Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. П. Фалалеев, Общие константы Лебега линейных средних подпоследовательностей сумм Фурье, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 3, 435–443

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm38>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:29:30

УДК 517.51

ОБЩИЕ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА ЛИНЕЙНЫХ СРЕДНИХ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СУММ ФУРЬЕ

Л. П. Фалалеев

Получены простые достаточные условия ограниченности норм общих матричных операторов, построенных по подпоследовательностям частных сумм тригонометрических рядов Фурье со степенным порядком роста, гарантирующие определенную скорость приближения на подклассах непрерывных функций.

Библиография: 14 названий.

Пусть $\{n_k\}$ – возрастающая последовательность индексов, $S_{n_k}(f)$ – частные суммы ряда Фурье по тригонометрической системе функции $f \in C_{2\pi}$, $\Lambda = \|\lambda_k^{(n)}\|$, $k = 0, 1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$, $\lambda_k^{(n)} = 0$, $k > n$, – нижняя треугольная матрица вещественных чисел.

Пусть

$$U_N(f, \Lambda, x) = \sum_{k=0}^N \Delta \lambda_k S_{n_k}(f), \quad (1)$$

$$\Delta \lambda_k = \lambda_{n_k} - \lambda_{n_{k+1}}, \quad \Delta \lambda_N = \lambda_N, \quad \lambda_0^{(n)} = 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

– линейный матричный оператор, построенный по подпоследовательностям $S_{n_k}(f)$ (в дальнейшем верхние индексы элементов матрицы Λ будем опускать, полагая $\lambda_k^{(n)} = \lambda_k$). Обозначим

$$\|U_N(f, \Lambda, x)\|_{C[0, 2\pi] \rightarrow C[0, 2\pi]} = \|U_N\|.$$

Вопросы регулярности (ограниченности норм соответствующих операторов) линейных методов суммирования рядов и интегралов Фурье для различных индексов $n_k \neq k$ рассматривались Я. С. Бугровым в [1]–[3] и других работах, в трудах Р. Салема, Д. Ньюмана, С. А. Теляковского, Р. М. Тригуба, Э. С. Белинского и др. (см. обзор литературы в [4]–[10]).

В настоящей заметке мы приведем легко проверяемые достаточные условия ограниченности норм операторов (1), не выходя существенно за рамки степенного роста индексов $\{n_k\}$. Эти условия обеспечивают и определенную скорость сходимости $U_N(f, \Lambda, x)$ к $f(x)$ на некоторых классах непрерывных функций.

Через $C = \text{const}$, $C > 0$, будем обозначать постоянную, не зависящую от индексов n и k .

ТЕОРЕМА 1. *Условие*

$$n_N^{1/\gamma} \sum_{k=0}^N \frac{(\Delta \lambda_k)^2}{\ln^{\beta/\gamma}(k+2)} (1 + (N-k)^{1-1/\gamma} k^{1/\gamma-1}) < C \quad (2)$$

достаточно для ограниченности $\|U_N\|$ в случае, когда

$$n_k = [k^\gamma \ln^\beta k], \quad (3)$$

$\gamma \geq 1$, $\beta \geq 0$, $[y]$ – целая часть y .

ТЕОРЕМА 2. *Условие*

$$n_N^{1/\gamma} \sum_{k=0}^N (\Delta \lambda_k)^2 \ln^{\beta/\gamma}(k+1) (1 + (N-k)^{1-1/\gamma} k^{1/\gamma-1}) < C \quad (4)$$

достаточно для ограниченности $\|U_N\|$ в случае, когда

$$n_k = \left[\frac{k^\gamma}{\ln^\beta k} \right], \quad (5)$$

$\gamma \geq 1$, $\beta \geq 0$, $[y]$ – целая часть y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оба утверждения будем доказывать одновременно.

