alpha F_1 + \beta F_2] = \alpha D^{(m)}(F_1) + \beta D^{(m)}(F_2)$ для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $F_1, F_2 \in H(\mathbb{C}^p)$;
- 2) $D^{(m)}(C) = 0$, $C = \text{const}$;
- 3) $D^{(m)}[D^{(s)}(F)] = D^{(s)}[D^{(m)}(F)] = D^{(m+s)}(F)$, $m + s = (m_1 + s_1, \dots, m_p + s_p)$;
- 4) $D_{\tilde{f}}^{(m)}[\tilde{f}(\xi \cdot z)] = \xi_1^{m_1} \dots \xi_p^{m_p} \tilde{f}(\xi \cdot z)$ для всех $\xi, z \in \mathbb{C}^p$, $(\xi \cdot z) = (\xi_1 z_1, \dots, \xi_p z_p)$;

5) если $\tilde{f}(z) = e^{z_1} \dots e^{z_p}$, то

$$D_{\tilde{f}}^{(m)} = \frac{\partial^{m_1 + \dots + m_p}}{\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_p^{m_p}}.$$

Эти свойства показывают, что выражение (2.2) действительно можно трактовать как обобщение частных производных функций.

Используя формулу Коши, легко показать, что $D_{\tilde{f}}^{(m)}$ – непрерывный оператор на пространстве $H(\mathbb{C}^p)$, переводящий это пространство в себя.

2.2. Обобщенное преобразование Бореля. Пусть $F(z) = \sum_{(n)} b_{(n)} z^n$ – произвольная целая функция многих комплексных переменных, порядок роста которой не превосходит $\rho > 0$ и конечного типа. Пространство всех таких функций в дальнейшем обозначаем $[\rho, \infty)$.

Каждой $F \in [\rho, \infty)$ поставим в соответствие функцию

$$\gamma_F(\xi) = \sum_{(n)} \frac{b_{(n)}}{a_{(n)} \xi^{n+1}}, \quad n+1 = (n_1+1, \dots, n_p+1), \quad \xi^{n+1} = \xi_1^{n_1+1} \dots \xi_p^{n_p+1}, \quad (2.3)$$

где $a_{(n)}$ – тейлоровские коэффициенты функции f порядка ρ , удовлетворяющие условию (2.1).

В силу условия (2.1) ряд (2.3) сходится равномерно в некоторой области $G \subset \mathbb{C}^p$, содержащей бесконечно удаленную точку $(\xi_1 = \dots = \xi_p = \infty)$, и определяет функцию $\gamma_F(\xi)$, аналитическую в этой области. Функцию (2.3) в дальнейшем называем *функцией, обобщенно ассоциированной с $F(z)$* , порожденной f .

Отметим, в частности, что если $f(z) = e^{z_1} \dots e^{z_p}$, то (2.3) представляет классическую функцию, ассоциированную по Борелю с $F(z)$ (см. [10]).

Легко проверяется справедливость следующего интегрального представления:

$$F(z) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{\Delta_{r+\varepsilon}} f(\xi \cdot z) \gamma_F(\xi) d\xi, \quad (\xi \cdot z) = (\xi_1 z_1, \dots, \xi_p z_p), \quad (2.4)$$

где $\Delta_{r+\varepsilon}$ – тор $|\xi_i| = r_i$, $\varepsilon > 0$, $i = 1, \dots, p$, $\{r_i\}$ – сопряженные радиусы ряда (2.3) (см. [10]).

Теперь перейдем к уравнениям.

2.3. Рассмотрим уравнение

$$D_f^m u(t, z) = \sum_{(k)} c_{(k)} D_{\tilde{f}}^{(k)} [u(t, z)] + F(z), \quad m \geq 1, \quad (2.5)$$

где D_f^m – одномерный оператор обобщенного дифференцирования порядка $m \geq 1$, порожденный функцией f порядка роста $\rho > 0$ и конечного типа, удовлетворяющей условию регулярности (*) (см. раздел 1), и действующий по переменной t ; $D_{\tilde{f}}^{(k)}$ – многомерный оператор обобщенной частной производной порядка (k) , порожденный целой функцией $\tilde{f}$ многих комплексных переменных порядка роста $\rho_1 > 0$, конечного типа с условием (2.1) и действующий по переменной $z \in \mathbb{C}^p$; $F(z)$ – фиксированная функция – неоднородный член уравнения (2.5).

Функция

$$\varphi(\xi) = \sum_{(k)} c_{(k)} \xi^k, \quad \xi^k = \xi_1^{k_1} \dots \xi_p^{k_p},$$

называется *характеристической функцией* оператора

$$A = \sum_{(k)} c_{(k)} D_{\tilde{f}}^{(k)}.$$

В дальнейшем предполагается, что $\varphi(\xi)$ – целая функция многих комплексных переменных.

