Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Г. Авсянкин, В. М. Деундяк, Об алгебре многомерных интегральных операторов с однородными $SO(n)$ -инвариантными ядрами и радиально слабо осциллирующими коэффициентами, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 2, 163–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3799>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 16:39:31

УДК 517.9

Об алгебре многомерных интегральных операторов с однородными $SO(n)$ -инвариантными ядрами и радиально слабо осциллирующими коэффициентами

О. Г. Авсянкин, В. М. Деундяк

В работе исследуется банахова алгебра $\mathfrak{B}$, порожденная многомерными интегральными операторами, ядра которых однородны степени $(-n)$ и инвариантны относительно группы вращений $SO(n)$, и операторами умножения на радиально слабо осциллирующие функции. Для алгебры $\mathfrak{B}$ строится символическое исчисление, в терминах которого формулируется критерий фредгольмовости и устанавливается формула для вычисления индекса.

Библиография: 13 названий.

Введение. В настоящее время имеется ряд работ, посвященных вопросам разрешимости интегральных операторов с однородными ядрами (см., например, [1]–[6] и цитированные там источники). В статье [4] изучена алгебра, порожденная парными многомерными интегральными операторами, ядра которых однородны степени $(-n)$ и инвариантны относительно группы вращений $SO(n)$. Данная работа продолжает исследования, начатые в [4]. В ней рассматривается банахова алгебра $\mathfrak{B}$, порожденная многомерными интегральными операторами с однородными $SO(n)$ -инвариантными ядрами и операторами умножения на радиально слабо осциллирующие функции. Для операторов из алгебры $\mathfrak{B}$ определяется символ, в терминах которого формулируется критерий фредгольмовости и устанавливается формула для вычисления индекса.

1. Предварительные сведения и вспомогательные результаты. Введем необходимые обозначения, которые будем использовать на протяжении всей статьи. Пусть $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ – множества целых, действительных и комплексных чисел соответственно; $\mathbb{R}_{\pm} = \{t \in \mathbb{R} \mid \pm t \geq 0\}$; $\mathbb{Z}_{\pm} = \mathbb{R}_{\pm} \cap \mathbb{Z}$. Если $\mathcal{B}$ – произвольное банахово пространство, то $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ – банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов в $\mathcal{B}$, а $\mathcal{K}(\mathcal{B})$ – идеал компактных операторов. Пусть $\text{Fr}(\mathcal{V})$ – пространство фредгольмовых операторов из алгебры $\mathcal{V} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Если $\mathcal{U}$ – произвольная банахова алгебра, то $G\mathcal{U}$ – группа обратимых элементов из $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}^+$ – унитаризация $\mathcal{U}$, $GL_{\mathcal{K}(\mathcal{B})} = G(\mathcal{K}(\mathcal{B}))^+$. Унитарную подалгебру $\mathcal{U}_0$ произвольной унитарной банаховой алгебры $\mathcal{U}$ будем называть *наполненной* в $\mathcal{U}$, если $G\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_0 \cap G\mathcal{U}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00297-а).

Для компакта X и метризуемого пространства Y через $C(X; Y)$ будем обозначать пространство непрерывных отображений X в Y с равномерной топологией; пусть $C(X) = C(X; \mathbb{C})$. Для локально компактного некомпактного X через $\dot{X} = X^\circ$ будем обозначать компактификацию X точкой ∞ ; пусть

$$C_0(X; Y) = \{\varphi : \varphi \in C(\dot{X}; Y), \varphi(\infty) = 0\}$$

для произвольной алгебры Y .

На прямой $\mathbb{R}$ рассмотрим множество $\Omega(\mathbb{R})$ всех непрерывных ограниченных функций f , которые для любого отрезка D из $\mathbb{R}$ удовлетворяют условию

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \sup\{|f(t) - f(t+h)| : h \in D\} = 0. \quad (1.1)$$

Функции из $\Omega(\mathbb{R})$ называют *слабо осциллирующими на бесконечности*. Приведем необходимые факты об этих функциях (см. [7], [8]). Известно, что $\Omega(\mathbb{R})$ – замкнутая подалгебра C^* -алгебры $L_\infty(\mathbb{R})$, а пространство максимальных идеалов C^* -алгебры $\Omega(\mathbb{R})$, которое обозначим $\widehat{\mathbb{R}}$, можно рассматривать как компактификацию $\mathbb{R}$, причем $\mathbb{R}$ гомеоморфно вкладывается в $\widehat{\mathbb{R}}$. Нарост $\mathfrak{R}(\mathbb{R}) = \widehat{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$ состоит из двух компонент связности $\mathfrak{R}_\pm(\mathbb{R})$, которые соответствуют лучам $\mathbb{R}_\pm$; эти компоненты представляют собой бесконечные связные множества с одноточечными компонентами линейной связности. Непрерывное продолжение функций из алгебры $\Omega(\mathbb{R})$ с $\mathbb{R}$ на $\widehat{\mathbb{R}}$ реализует изометрический изоморфизм C^* -алгебр $\Omega(\mathbb{R})$ и $C(\widehat{\mathbb{R}})$, далее эти алгебры мы будем отождествлять. Пусть $\Omega(\mathbb{R}_+)$ – замкнутая подалгебра C^* -алгебры $L_\infty(\mathbb{R}_+)$, состоящая из всех непрерывных ограниченных функций f на луче $\mathbb{R}_+$, которые для любого отрезка D из $\mathbb{R}_+$ удовлетворяют условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup\{|f(t) - f(ht)| : h \in D\} = \lim_{t \rightarrow 0} \sup\{|f(t) - f(ht)| : h \in D\} = 0.$$

Функции из $\Omega(\mathbb{R}_+)$ будем называть *слабо осциллирующими в нуле и на бесконечности*. Нетрудно видеть, что замена переменных $t \mapsto \exp(-t)$ устанавливает изоморфизм $\Omega(\mathbb{R}_+)$ на $\Omega(\mathbb{R})$.