Применяя стандартные оценки, запишем

$$\begin{aligned} \|U_N\| &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \lambda_k \cos kt \right| dt \\ &\leq C \int_0^\pi \left| \sum_{k=0}^N \Delta \lambda_k \frac{\sin(n_k + 1/2)t}{2 \sin t/2} \right| dt \leq C \int_0^{1/n_N} \left| \sum_{k=0}^N \Delta \lambda_k \frac{\sin(n_k + 1/2)t}{t} \right| dt \\ &\quad + C \int_{1/n_N}^\pi \left| \sum_{k=0}^N \Delta \lambda_k \frac{\sin(n_k + 1/2)t}{t} \right| dt = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Для n_k , определенных равенством (3), имеем

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \int_0^{1/n_N} \sum_{k=0}^N |\Delta \lambda_k| \left(n_k + \frac{1}{2} \right) dt \leq C \sum_{k=0}^N |\Delta \lambda_k| \cdot 1 < C \left\{ N \sum_{k=0}^N |\Delta \lambda_k|^2 \right\}^{1/2} \\ &\leq C \left\{ N \ln^{\beta/\gamma} N \sum_{k=0}^N \frac{(\Delta \lambda_k)^2}{\ln^{\beta/\gamma}(k+2)} (1 + (N-k)^{1-1/\gamma} \cdot k^{1/\gamma-1}) \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для n_k , определенных равенством (5), пользуясь асимптотическим соотношением ($N \rightarrow \infty$)

$$\sum_{k=2}^N \frac{1}{\ln^\alpha k} = C \frac{N}{\ln^\alpha N}, \quad \alpha > 0, \quad (7)$$

получим

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \sum_{k=0}^N |\Delta \lambda_k| \frac{\sqrt{\ln^{\beta/\gamma}(k+2)}}{\ln^{\beta/\gamma}(k+2)} \leq C \left(\sum_{k=0}^N |\Delta \lambda_k|^2 \ln^{\beta/\gamma}(k+2) \right)^{1/2} \left(\frac{N}{\ln^{\beta/\gamma} N} \right)^{1/2} \\ &\leq C \left\{ n_N^{1/\gamma} \sum_{k=0}^N (\Delta \lambda_k)^2 \ln^{\beta/\gamma}(k+2) (1 + (N-k)^{1-1/\gamma} \cdot k^{1/\gamma-1}) \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Оценим I_2 , используя неравенство Коши–Буняковского:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C \left\{ \int_{1/n_N}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^N \Delta \lambda_k \sin \left(n_k + \frac{1}{2} \right) t \right|^2 (\sqrt{t^{1/\gamma-1}})^2 dt \left(\int_{1/n_N}^{\pi} \frac{dt}{(\sqrt{t^{1/\gamma+1}})^2} \right) \right\}^{1/2} \\ &\leq C \left\{ \int_{1/n_N}^{\pi} \frac{dt}{t^{1+1/\gamma}} \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^{\pi} \left| \sum_{k=0}^N \Delta \lambda_k \sin \left(n_k + \frac{1}{2} \right) t \right|^2 t^{1/\gamma-1} dt \right\}^{1/2} \\ &\leq C \left\{ n_N^{1/\gamma} \int_0^{\pi} \left| \sum_{k=0}^N \Delta \lambda_k \sin \left(n_k + \frac{1}{2} \right) t \right|^2 \cdot t^{1/\gamma-1} dt \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Возведя в квадрат, получим