Очевидно, что уравнение (2.5) является широким обобщением дифференциальных уравнений в частных производных бесконечного порядка, которые активно изучаются последние десятилетия. А выражение $\sum_{(k)} c_{(k)} D_{\tilde{f}}^{(k)} F$ – обобщенная свертка функции F с некоторым функционалом.

Поставим задачу (задача Коши): найти решение $u(t, z)$ уравнения (2.5), удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$D_{\tilde{f}}^k u(t, z)|_{t=0} = f_k(z), \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2.6)$$

Такую задачу решает

ТЕОРЕМА 3. *Задача (2.5), (2.6) имеет решение при любых заданных (начальных) функциях $f_0, f_1, \dots, f_{m-1} \in [\rho_1, \infty)$ и любом неоднородном члене $F \in [\rho_1, \infty)$, и это решение представляется рядом вида*

$$u(t, z) = \sum_{k=0}^{m-1} u_k(t, z, f_k) + u_r(t, z, F), \quad (2.7)$$

где

$$u_k(t, z, f_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{a_{nm+k}}{(2\pi i)^p} \int_{\Delta_r} \tilde{f}(\xi \cdot z) \gamma_k(\xi) \varphi^n(\xi) d\xi \right\} t^{nm+k}, \quad (2.8)$$

$$u_r(t, z, F) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{a_{nm+m}}{(2\pi i)^p} \int_{\Delta_r} \tilde{f}(\xi \cdot z) \gamma_F(\xi) \varphi^n(\xi) d\xi \right\} t^{m(n+1)}, \quad (2.9)$$

$\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}, \gamma_F$ – обобщенные ассоциированные функции соответственно с функцией f_k , $k = 0, \dots, m-1$, F , $\Delta_r + \varepsilon$ – тор $|\xi_i| = r_i$, $\varepsilon > 0$, $i = 1, \dots, p$, на котором функции γ_k, γ_F аналитические.

Ряды (2.8), (2.9) сходятся абсолютно по топологии пространства в каждой точке $t \in \mathbb{C}$ и представляют целые вектор-функции со значениями в пространстве $[\rho, \infty)$, порядки роста которых не превосходят ρ_1 . Решение (2.7) непрерывно относительно начальных данных $f_1, \dots, f_{m-1}$ и неоднородного члена F уравнения (2.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Запишем уравнение (2.5) в виде

$$D_{\tilde{f}}^m u(t, z) = A[u(t, z)] + F(z), \quad A = \sum_{(k)} c_{(k)} D_{\tilde{f}}^{(k)}. \quad (2.10)$$

Оператор A определен на пространстве $[\rho_1, \infty)$ целых функций многих комплексных переменных порядка роста, не превосходящего ρ_1 (ρ_1 – порядок роста функции f).

Пользуясь обобщенным преобразованием Фурье с ядром $\tilde{f}$, находим, что порядок оператора A равен $\beta(A) = 0$ и его тип $\alpha(A) = \infty$. В этом случае, как показано в работах автора [3] и [8], дифференциально-операторное уравнение вида (2.10), удовлетворяющее начальным условиям (2.6), имеет решение и оно представляется в следующем виде:

$$u(t, z) = \sum_{k=0}^{m-1} u_k(t, z, f_k) + u_r(t, z, F), \quad (2.11)$$

где

$$u_k(t, z, f_k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm+k} A^n(f_k) t^{nm+k}, \quad (2.12)$$

$$u_r(t, z, F) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m(n+1)} A^n(F) t^{m(n+1)}, \quad (2.13)$$

$$k = 0, 1, \dots, m-1, \quad f_0, f_1, \dots, f_{m-1}, F \in [1, \infty).$$

Как отмечалось выше (см. (2.4)), каждая функция $f_0, f_1, \dots, f_{m-1}, F$ пространства $[\rho, \infty)$ представляется соответственно интегралом вида

$$f_k(z) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{\Delta_{r+\varepsilon}} f(\xi \cdot z) \gamma_{f_k}(\xi) d\xi, \quad k = 0, \dots, m-1,$$

$$F(z) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{\Delta_{r+\varepsilon}} f(\xi \cdot z) \gamma_F(\xi) d\xi.$$

Действуя на эти функции оператором A , находим

$$A^n(f_k)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{\Delta_r} e^{(\xi \cdot z)} \gamma_{f_k}(\xi) \varphi^n(\xi) d\xi, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$A^n(F)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{\Delta_{r+\varepsilon}} e^{(\xi \cdot z)} \gamma_F(\xi) \varphi^n(\xi) d\xi.$$

Подставляя эти выражения в (2.13), (2.12), получаем искомые представления (2.9), (2.8), (2.7).

Отметим, что абсолютная сходимость рядов (2.12) и (2.13) в $H(\mathbb{C}^p)$ (а следовательно, и рядов (2.8) и (2.9)), а также непрерывность решения (2.7) относительно начальных данных и неоднородного члена уравнения (2.5) обеспечивается тем фактом, что $\beta(A) = 0$ (см. [3], [8]).