Аналоги слабо осциллирующих функций введены для достаточно произвольных локально компактных (не обязательно абелевых) групп (см. [8]), в частности, на n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Далее мы будем использовать существенно более узкий класс функций на $\mathbb{R}^n - \Omega_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$, который определим как множество функций вида $\varphi(x) = \varphi_0(|x|)$, где $\varphi_0 \in \Omega(\mathbb{R}_+)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $1 < p, p' < +\infty$ и $1/p + 1/p' = 1$. Через $V_p = V_p(\mathbb{R})$ обозначим замкнутую подалгебру банаховой алгебры $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}))$, порожденную операторами свертки

$$(C_a f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x-y)f(y) dy, \quad (1.2)$$

где $a \in L_1(\mathbb{R})$. Банахово пространство $L_p(\mathbb{R})$ -мультипликаторов обозначим через M_p^p [9]. Сопоставим оператору свертки C_a преобразование Фурье $\widehat{a}$ ($\in C_0(\mathbb{R})$) ядра a и тем самым зададим мономорфизм банаховых алгебр $\Phi_p: V_p(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$, являющийся в случае $p = 2$ изометрическим изоморфизмом. Введем на $C_{0,p}(\mathbb{R}) = \Phi_p(V_p(\mathbb{R}))$ топологию пространства M_p^p , в которой Φ_p осуществляет гомеоморфизм $V_p(\mathbb{R})$ на $C_{0,p}(\mathbb{R})$. Элементы банаховой алгебры $(C_{0,p}(\mathbb{R}))^+$ можно рассматривать

как функции, определенные на одноточечной компактификации $\dot{\mathbb{R}}$. Пусть $C_p(\dot{\mathbb{R}}) = (C_{0,p}(\mathbb{R}))^+$. Отметим, что банахова алгебра $C_p(\dot{\mathbb{R}})$ непрерывно вложена в банахову алгебру $C(\dot{\mathbb{R}})$, а при $p = 2$ совпадает с ней.

В C^* -алгебре $C(\mathfrak{R}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R})$ выделим замкнутую подалгебру функций φ , для которых $\varphi|_{\mathfrak{R}(\mathbb{R}) \times \{\infty\}} = \text{Const}$, и отождествим ее с C^* -алгеброй $C((\mathfrak{R}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R})')$. В C^* -алгебре $C((\mathfrak{R}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R})')$ выделим подалгебру $\mathcal{S}_p$ таких функций φ , для которых $\varphi(\eta, \cdot) \in C_p(\dot{\mathbb{R}})$, $\eta \in \mathfrak{R}(\mathbb{R})$. Из результатов работы [8] вытекает

ЛЕММА 1.1. *Множество $\mathcal{S}_p$ является банаховой алгеброй, если норму для произвольной функции φ из $\mathcal{S}_p$ задать формулой*

$$\|\varphi\| = \max_{\eta \in \mathfrak{R}(\mathbb{R})} \|\varphi(\eta, \cdot)\|_{C_p(\dot{\mathbb{R}})}.$$

Алгебра $\mathcal{S}_p$ непрерывно и плотно вложена в C^* -алгебру $C((\mathfrak{R}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R})')$, наполнена в этой C^* -алгебре, а при $p = 2$ совпадает с ней. Пространство максимальных идеалов алгебры $\mathcal{S}_p$ гомеоморфно $(\mathfrak{R}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R})'$.

Через $W_p = W_p(\mathbb{R})$ обозначим замкнутую подалгебру банаховой алгебры $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}))$, порожденную всеми операторами вида

$$B = \lambda I + \sum_{i=1}^m M_{f_i} C_{a_i} + T, \quad (1.3)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, M_{f_i} – оператор умножения на функцию f_i из $\Omega(\mathbb{R})$, $a_i \in L_1(\mathbb{R})$, C_{a_i} – оператор свертки вида (1.2), $T \in \mathcal{K}(L_p(\mathbb{R}))$.

Символом оператора B вида (1.3) назовем функцию $\sigma_B(\eta, \xi) \in \mathcal{S}_p$, определенную формулой

$$\sigma_B(\eta, \xi) = \lambda + \sum_{i=1}^m f_i(\eta) \hat{a}_i(\xi), \quad (1.4)$$

где $\eta \in \mathfrak{R}(\mathbb{R})$, $\xi \in \dot{\mathbb{R}}$.

Сформулируем в удобном для нас виде теорему о символах, фредгольмовости и индексе операторов из банаховой алгебры W_p , которая в более общем виде содержится в [8], [10].

ТЕОРЕМА 1.1. *Сопоставление оператору B символа σ_B по непрерывности продолжается до гомоморфизма банаховых алгебр*

$$s_p: W_p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_p.$$

Гомоморфизм s_p является эпиморфизмом с ядром $\mathcal{K}(L_p(\mathbb{R}))$. Оператор B из W_p фредгольмов тогда и только тогда, когда символ σ_B невырожден. Если оператор B из W_p фредгольмов, то его индекс вычисляется по формуле

$$\text{ind}(B) = -\frac{1}{2\pi} \Delta \arg(\sigma_B(\eta_-, \cdot)(\sigma_B(\eta_+, \cdot))^{-1}), \quad (1.5)$$

где $\eta_{\pm}$ – произвольная фиксированная точка из $\mathfrak{R}_{\pm}(\mathbb{R})$.