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi} \left| \sum_{k=0}^N \Delta \lambda_k \sin \left(n_k + \frac{1}{2} \right) t \right|^2 t^{1/\gamma-1} dt \leq \int_0^{\pi} \sum_{k=0}^N (\Delta \lambda_k)^2 \sin^2 \left(n_k + \frac{1}{2} \right) t \cdot t^{1/\gamma-1} dt \\ &+ C \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k}}^N \sum_{k=0}^N |\Delta \lambda_{\nu}| |\Delta \lambda_k| \left| \int_0^{\pi} (\cos(n_k - n_{\nu})t - \cos(n_k + n_{\nu})t) t^{1/\gamma-1} dt \right| \\ &+ C \left\{ \sum_{\nu=0}^N (\Delta \lambda_{\nu})^2 + \sum_{k=0}^N \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k}}^N ((\Delta \lambda_{\nu})^2 + (\Delta \lambda_k)^2) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\left| \int_0^{\pi} (\cos(n_{\nu} - n_k)t \cdot t^{1/\gamma-1} dt \right| + \left| \int_0^{\pi} \cos(n_{\nu} + n_k)t \cdot t^{1/\gamma-1} dt \right| \right) \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как (см. [11, 858.813])

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^p} dx = \frac{\pi \cdot m^{p-1}}{2 \sin(p\pi)/2\Gamma(p)}, \quad 0 < p < 1, \quad m > 0,$$

Γ – гамма-функция, то

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi} \cos(n_{\nu} + n_k)t \cdot t^{1/\gamma-1} dt \right| &= \frac{C}{(n_{\nu} + n_k)^{1/\gamma}} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\cos u du}{u^{1-1/\gamma}} - \int_{\pi(n_{\nu} + n_k)}^{\infty} \frac{\cos u du}{u^{1-1/\gamma}} \right\} \\ &\leq \frac{C}{(n_{\nu} + n_k)^{1/\gamma}}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left| \int_0^\pi \cos(n_\nu - n_k)t \cdot t^{1/\gamma-1} dt + \int_0^\pi \cos(n_\nu + n_k)t \cdot t^{1/\gamma-1} dt \right| \leq \frac{C}{|n_k - n_\nu|^{1/\gamma}}. \quad (11)$$

Из (9)–(11) следует, что

$$I_2 \leq C \left\{ n_N^{1/\gamma} \sum_{k=0}^N (\Delta \lambda_k)^2 \left(1 + \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k}}^N \frac{1}{|n_k - n_\nu|^{1/\gamma}} \right) \right\}^{1/2}. \quad (12)$$

Пусть $\{n_k\}$ определена равенством (3). Тогда из равенства

$$|k^\gamma \ln^\beta k - \nu^\gamma \ln^\beta \nu| = |\ln^\beta k (k^\gamma - \nu^\gamma) + \nu^\gamma (\ln^\beta k - \ln^\beta \nu)|$$

и определения $[y]$ легко следует

$$|n_k - n_\nu| \geq C |\ln^\beta k| |k^\gamma - \nu^\gamma| \geq C \ln^\beta k |k - \nu| k^{\gamma-1}. \quad (13)$$

Для $\{n_k\}$, определенных равенством (5), из соотношения

$$\left| \frac{k^\gamma}{\ln^\beta k} - \frac{\nu^\gamma}{\ln^\beta \nu} \right| = \left| \frac{1}{\ln^\beta k} (k^\gamma - \nu^\gamma) + \nu^\gamma \left(\frac{1}{\ln^\beta k} - \frac{1}{\ln^\beta \nu} \right) \right|$$

и определения $[y]$ установим

$$|n_k - n_\nu| \geq \frac{C}{\ln^\beta k} \cdot k^{\gamma-1} |k - \nu|. \quad (14)$$

Используя (13), легко подсчитаем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k}}^N \frac{1}{|n_k - n_\nu|^{1/\gamma}} &\leq \frac{C}{\ln^{\beta/\gamma} k \cdot k^{1-1/\gamma}} \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k}}^N \frac{1}{|k - \nu|^{1/\gamma}} \\ &\leq \frac{C}{\ln^{\beta/\gamma} k} (N - k)^{1-1/\gamma} \cdot k^{1/\gamma-1}, \end{aligned} \quad (15)$$

а из (14) найдем, что

$$\sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq k}}^N \frac{1}{|n_k - n_\nu|^{1/\gamma}} = \sum_{\nu=0}^{k-1} + \sum_{\nu=k+1}^N \leq C \ln^{\beta/\gamma} k \cdot (N - k)^{1-1/\gamma} \cdot k^{1/\gamma-1}. \quad (16)$$

Подставляя (15) в (12), найдем оценку для I_2 ; объединяя ее с оценкой (6) для I_1 , получим (2). Аналогично, из неравенств (16), (12), (9), (8) следует оценка (4). Таким образом, теоремы 1, 2 доказаны полностью.