Далее, непосредственной подстановкой убеждаемся, что функция (2.7) удовлетворяет всем условиям теоремы и является искомым решением задачи (2.5), (2.6). Теорема доказана.

Выделим два наиболее часто встречающиеся в практике случая ($m = 1$ и $m = 2$) теоремы 3 и напомним их в интегральной форме.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $m = 1$, тогда задача (2.5), (2.6) имеет решение при любых $f_0, F \in [\rho_1, \infty)$, оно непрерывно относительно этих функций и представляется в виде

$$(t, z) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{\Delta_r} \tilde{f}(\xi \cdot z) \left\{ f(t\varphi(\xi))\gamma_0(\xi) + \left[\frac{f(t\varphi(\xi)) - 1}{\varphi(\xi)} \right] \gamma_F(\xi) \right\} d\xi,$$

где $\gamma_0(\xi), \gamma_F(\xi)$ – обобщенные ассоциированные функции соответственно с f_0 и F по функции f , Δ_r – тор, на котором функции γ_0 и γ_F аналитические и такой, что на нем нет нулей характеристической функции $\varphi(\xi)$ оператора A , f – функция, порождающая оператор D_f .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $m = 2$, тогда задача (2.5), (2.6) имеет решение при любых $f_0, f_1, F \in [\rho_1, \infty)$, оно непрерывно относительно этих функций и представляется в следующем виде:

$$u(t, z) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{\Delta_r} \tilde{f}(\xi \cdot z) \left\{ \gamma_0(\xi) \operatorname{Kh}(t\sqrt{\varphi(\xi)}) + \gamma_1(\xi) \frac{\operatorname{Sh}(t\sqrt{\varphi(\xi)})}{\sqrt{\varphi(\xi)}} + \gamma_F(\xi) \left[\frac{\operatorname{Kh}(t\sqrt{\varphi(\xi)}) - 1}{\varphi(\xi)} \right] \right\} d\xi,$$

где $\operatorname{Kh}(z)$ и $\operatorname{Sh}(z)$ – функции, определенные в предложении 2.

В заключение отметим, что выражение

$$\sum_{(k)} c_{(k)} D_f^{(k)}(F)(z) \equiv \varphi(D_f)F(z) \quad (2.14)$$

можно рассматривать как обобщение свертки функционала, реализуемого последовательностью $\{c_{(n)}\}$, с функцией F посредством оператора D_f . В частности, если $f(z) = e^{z^1} \cdots e^{z^p}$, то (2.14) представляет многомерную (классическую) свертку вида

$$\sum_{(k)} c_{(k)} \frac{\partial^{(n)} F}{\partial z_1^{n_1} \cdots \partial z_p^{n_p}} \equiv \varphi\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)F(z).$$

Отметим также, что операторы вида

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} - \varphi(D)$$

широко распространены в различных разделах анализа. В частности, в упомянутой выше работе Стейнберга [5] рассмотрена задача Коши для дифференциально-операторных уравнений, содержащих оператор вида $(\partial/\partial t) - \varphi(d/dz)$, и доказана теорема существования и единственности решения в некоторых пространствах функций вещественного переменного.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Lax, *Fluctuation and Coherence Phenomena in Classical and Quantum Physics*, Gordon and Breach, New York, 1968.
- [2] В. П. Громов, “Аналитические решения дифференциально-операторных уравнений в локально выпуклых пространствах”, *Докл. РАН*, **394**:3 (2004), 305–308.
- [3] В. П. Громов, “Операторный метод решения линейных уравнений”, *Ученые записки ОГУ*, **3**, Орел, 2002, 4–36.
- [4] F. Trèves, *Ovcyanikov Theorem and Hyperdifferential Operators*, Notas de Matemática, **46**, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Conselho Nacional de Pesquisas, Rio de Janeiro, 1968.
- [5] S. Steinberg, “The Cauchy problem for differential equations of infinite order”, *J. Differential Equations*, **9**:3 (1971), 591–607.
- [6] Л. В. Овсянников, “Сингулярный оператор в шкале банаховых пространств”, *Докл. АН СССР*, **163** (1965), 819–822.
- [7] А. О. Гельфонд, А. Ф. Леонтьев, “Об одном обобщении ряда Фурье”, *Матем. сб.*, **29 (71)**:3 (1951), 477–500.
- [8] В. П. Громов, “Порядок и тип линейного оператора и целые векторнозначные функции”, *Ученые записки ОГУ*, **1**, Орел, 1999, 6–23.
- [9] А. Ф. Леонтьев, *Обобщения рядов экспонент*, Наука, М., 1981.
- [10] Л. Хёрмандер, *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных*, Мир, М., 1968.

В. П. Громов

Орловский государственный университет

Поступило

19.10.2005

Исправленный вариант

11.01.2007