2. Фредгольмовость и индекс модельных операторов. Ниже будут использоваться следующие обозначения: $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$; $x' = x/|x|$, если $|x| \neq 0$; $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$; $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. В пространстве $L_p(S_{n-1})$ рассмотрим подпространство сферических гармоник порядка $m \in \mathbb{Z}_+$ и зафиксируем в нем нормированный базис $\{Y_{m,\mu}\}_{\mu=1,\dots,d_n(m)}$, где

$$d_n(m) = (n + 2m - 2) \frac{(n + m - 3)!}{m!(n - 2)!}.$$

Рассмотрим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ интегральный оператор

$$(K\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y) \varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

где ядро $k(x, y)$ – определенная на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ функция, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) для всех $\alpha > 0$ выполнено $k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k(x, y)$ (однородность степени $(-n)$);
- 2) для всех $\omega \in SO(n)$ выполнено $k(\omega(x), \omega(y)) = k(x, y)$ (инвариантность относительно вращений);
- 3) $\kappa = \int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, y)| |y|^{-n/p} dy < \infty$, где $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

Как известно [1; с. 70], оператор K ограничен в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, причем $\|K\| \leq \kappa$. Цель этого пункта – исследование разрешимости модельных операторов вида

$$A = \lambda I + \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_j} K_j + T, \quad (2.2)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, M_{a_j} – оператор умножения на функцию a_j из $\Omega_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$, K_j – оператор вида (2.1) с ядром k_j , $T \in \mathcal{K}(L_p(\mathbb{R}^n))$.

Чтобы получить условия фредгольмовости оператора A , рассмотрим в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ уравнение, порождаемое оператором $A - T$:

$$\lambda \varphi(x) + \sum_{j=1}^{\ell} a_j(x) \int_{\mathbb{R}^n} k_j(x, y) \varphi(y) dy = f(x). \quad (2.3)$$

Так как функции k_j удовлетворяют условию 2), то существуют такие определенные на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times [-1, 1]$ функции $k_{0,j}$, что $k_j(x, y) = k_{0,j}(|x|^2, |y|^2, x' \cdot y')$ [11; с. 36]. Учитывая это и переходя в уравнении (2.3) к сферическим координатам $x = r\sigma$, $y = \rho\theta$, получим

$$\lambda \Phi(r\sigma) + \sum_{j=1}^{\ell} a_{0,j}(r) \int_0^\infty \int_{S_{n-1}} \frac{1}{r} D_j \left(\frac{\rho}{r}, \sigma \cdot \theta \right) \Phi(\rho\theta) d\rho d\theta = F(r\sigma), \quad (2.4)$$

где

$$\Phi(r\sigma) = \varphi(r\sigma) r^{(n-1)/p}, \quad F(r\sigma) = f(r\sigma) r^{(n-1)/p},$$

$$D_j(\rho, t) = k_{0,j}(1, \rho^2, t) \rho^{(n-1)/p'},$$

а $a_{0,j}$ – такая функция из $\Omega(\mathbb{R}_+)$, что $a_j(x) = a_{0,j}(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Нетрудно проверить, что

$$\int_0^\infty \int_{-1}^1 |D_j(\rho, t)| \rho^{-1/p} (1-t^2)^{(n-3)/2} d\rho dt < \infty. \quad (2.5)$$

Умножая уравнение (2.4) на $Y_{m,\mu}$, интегрируя по единичной сфере и применяя формулу Функа–Гекке [11; с. 43], получим диагональную бесконечную систему одномерных интегральных уравнений

$$\lambda \Phi_{m,\mu}(r) + \sum_{j=1}^{\ell} a_{0,j}(r) \int_0^\infty \frac{1}{r} D_{j,m}\left(\frac{\rho}{r}\right) \Phi_{m,\mu}(\rho) d\rho = F_{m,\mu}(r), \quad (2.6)$$

где $m \in \mathbb{Z}_+$, $\mu = 1, 2, \dots, d_n(m)$,

$$\begin{aligned} \Phi_{m,\mu}(r) &= \int_{S_{n-1}} \Phi(r\sigma) Y_{m,\mu}(\sigma) d\sigma, & F_{m,\mu}(r) &= \int_{S_{n-1}} F(r\sigma) Y_{m,\mu}(\sigma) d\sigma, \\ D_{j,m}(\rho) &= \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma((n-1)/2)} \int_{-1}^1 D_j(\rho, t) P_m(t) (1-t^2)^{(n-3)/2} dt, \end{aligned} \quad (2.7)$$

а $P_m(t)$ – многочлены Лежандра. В пространстве $L_p(0; \infty)$ рассмотрим операторы

$$(K_{j,m}g)(r) = \int_0^\infty \frac{1}{r} D_{j,m}\left(\frac{\rho}{r}\right) g(\rho) d\rho, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, 2, \dots, \ell,$$

и формирующие левую часть системы (2.6) операторы

$$A_m = \lambda I + \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_{0,j}} K_{j,m}, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

ЛЕММА 2.1. Пусть A – оператор вида (2.2) и $\lambda \neq 0$. Тогда найдется такое число $m_0 \in \mathbb{Z}_+$, что для всех $m > m_0$ операторы A_m обратимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [1; с. 52], что

$$\|K_{j,m}\| \leq \int_0^\infty |D_{j,m}(\rho)| \rho^{-1/p} d\rho.$$

Нетрудно проверить, что $\lim_{m \rightarrow \infty} D_{j,m}(\rho) = 0$ почти для всех $\rho \in (0, \infty)$ (см. (2.7)). Тогда, применяя с учетом (2.5) мажорантную теорему Лебега, получаем, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|K_{j,m}\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\infty |D_{j,m}(\rho)| \rho^{-1/p} d\rho = 0.$$

Поэтому найдется такое натуральное число m_0 , что для всех $m > m_0$

$$\left\| \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_{0,j}} K_{j,m} \right\| \leq \sum_{j=1}^{\ell} \|a_{0,j}\|_{\infty} \|K_{j,m}\| < |\lambda|.$$

Следовательно, оператор A_m , где $m > m_0$, обратим.