Из них следует, что $\lambda_k^{(n)} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, при фиксированном $k \leq n$. Действительно, из (2), (4) вытекает, что $\Delta \lambda_k^{(n)} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, а так как $\lambda_0^{(n)} = 1$, $n = 1, 2, \dots$, то

$\Delta\lambda_1^{(n)} = 1 - \lambda_1^{(n)} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, и $\lambda_1^{(n)} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$. Аналогичны рассуждения для произвольного индекса k : $\Delta\lambda_k^{(n)}$ либо тождественно равно 0, либо $\Delta\lambda_k^{(n)} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, и потому $\lambda_k^{(n)} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$. По теореме Банаха–Штейнгауза ограниченность $\|U_N\|$ и условие $\lambda_k^{(n)} \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, обеспечивают равномерную сходимость операторов (1).

Приведем некоторые примеры.

Покажем, что $(C, 1)$ -средние сумм S_{n_k} , составленные по индексам (3), удовлетворяют условию (2). В этом случае

$$\Delta\lambda_i = \begin{cases} \frac{1}{N+1}, & i = [k^\gamma \ln^\beta k], \\ 0, & i \neq [k^\gamma \ln^\beta k], \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

Так как

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^\alpha \ln^\delta(k+1)} = CN^{-\alpha+1} \ln^{-\delta} N, \quad N \rightarrow \infty, \quad \text{при } \delta > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (17)$$

из (7), (17) следует

$$\begin{aligned} \|U_N\| &\leq C \left\{ n_N^{1/\gamma} \cdot N^{-2} \sum_{k=0}^N \frac{1}{\ln^{\beta/\gamma}(k+2)} (N-k)^{1-1/\gamma} \cdot k^{1/\gamma-1} \right\}^{1/2} \\ &\leq C \left\{ n_N^{1/\gamma} \cdot N^{-1} \sum_{k=0}^N \frac{1}{\ln^{\beta/\gamma}(k+2)} \cdot \frac{1}{k^{1-1/\gamma}} \frac{(N-k)^{1-1/\gamma}}{N^{1-1/\gamma}} \frac{1}{N^{1/\gamma}} \right\}^{1/2} \leq C. \end{aligned}$$

Выбирая $\{n_k\}$ из равенства (5), $k = 2, 3, \dots$, учитывая (17), подсчитаем

$$\begin{aligned} n_N^{1/\gamma} \sum_{k=0}^N \frac{1}{N^2} \ln^{\beta/\gamma}(k+1) (N-k)^{1-1/\gamma} \cdot k^{1/\gamma-1} \\ \leq C \frac{1}{\ln^{\beta/\gamma} N} \cdot \frac{1}{N^{1/\gamma}} \cdot N^{-(1-1/\gamma)+1} \cdot \ln^{\beta/\gamma} N \leq C. \end{aligned}$$

Таким образом, средние арифметические сумм S_{n_k} , составленные по индексам (3), (5), сходятся к $f(x) \in C_{2\pi}$ равномерно. Пусть для определенности n_k имеет вид (3). Применим оценку (2) для нахождения условий ограниченности $\|U_N\|$ (C, α) -средних Чезаро. В этом случае ($n_N = [N^\gamma \ln^\beta N]$)

$$\Delta\lambda_i = \begin{cases} \frac{A_{N-k}^{\alpha-1}}{A_N^\alpha}, & i = [k^\gamma \ln^\beta k], \\ 0, & i \neq [k^\gamma \ln^\beta k], \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{cases}$$