ЛЕММА 2.2. Если A – оператор вида (2.2), $\lambda \neq 0$, а m_0 – число, определенное в лемме 2.1, то оператор A фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмовы все операторы A_m , $m = 0, 1, \dots, m_0$. В случае фредгольмовости оператора A

$$\text{ind } A = \sum_{m=0}^{m_0} d_n(m) \text{ind } A_m. \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем по схеме доказательства теоремы 6.12 книги [1]. В пространстве

$$\tilde{L}_p(\mathbb{R}^n) = \{\Phi(r\sigma) : \Phi(r\sigma)r^{-(n-1)/p} \in L_p(\mathbb{R}^n)\}$$

рассмотрим оператор $\tilde{A}$, определяемый левой частью уравнения (2.4). Запишем его в виде

$$\tilde{A} = \lambda I + \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_0,j} \tilde{K}_j,$$

где оператор $\tilde{K}_j$ задается формулой

$$(\tilde{K}_j \Phi)(r\sigma) = \int_0^\infty \int_{S_{n-1}} \frac{1}{r} D_j \left(\frac{\rho}{r}, \sigma \cdot \theta \right) \Phi(\rho\theta) d\rho d\theta.$$

Очевидно, что оператор A фредгольмов тогда и только тогда, когда оператор $\tilde{A}$ фредгольмов в пространстве $\tilde{L}_p(\mathbb{R}^n)$.

Определим в $\tilde{L}_p(\mathbb{R}^n)$ проектор $\mathcal{P}_N$ равенством

$$(\mathcal{P}_N \Phi)(r\sigma) = \sum_{m=0}^N \sum_{\mu=1}^{d_n(m)} \Phi_{m,\mu}(r) Y_{m,\mu}(\sigma)$$

и обозначим через $\mathcal{Q}_N$ дополнительный проектор. Известно [1; с. 80], что

$$\mathcal{P}_N \tilde{K}_j \mathcal{Q}_N = 0 \quad \text{и} \quad \mathcal{Q}_N \tilde{K}_j \mathcal{P}_N = 0.$$

Следовательно,

$$\mathcal{P}_N \tilde{A} \mathcal{Q}_N = 0 \quad \text{и} \quad \mathcal{Q}_N \tilde{A} \mathcal{P}_N = 0.$$

Учитывая это, запишем матричное равенство

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P}_N & \mathcal{Q}_N \\ \mathcal{Q}_N & \mathcal{P}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{P}_N & \mathcal{Q}_N \\ \mathcal{Q}_N & \mathcal{P}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I + \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_0,j} \mathcal{P}_N \tilde{K}_j \mathcal{P}_N & 0 \\ 0 & \lambda I + \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_0,j} \mathcal{Q}_N \tilde{K}_j \mathcal{Q}_N \end{pmatrix}.$$

Ясно, что оператор $\tilde{A}$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмовы операторы

$$\lambda I + \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_0,j} \mathcal{P}_N \tilde{K}_j \mathcal{P}_N \quad \text{и} \quad \lambda I + \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_0,j} \mathcal{Q}_N \tilde{K}_j \mathcal{Q}_N.$$

Покажем, что последний оператор обратим при достаточно большом N .

В [1; с. 80–81] доказано, что оператор $\tilde{K}_j$ можно аппроксимировать с любой степенью точности конечномерными операторами. Точнее говоря, показано, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $b_{j,N}(\rho, t)$ вида

$$b_{j,N}(\rho, t) = \frac{1}{2} \pi^{-(n-1)/2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \sum_{m=0}^N d_n(m) b_{j,m}(\rho) P_m(t),$$

где $P_m(t)$ – многочлены Лежандра, такая, что оператор

$$(R_{j,N}\Phi)(r\sigma) = \int_0^\infty \int_{S_{n-1}} \frac{1}{r} b_{j,N}\left(\frac{\rho}{r}, \sigma \cdot \theta\right) \Phi(\rho\theta) d\rho d\theta$$

удовлетворяет неравенству

$$\|\tilde{K}_j - R_{j,N}\|_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \tilde{L}_p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon. \quad (2.9)$$

При этом всегда можно считать, что $N > m_0$. Непосредственно устанавливается равенство $\mathcal{Q}_N R_{j,N} \mathcal{Q}_N = 0$, из которого следует, что

$$\lambda I + \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_0,j} \mathcal{Q}_N \tilde{K}_j \mathcal{Q}_N = \lambda I + \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_0,j} \mathcal{Q}_N (\tilde{K}_j - R_{j,N}) \mathcal{Q}_N.$$

Если $\lambda \neq 0$, то в силу (2.9) можно добиться выполнения неравенства

$$\left\| \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_0,j} \mathcal{Q}_N (\tilde{K}_j - R_{j,N}) \mathcal{Q}_N \right\|_{\tilde{L}_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \tilde{L}_p(\mathbb{R}^n)} < |\lambda|,$$

из которого вытекает обратимость оператора

$$\lambda I + \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_0,j} \mathcal{Q}_N \tilde{K}_j \mathcal{Q}_N.$$

Таким образом, оператор $\tilde{A}$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмов оператор

$$\lambda I + \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_0,j} \mathcal{P}_N \tilde{K}_j \mathcal{P}_N,$$

причем их индексы равны. Фредгольмовость последнего равносильна фредгольмовости оператора

$$\mathcal{P}_N \left(\lambda I + \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_0,j} \tilde{K}_j \right) \Big|_{\text{Im } \mathcal{P}_N}, \quad (2.10)$$

причем их индексы равны [1; с. 6]. Ясно, что уравнение, порождаемое оператором (2.10), сводится к конечной системе вида (2.6), где $m = 0, 1, \dots, N$. Таким образом, необходимым и достаточным условием фредгольмовости оператора $\tilde{A}$ является фредгольмовость операторов A_m , где $m = 0, 1, \dots, N$. Так как по лемме 2.1 при $m_0 < m \leq N$ операторы A_m обратимы, то получаем требуемый результат. Формула (2.8) усматривается непосредственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Отметим, что использование в записях “неопределенного” числа m_0 несколько неудобно. Поэтому, принимая во внимание, что для любого $m > m_0$ выполнено $\text{ind } A_m = 0$, перепишем (2.8) в виде

$$\text{ind } A = \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \text{ind } A_m. \quad (2.11)$$

Определим изоморфизм $W_p: L_p(0; \infty) \rightarrow L_p(\mathbb{R})$ формулой

$$(W_p \varphi)(t) = e^{-t/p} \varphi(e^{-t}).$$

Нетрудно проверить (см. также [1; с. 52]), что оператор

$$B_m = W_p A_m W_p^{-1} \quad (2.12)$$

задается в $L_p(\mathbb{R})$ формулой

$$(B_m \psi)(t) = \lambda \psi(t) + \sum_{j=1}^{\ell} a_{0,j}(e^{-t}) \int_{-\infty}^{\infty} h_{j,m}(t-s) \psi(s) ds,$$

где

$$h_{j,m}(t) = D_{j,m}(e^{-t}) e^{t/p'} \in L_1(\mathbb{R}). \quad (2.13)$$

Пусть $\tilde{a}_{0,j}(t) = a_{0,j}(e^{-t})$. Тогда $\tilde{a}_{0,j}(t) \in \Omega(\mathbb{R}) = C(\widehat{\mathbb{R}})$. Следовательно, оператор B_m есть оператор вида (1.3). В соответствии с (1.4), (2.13) и (2.7) символ оператора B_m имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{B_m}(\eta, \xi) &= \lambda + \sum_{j=1}^{\ell} \tilde{a}_{0,j}(\eta) \widehat{h}_{jm}(\xi) \\ &= \lambda + \sum_{j=1}^{\ell} \tilde{a}_{0,j}(\eta) \int_{\mathbb{R}^n} k_j(e_1, y) P_m(e_1 \cdot y') |y|^{-n/p+i\xi} dy, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $\eta \in \mathfrak{R}(\mathbb{R})$, $\xi \in \dot{\mathbb{R}}$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ компактификацию множества $\mathbb{Z}_+ \times \mathfrak{R}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ точкой ∞ . Символом оператора A вида (2.2) назовем функцию σ_A , заданную на множестве $\mathbb{Z}_+ \times \mathfrak{R}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ равенством

$$\sigma_A(m, \eta, \xi) = \lambda + \sum_{j=1}^{\ell} \tilde{a}_{0,j}(\eta) \int_{\mathbb{R}^n} k_j(e_1, y) P_m(e_1 \cdot y') |y|^{-n/p+i\xi} dy, \quad (2.15)$$

а в точке ∞ – равенством $\sigma(\infty) = \lambda$. Нетрудно видеть, что такое определение символа корректно и $\sigma_A \in C(\mathfrak{M})$. Итак, мы приходим к основному результату этого пункта – критерию разрешимости модельных операторов вида (2.2).

ТЕОРЕМА 2.1. Для того чтобы оператор A вида (2.2) был фредгольмовым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\forall \mu \in \mathfrak{M} \quad \sigma_A(\mu) \neq 0. \quad (2.16)$$

Если условие (2.16) выполнено, то

$$\text{ind } A = - \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \Delta \arg(\sigma_A(m, \eta_-, \cdot)(\sigma_A(m, \eta_+, \cdot))^{-1}), \quad (2.17)$$

где $\eta_{\pm} \in \mathfrak{R}(\mathbb{R})$ – произвольные фиксированные точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 2.1, 2.2 и подобия операторов A_m и B_m (см. (2.12)) следует, что оператор A фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмовы в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ все операторы B_m , причем начиная с некоторого номера m_0 все операторы B_m обратимы. В силу (2.11)

$$\text{ind } A = \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \text{ind } B_m,$$

причем сумма в правой части фактически конечная. Учитывая связь символа оператора A с символами операторов B_m (формулы (2.14), (2.15)) и используя теорему 1.1, получаем требуемый результат.

3. Теорема о коммутаторе. Пусть $a \in \Omega_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$, $a_0 \in \Omega(\mathbb{R}_+)$ и $a(x) = a_0(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^n$. В этом пункте будем исследовать свойства коммутатора $M_a K - K M_a$:

$$((M_a K - K M_a)\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [a(x) - a(y)]k(x, y)\varphi(y) dy,$$

где K – оператор вида (2.1).