и левая часть оценки (2) примет вид

$$\frac{N \ln^{\beta/\gamma} N}{N^{1+1/\gamma}} \sum_{k=0}^N \frac{A_{N-k}^{2\alpha-2}}{A_N^{2\alpha-2}} \left(\frac{N-k}{N} \right)^{1-1/\gamma} \frac{1}{k^{1-1/\gamma} \ln^{\beta/\gamma}(k+2)}. \quad (18)$$

Воспользовавшись асимптотическим равенством (17) и следующими известными свойствами чисел Чезаро:

$$A_N^\alpha = O(N^\alpha), \quad N \rightarrow \infty, \quad A_N^{\alpha+\beta+1} = \sum_{k=0}^N A_{N-k}^\alpha A_k^\beta, \quad \alpha, \beta, \alpha + \beta > -1,$$

$A_N^\alpha > 0$ при $\alpha > -1$, установим, что выражение (18) не будет превосходить постоянной при $\alpha > 1/2$.

Аналогично можно показать, что средние Рисса и Зигмунда, определяемые сумматорными функциями

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= (1-x)^\alpha, \quad x \in [0, 1], \quad \varphi_1(0) = 1, \quad \varphi_1(1) = 0, \\ \varphi_2(x) &= 1-x^\alpha, \quad x \in [0, 1], \quad \varphi_2(0) = 1, \quad \varphi_2(1) = 0, \end{aligned}$$

будут иметь ограниченную норму для n_k , взятых из равенств (3) и (5) при $\alpha > 1/2$.

Для средних Валле Пуссена

$$V_{N,P} = \frac{1}{p+1} (S_{n_N} + S_{n_{N-1}} + \dots + S_{n_{N-p}}),$$

где n_k определены равенствами (3), (5), $p = 0, 1, \dots, N-1$, легко подсчитать, что $\|U_N\|$ будут ограничены, если $p/N \rightarrow C$, $N \rightarrow \infty$.

Условия (2), (4) теорем 1, 2 при $\gamma = 1$, $\beta = 0$ обращаются в условие Стечкина–Фомина для $n_k = k$:

$$N \sum_{k=0}^N (\Delta \lambda_k)^2 < C.$$

Это легко проверяемое неравенство гарантирует ограниченность норм операторов (1) для многих линейных средних рядов Фурье и обеспечивает условие $\lambda_k^{(n)} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ и тем самым – равномерную сходимость операторов $U_N(\cdot)$ к $f(x) \in C_{2\pi}$. Однако даже в общем виде ($p > 1$)

$$N^{p-1} \sum_{k=0}^N (\Delta \lambda_k)^p < C \quad (19)$$

это условие не обеспечивает ограниченности норм $\|U_N\|$, например, для средних Валле Пуссена ($\beta = 0$, $n_k = [k^\gamma]$, $\gamma > 1$), $(C, 1)$ -средних и др. (по этому поводу см. [4], [5], [12]–[14]). В [6] отмечается, что условие (19) обеспечивает равномерную сходимость $(C, 1)$ -средних для $n_k = O(k^2)$ при дополнительных условиях типа выпуклости, накладываемых на множители $\lambda_k^{(n)}$.

Скорость приближения функций, принадлежащих классам $\text{Lip } \alpha$, $\text{Lip}(\alpha, p)$, $p > 1$, $(C, 1)$ -средними в случае $n_k = k^2$ рассматривалась в работах [3], [6], [7]. Широкий класс методов, для которых условие ограниченности норм операторов (1) обеспечивает и скорость приближения ($n_k = [k^\gamma]$, $\gamma > 1$, $n_k = [2^{k^\varepsilon}]$, $\varepsilon > 0$) на различных классах функций и в нормах различных функциональных пространств описан в [4], [12], [13].