ЛЕММА 3.1. Для любой функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ выполняются условия

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |a_0(|x|) - a_0(|x||t|)| |f(t)| dt = 0, \quad (3.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |a_0(|x|) - a_0(|x||t|)| |f(t)| dt = 0. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем (3.1). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и зафиксируем такие положительные числа α, β , что

$$\int_{|t| < \alpha} |f(t)| dt < \frac{\varepsilon}{8\|a_0\|_{\infty}}, \quad \int_{|t| > \beta} |f(t)| dt < \frac{\varepsilon}{8\|a_0\|_{\infty}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} |a_0(|x|) - a_0(|x||t|)| |f(t)| dt \\ & \leq 2 \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |a_0(|x|)| \int_{|t| < \alpha} |f(t)| dt + \sup_{\alpha \leq |t| \leq \beta} |a_0(|x|) - a_0(|x||t|)| \int_{\alpha \leq |t| \leq \beta} |f(t)| dt \\ & \quad + 2 \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |a_0(|x|)| \int_{|t| > \beta} |f(t)| dt \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \|f\|_1 \sup_{\alpha \leq |t| \leq \beta} |a_0(|x|) - a_0(|t||x|)|. \end{aligned}$$

В силу определения $\Omega(\mathbb{R}_+)$ по выбранному ε найдется такое $\delta (> 0)$, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $|x| < \delta$, имеет место оценка

$$\sup_{\alpha \leq |t| \leq \beta} |a_0(|x|) - a_0(|x||t|)| < \frac{\varepsilon}{2\|f\|_1}$$

и, следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |a_0(|x|) - a_0(|x||t|)| |f(t)| dt < \varepsilon.$$

Таким образом, равенство (3.1) доказано. Равенство (3.2) проверяется аналогично.

Пусть X – измеримое подмножество $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим действующий из пространства $L_p(\mathbb{R}^n)$ в пространство $L_p(X)$ оператор

$$(K_b \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} b(x, y) k(x, y) \varphi(y) dy, \quad x \in X,$$

где $b \in L_\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, а k удовлетворяет условиям 1)–3).

Из доказательства теоремы 1 работы [12] вытекает, что оператор K_b ограничен и справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|K_b\| &\leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, t)| |t|^{-n/p} |b(x, |x|\omega_x(t))| dt \right)^{1/p'} \\ &\quad \times \operatorname{ess\,sup}_{y \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k(t, e_1)| |t|^{-n/p'} |b(|y|\omega_y(t), y)| dt \right)^{1/p}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где ω_x – такая матрица из $SO(n)$, что $\omega_x(e_1) = x'$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $a \in \Omega_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$, K – оператор вида (2.1). Тогда

$$M_a K - K M_a \in \mathcal{K}(L_p(\mathbb{R}^n)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $|k(e_1, t)| |t|^{-n/p} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то в силу леммы 3.1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, t)| |t|^{-n/p} |a_0(|x|) - a_0(|x||t|)| dt &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, t)| |t|^{-n/p} |a_0(|x|) - a_0(|x||t|)| dt &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in D_N} \int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, t)| |t|^{-n/p} |a_0(|x|) - a_0(|x||t|)| dt < \varepsilon,$$

где

$$D_N = \left\{ x : |x| < \frac{1}{N} \vee |x| > N \right\}.$$

Пусть P_{D_N} – оператор умножения на характеристическую функцию множества D_N .

Полагая в (3.3) $X = D_N$ и $b(x, y) = a_0(|x|) - a_0(|y|)$, получаем

$$\begin{aligned} &\|P_{D_N}(M_a K - K M_a)\| \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{x \in D_N} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, t)| |t|^{-n/p} |a_0(|x|) - a_0(|x||t|)| dt \right)^{1/p'} \\ &\quad \times \operatorname{ess\,sup}_{y \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k(t, e_1)| |t|^{-n/p'} |a_0(|y||t|) - a_0(|y|)| dt \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
& \| (M_a K - K M_a) - (I - P_{D_N})(M_a K - K M_a) \| \\
& \leq \| P_{D_N}(M_a K - K M_a) \| \\
& \leq 2\kappa^{1/p} \|a_0\|_\infty^{1/p} \operatorname{ess\,sup}_{x \in D_N} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, t)| |t|^{-n/p} |a_0(|x|) - a_0(|x||t|)| \, dt \right)^{1/p'} \\
& < 2\kappa^{1/p} \|a_0\|_\infty^{1/p} \varepsilon^{1/p'},
\end{aligned}$$

где κ определяется из 3). В силу [1; с. 380] $(I - P_{D_N})(M_a K - K M_a) \in \mathcal{K}(L_p(\mathbb{R}^n))$, поэтому $M_a K - K M_a \in \mathcal{K}(L_p(\mathbb{R}^n))$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $a_j \in \Omega_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$ и K_j – оператор вида (2.1), $j = 1, 2$. Тогда

$$M_{a_1} K_1 \cdot M_{a_2} K_2 = M_{a_1 a_2} K_1 K_2 + T, \quad T \in \mathcal{K}(L_p(\mathbb{R}^n)).$$

4. Фредгольмовость и индекс произвольных операторов. Обозначим через $\mathfrak{B}$ замкнутую подалгебру банаховой алгебры $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{R}^n))$, порожденную всеми операторами A вида (2.2). Пусть $\mathfrak{T} = \mathcal{K}(L_p(\mathbb{R}^n))$. Рассмотрим фактор-алгебру $\mathfrak{B}/\mathfrak{T}$. Нетрудно видеть, что множество

$$(\mathfrak{B}/\mathfrak{T})_0 = \left\{ \lambda I + \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_j} K_j + \mathfrak{T} \right\},$$

где K_j – оператор вида (2.1), $a_j \in \Omega_{\text{rad}}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, плотно в алгебре $\mathfrak{B}/\mathfrak{T}$.

Заметим, что фактор-алгебра $\mathfrak{B}/\mathfrak{T}$ коммутативна. В самом деле, коммутирование элементов из множества $(\mathfrak{B}/\mathfrak{T})_0$ вытекает из теоремы 3.1, а для произвольных элементов из алгебры $\mathfrak{B}/\mathfrak{T}$ коммутирование проверяется с помощью приближения элементами из множества $(\mathfrak{B}/\mathfrak{T})_0$. Применим методы теории коммутативных банаховых алгебр (см., например, [13]) к изучению алгебры $\mathfrak{B}/\mathfrak{T}$.