Пусть Λ_1 – класс матриц, для которых выполнена теорема 1. Рассмотрим характеристику

$$L_n(\alpha) = \sup_{\Lambda \subset \Lambda_1} \sup_{f \in \text{Lip } \alpha} \|U_N(f, \Lambda, x) - f(x)\|_{C_{2\pi}}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

ТЕОРЕМА 3. При $\gamma \geq 1$, $\beta \geq 0$ справедливы асимптотические равенства ($N \rightarrow \infty$)

$$L_n(\alpha) = \begin{cases} O(n_N^{-\alpha}), & 0 < \alpha < 1/(2\gamma), \\ O\left(\sqrt{\frac{\ln n_N}{n_N^{1/\gamma}}}\right), & \alpha = 1/(2\gamma), \\ O(n_N^{-1/(2\gamma)}), & 1/(2\gamma) < \alpha \leq 1, \quad n_N = [N^\gamma \ln^\beta N], \end{cases}$$

причем первая и третья оценки точны по порядку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По схеме доказательства теоремы 1 имеем

$$\begin{aligned} |U_N(f, \Lambda, x) - f(x)| &\leq C \int_0^\pi |f(x+t) - f(x)| \left| \sum_{\nu=0}^N \Delta \lambda_\nu \frac{\sin(n_\nu + 1/2)t}{2 \sin t/2} \right| dt \\ &\leq C \int_0^{\pi/2} t^\alpha \left| \sum_{\nu=0}^N \Delta \lambda_\nu \frac{\sin(n_\nu + 1/2)t}{t} \right| dt = C \int_0^{\pi/2} \left| \sum_{\nu=0}^N \Delta \lambda_\nu \frac{\sin(n_\nu + 1/2)t}{t^{1-\alpha}} \right| dt \\ &= C \int_0^{1/n_N} t^\alpha \left| \sum_{\nu=0}^N \Delta \lambda_\nu \frac{\sin(n_\nu + 1/2)t}{t} \right| dt + C \int_{1/n_N}^{\pi/2} \left| \sum_{\nu=0}^N \Delta \lambda_\nu \frac{\sin(n_\nu + 1/2)t}{t^{1-\alpha}} \right| dt \\ &= I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Оценим I_3 по аналогии с оценкой I_1 :

$$\begin{aligned} I_3 &\leq C \sum_{\nu=0}^N |\Delta \lambda_\nu| \left(n_\nu + \frac{1}{2}\right) \int_0^{1/n_N} t^\alpha dt \leq \frac{C}{n_N^{\alpha+1}} \sum_{\nu=0}^N |\Delta \lambda_\nu| \left(n_\nu + \frac{1}{2}\right) \\ &\leq \frac{C}{n_N^\alpha} \sum_{\nu=0}^N |\Delta \lambda_\nu| \leq \frac{C}{n_N^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Далее заметим, что

$$A_N(\alpha, \beta, \gamma) = A_N := \int_{1/n_N}^\pi \frac{dt}{t^{1-2\alpha+1/\gamma}} = \begin{cases} O(n_N^{1/\gamma-2\alpha}), & 0 < \alpha < 1/(2\gamma), \\ O(\ln n_N), & \alpha = 1/(2\gamma), \\ O(1), & 1/(2\gamma) < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Оценим I_4 по аналогии с оценкой I_2 :