Символ $\sigma_{[A]} \in C(\mathfrak{M})$ элемента

$$A + \mathfrak{T} = \lambda I + \sum_{j=1}^{\ell} M_{a_j} K_j + \mathfrak{T} \in (\mathfrak{B}/\mathfrak{T})_0 \quad (4.1)$$

определим равенством $\sigma_{[A]}(\mu) = \sigma_A(\mu)$, $\mu \in \mathfrak{M}$ (см. (2.13)). Нетрудно проверить, что сумме и произведению элементов из множества $(\mathfrak{B}/\mathfrak{T})_0$ отвечает сумма и произведение их символов.

ЛЕММА 4.1. Для любого элемента $A + \mathfrak{T} \in (\mathfrak{B}/\mathfrak{T})_0$ вида (4.1) и его символа $\sigma_{[A]}$ справедливо неравенство

$$\|\sigma_{[A]}\|_{C(\mathfrak{M})} \leq \|A + \mathfrak{T}\|_{\mathfrak{B}/\mathfrak{T}}. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 1 из [4].

Определим теперь символ для произвольного элемента из $\mathfrak{B}/\mathfrak{T}$. Пусть $A + \mathfrak{T} \in (\mathfrak{B}/\mathfrak{T}) \setminus (\mathfrak{B}/\mathfrak{T})_0$. Тогда найдется такая последовательность $\{A_s + \mathfrak{T}\}_{s=1}^\infty \subset (\mathfrak{B}/\mathfrak{T})_0$, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|(A + \mathfrak{T}) - (A_s + \mathfrak{T})\|_{\mathfrak{B}/\mathfrak{T}} = 0.$$

В силу (4.2) последовательность $\{\sigma_{[A_s]}\}_{s=1}^{\infty}$ символов элементов $\{A_s + \mathfrak{T}\}_{s=1}^{\infty}$ сходится по норме пространства $C(\mathfrak{M})$ к некоторой функции из $C(\mathfrak{M})$, которую будем называть *символом* элемента $A + \mathfrak{T}$ и обозначать через $\sigma_{[A]}$.

Оценка (4.2) распространяется по непрерывности на всю алгебру $\mathfrak{B}/\mathfrak{T}$, т.е. для любого элемента $A + \mathfrak{T} \in \mathfrak{B}/\mathfrak{T}$ и его символа $\sigma_{[A]}$ справедливо неравенство (4.2).

ЛЕММА 4.2. *Пространство максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{B}/\mathfrak{T}$, снабженное топологией Гельфанда, гомеоморфно компакту $\mathfrak{M}$. Преобразование Гельфанда элемента $A + \mathfrak{T} \in \mathfrak{B}/\mathfrak{T}$ совпадает с символом $\sigma_{[A]}$ этого элемента.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО опирается на лемму 4.1 и теорему 2.1 и проводится по схеме доказательства теоремы 3 работы [4].

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Пусть $A + \mathfrak{T} \in \mathfrak{B}/\mathfrak{T}$. Для того чтобы элемент $A + \mathfrak{T}$ был обратим в алгебре $\mathfrak{B}/\mathfrak{T}$, необходимо и достаточно, чтобы его символ был невырожденным, т.е.*

$$\forall \mu \in \mathfrak{M} \quad \sigma_{[A]}(\mu) \neq 0. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (4.3) необходимо и достаточно для того, чтобы элемент $A + \mathfrak{T}$ не принадлежал ни одному максимальному идеалу алгебры $\mathfrak{B}/\mathfrak{T}$. Последнее равносильно обратимости элемента $A + \mathfrak{T}$ в алгебре $\mathfrak{B}/\mathfrak{T}$.

Перейдем к изучению алгебры $\mathfrak{B}$. Назовем *символом* оператора $A \in \mathfrak{B}$ функцию, являющуюся символом класса вычетов $A + \mathfrak{T}$. Таким образом, все элементы целого класса вычетов имеют один и тот же символ. Для символа оператора A будем использовать обозначение σ_A .

Основным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть $A \in \mathfrak{B}$. Для того чтобы оператор A был фредгольмовым, необходимо и достаточно, чтобы его символ σ_A удовлетворял условию*

$$\forall \mu \in \mathfrak{M} \quad \sigma_A(\mu) \neq 0. \quad (4.4)$$

Если это условие выполнено, то индекс оператора A вычисляется по формуле

$$\text{ind } A = - \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \Delta \arg(\sigma_A(m, \eta_-, \cdot)(\sigma_A(m, \eta_+, \cdot))^{-1}), \quad (4.5)$$

где $\eta_{\pm} \in \mathfrak{X}_{\pm}(\mathbb{R})$ – произвольные фиксированные точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Если A есть оператор вида (2.2), то выполнение условия (4.4) уже установлено в теореме 2.1. Пусть теперь A – произвольный оператор из алгебры $\mathfrak{B}$. Предположим, что его символ обращается в нуль в некоторой точке $\mu_0 \in \mathfrak{M}$. Так как оператор A фредгольмов, то найдется такое число $\delta > 0$, что все операторы из δ -окрестности оператора A фредгольмовы. Подберем такой оператор A_0 вида (2.2), что $\|A - A_0\| < \delta/2$. Тогда $\|(A + \mathfrak{T}) - (A_0 + \mathfrak{T})\|_{\mathfrak{B}/\mathfrak{T}} < \delta/2$, и в силу неравенства (4.2)

$$|\sigma_A(\mu_0) - \sigma_{A_0}(\mu_0)| < \frac{\delta}{2}.$$

Следовательно, $|\sigma_{A_0}(\mu_0)| < \delta/2$. Рассмотрим оператор $A_0 - \sigma_{A_0}(\mu_0)I$. Он является фредгольмовым, так как

$$\|A - (A_0 - \sigma_{A_0}(\mu_0)I)\| < \delta.$$

Этот оператор можно представить в виде (2.2), поэтому по теореме 2.1 его символ $\sigma_{A_0} - \sigma_{A_0}(\mu_0)$ не должен вырождаться на $\mathfrak{M}$. Но, как легко видеть, символ обращается в нуль в точке μ_0 . Полученное противоречие завершает доказательство необходимости.

Достаточность вытекает из следствия 4.1.

Докажем формулу 4.5. Если A – оператор вида (2.2), то формула (4.5) совпадает с формулой (2.17). Пусть A – произвольный оператор из алгебры $\mathfrak{B}$. Рассмотрим последовательность $\{A_s\}_{s=1}^\infty$ операторов вида (2.2), сходящуюся к A . Тогда $\text{ind } A = \lim_{s \rightarrow \infty} \text{ind } A_s$, причем числовая последовательность $\{\text{ind } A_s\}_{s=1}^\infty$ стабилизируется, начиная с некоторого s_1 . Далее, из оценки (4.2) следует, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|\sigma_{A_s} - \sigma_A\|_{C(\mathfrak{M})} = 0.$$

Поэтому для произвольного $m (\in \mathbb{Z}_+)$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|\sigma_{A_s}(m, \eta_-, \cdot)(\sigma_{A_s}(m, \eta_+, \cdot))^{-1} - \sigma_A(m, \eta_-, \cdot)(\sigma_A(m, \eta_+, \cdot))^{-1}\|_{C(\mathbb{R})} = 0$$

и, следовательно,

$$\Delta \arg(\sigma_A(m, \eta_-, \cdot)(\sigma_A(m, \eta_+, \cdot))^{-1}) = \lim_{s \rightarrow \infty} \Delta \arg(\sigma_{A_s}(m, \eta_-, \cdot)(\sigma_{A_s}(m, \eta_+, \cdot))^{-1}).$$

Нетрудно доказать существование такого числа s_2 , что для каждого $m (\in \mathbb{Z}_+)$ числовая последовательность

$$\{\Delta \arg(\sigma_{A_s}(m, \eta_-, \cdot)(\sigma_{A_s}(m, \eta_+, \cdot))^{-1})\}_{s=1}^\infty$$

стабилизируется, начиная с s_2 . Пусть $s = \max\{s_1, s_2\}$. Используя (2.17), имеем

$$\begin{aligned} \text{ind } A &= \text{ind } A_s = - \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \Delta \arg(\sigma_{A_s}(m, \eta_-, \cdot)(\sigma_{A_s}(m, \eta_+, \cdot))^{-1}) \\ &= - \sum_{m=0}^{\infty} d_n(m) \Delta \arg(\sigma_A(m, \eta_-, \cdot)(\sigma_A(m, \eta_+, \cdot))^{-1}). \end{aligned}$$

Отметим, что так же, как и в (2.17), сумма фактически является конечной.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] N. Karapetiants, S. Samko, *Equations with Involutive Operators*, Birkhäuser, Boston, MA, 2001.
- [2] О. Г. Авсянкин, Н. К. Карапетянц, “Многомерные интегральные операторы с однородными степени $(-n)$ ядрами”, *Докл. РАН*, **368**:6 (1999), 727–729.
- [3] О. Г. Авсянкин, Н. К. Карапетянц, “Об алгебре многомерных интегральных операторов с однородными ядрами с переменными коэффициентами”, *Изв. вузов. Сер. матем.*, 2001, № 1, 3–10.
- [4] О. Г. Авсянкин, “Об алгебре парных интегральных операторов с однородными ядрами”, *Матем. заметки*, **73**:4 (2003), 483–493.
- [5] О. Г. Авсянкин, В. М. Деундяк, “О вычислении индекса многомерных интегральных операторов с биоднородными ядрами”, *Докл. РАН*, **391**:1 (2003), 7–9.

- [6] О. Г. Авсянкин, В. М. Деундяк, “Об индексе многомерных интегральных операторов с биоднородными ядрами и переменными коэффициентами”, *Изв. вузов. Сер. матем.*, 2005, № 3, 3–12.
- [7] H. O. Cordes, “On compactness of commutators of multiplications and convolutions and boundness of pseudodifferential operators”, *J. Funct. Anal.*, **18**:2 (1975), 115–131.
- [8] Б. Я. Штейнберг, “Об операторах типа свертки на локально компактных группах”, *Функц. анализ и его прил.*, **15**:3 (1981), 95–96.
- [9] Л. Хёрмандер, *Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига*, ИЛ, М., 1962.
- [10] В. М. Деундяк, Б. Я. Штейнберг, “Об индексе операторов свертки с медленно изменяющимися коэффициентами на абелевых группах”, *Функц. анализ и его прил.*, **19**:4 (1985), 84–85.
- [11] С. Г. Самко, *Гиперсингулярные интегралы и их приложения*, РГУ, Ростов-на-Дону, 1984.
- [12] О. Г. Авсянкин, Н. К. Карапетянц, “О компактности многомерных интегральных операторов с однородными ядрами с переменными коэффициентами”, *Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки*, 2001, № 4, 45–47.
- [13] М. А. Наймарк, *Нормированные кольца*, Наука, М., 1968.

О. Г. Авсянкин

Ростовский государственный университет

E-mail: avsyanki@ns.math.rsu.ru

Поступило

27.02.2006

Исправленный вариант

22.09.2006

В. М. Деундяк

Ростовский государственный университет

E-mail: vlade@ns.math.rsu.ru