$$\begin{aligned} I_4 &= C \int_{1/n_N}^{\pi/2} \left| \sum_{\nu=0}^N \Delta \lambda_\nu \frac{\sin(n_\nu + 1/2)t}{t^{1-\alpha}} \right| dt \\ &\leq C \left\{ \int_{1/n_N}^\pi \left| \sum_{\nu=0}^N \Delta \lambda_\nu \sin\left(n_\nu + \frac{1}{2}\right)t \right|^2 (\sqrt{t^{1/\gamma}} - 1)^2 dt \int_{1/n_N}^\pi \frac{dt}{t^{1-2\alpha+1/\gamma}} \right\}^{1/2} \\ &\leq C \frac{\sqrt{A_N}}{\sqrt{n_N^{1/\gamma}}} \left\{ n_N^{1/\gamma} \int_0^\pi \left| \sum_{\nu=0}^N \Delta \lambda_\nu \sin\left(n_N + \frac{1}{2}\right)t \right|^2 \cdot t^{1/\gamma-1} dt \right\}^{1/2} \leq C \sqrt{\frac{A_N}{n_N^{1/\gamma}}}. \end{aligned}$$

Так как оценка (20) для I_3 дает приближение порядка наилучшего для всех $0 < \alpha \leq 1$, из оценки I_4 следует оценка для $L_N(\alpha)$. Далее, так как точность первой оценки для $L_N(\alpha)$ следует из теоремы Джексона, осталось установить точность третьей оценки.

Рассмотрим матрицу

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= 1, \quad \lambda_1 = \frac{n_N^{1/\gamma} - 1}{\sqrt{n_N^{1/\gamma}}(\sqrt{n_N^{1/\gamma}} + 1)}, \\ \lambda_2 &= \lambda_3 = \dots = \lambda_{[2^\gamma \ln^\beta 2]} = \frac{n_N^{1/\gamma} - 2}{\sqrt{n_N^{1/\gamma}}(\sqrt{n_N^{1/\gamma}} + 1)}, \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_{[(N-1)^\gamma \ln^\beta (N-1)]+1} &= \lambda_{[(N-1)^\gamma \ln^\beta (N-1)]+2} = \dots = \lambda_{[N^\gamma \ln^\beta N]} = \frac{1}{\sqrt{n_N^{1/\gamma}}(\sqrt{n_N^{1/\gamma}} + 1)}.\end{aligned}$$

Для нее

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_0 &= 1 - \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{n_N^{1/\gamma}}}, \\ \Delta\lambda_i &= \frac{1}{\sqrt{n_N^{1/\gamma}}(\sqrt{n_N^{1/\gamma}} + 1)} \quad \text{при } i = [k^\gamma \ln^\beta k], \quad k = 1, 2, \dots, N, \\ \Delta\lambda_i &= 0 \quad \text{при } i \neq [k^\gamma \ln^\beta k].\end{aligned}$$

Число отличных от 0 разностей равно N . Проверим выполнение условия (2):

$$\begin{aligned}& n_N^{1/\gamma} \sum_{k=0}^N \frac{(\Delta\lambda_k)^2}{\ln^{\beta/\gamma}(k+2)} (1 + (N-k)^{1-1/\gamma} \cdot k^{1/\gamma-1}) \\ & \leq C n_N^{1/\gamma} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{n_N^{1/\gamma}}} \right)^2 \frac{1}{\ln 2} + \sum_{k=1}^N \frac{1 + (N-k)^{1-1/\gamma} \cdot k^{1/\gamma-1}}{n_N^{1/\gamma}(\sqrt{n_N^{1/\gamma}} + 1)^2 \ln^{\beta/\gamma}(k+2)} \right\} \\ & \leq C + \frac{C}{n_N^{1/\gamma}} \sum_{k \mp 1} \frac{1}{\ln^{\beta/\gamma}(k+2)} \frac{1}{k^{1-1/\gamma}} \left(\frac{N-k}{N} \right)^{1-1/\gamma} \frac{1}{N^{1/\gamma-1}} \\ & \leq C + \frac{1}{n_N^{1/\gamma}} \cdot \frac{1}{N^{1/\gamma-1}} N^{-(1-1/\gamma)+1} \frac{1}{\ln^{\beta/\gamma} N} \leq C.\end{aligned}$$

Таким образом, построенная матрица принадлежит классу матриц Λ_1 . Для функции $f(t) = \cos t$ легко проверить, что

$$U_N(\cos, \Lambda_1, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^N \lambda_\nu \cos \nu t \right\} dt = \lambda_1 \cos x,$$

поэтому

$$|U_N(\cos t, \Lambda_1, x) - f(x)| = |1 - \lambda_1| |\cos x| = \frac{C}{\sqrt{n_N^{1/\gamma}}}$$

и точность третьей оценки для $L_N(\alpha)$ доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 3 очевидным образом переносится на класс матриц Λ_2 , для которых справедлива теорема 2. Это следует из того, что в силу неравенства (8) оценка (20) сохраняется, а матрица, подтверждающая точность третьей оценки для $L_N(\alpha)$ также принадлежит классу Λ_2 .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как установил В. А. Баскаков ([14], [5]) при $n_k = k$ для матриц, удовлетворяющих условию Стечкина–Фомина ($\beta = 0, \gamma = 1$), все три оценки для $L_N(\alpha)$ точны в порядковом отношении.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 3 (с учетом замечания 1) не только обеспечивает скорость приближения липшицевых функций для новой последовательности индексов $\{n_k\}$. Она достаточно информативна и в частных случаях. Так, из нее следует, что для $(C, 1)$ -средних при $\gamma = 2$ величина $L_N(\alpha)$ имеет наилучший порядок приближения для $\alpha \in (0, 1/4)$. В [3] этот промежуток для α равен $(0, 1/4]$, в [6] – для $\alpha \in (0, 1/6]$. Сравнения других результатов при $\beta = 0$ приведены в [4], [12], [13].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бугров Я. С. Условия равномерной ограниченности тригонометрических полиномов в метрике L // Тр. МИАН. 1975. Т. 134. С. 31–37.
- [2] Bugrov Ya. S. On linear summation methods of Fourier series // Analysis Math. 1979. V. 5, F. 2. P. 119–133.
- [3] Бугров Я. С. Линейные средние рядов и интегралов Фурье и скорость их сходимости // Тр. МИАН. 1984. Т. 170. С. 77–85.
- [4] Фалалеев Л. П. Аппроксимативные свойства линейных средних рядов Фурье. Автореферат дисс. ... д.ф.-м.н. Алматы, 1993.
- [5] Баскаков В. А. Линейные операторы в теории приближения функций. Автореферат дисс. ... д.ф.-м.н. Тбилиси, 1987.
- [6] Баскаков А. В. Приближение функций линейными методами. Автореферат дисс. ... к.ф.-м.н. М., 1987.
- [7] Сюсюкалов А. И. О приближении функций класса $C(\varepsilon)$ средними подпоследовательностей сумм Фурье // Изв. вузов. Матем. 1998. № 5. С. 78–79.
- [8] Белинский Э. С. О суммируемости рядов Фурье методом средних арифметических с пропусками // Труды Междунар. Конф. по теории приближения функций. Киев, 30 мая – 6 июня 1983 г. М.: Наука, 1987. С. 48–49.
- [9] Belinskii E. S. On the summability of Fourier series with the method of lacunary arithmetic means // Analysis Math. 1984. V. 10. P. 275–282.
- [10] Тригуб Р. М. Суммируемость рядов Фурье и некоторые вопросы теории приближений. Автореферат дисс. ... д.ф.-м.н. Киев, 1987.
- [11] Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1966.
- [12] Blied N. K., Falaleev L. P. Rate of convergence of linear mean subsequences of Fourier sums // Topics in Polynomials of One and Several Variables and Their Applications. Singapore: World Scientific, 1993. P. 65–79.
- [13] Фалалеев Л. П. Аппроксимативные свойства подпоследовательностей сумм Фурье // Вестн. НАН РК. 1995. № 3. С. 51–57.
- [14] Баскаков В. А. О порядке приближения непрерывных функций некоторыми линейными методами суммирования рядов Фурье // Изв. вузов. Матем. 1969. № 7. С. 20–27.