Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Жгун, Д. В. Миронов, Разделяющие системы камер Вейля, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 2, 310–314

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3800>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:06:31

Разделяющие системы камер Вейля

В. Жгун, Д. Миронов

В связи с исследованием некоторых специальных действий в [1] были введены понятия *индекса разделения* (*separation index*) $\text{sep}(\Delta)$ неприводимой системы корней Δ и, более общо, *индекса разделения* $\text{sep}(K)$ неприводимой конечной линейной группы K , порожденной отражениями конечномерного вещественного пространства L . В [1] было доказано, что $\text{rk}(\Delta) + 1 \leq \text{sep}(\Delta) \leq |W_\Delta|$, где W_Δ – группа Вейля системы корней Δ и, соответственно, $\dim(L) + 1 \leq \text{sep}(K) \leq |K|$, а также вычислены $\text{sep}(\Delta)$ и $\text{sep}(K)$ в размерностях, не превосходящих 2. В настоящей работе получены более точные верхние оценки числа $\text{sep}(\Delta)$.

Напомним основное определение. Далее мы считаем Δ подмножеством рационального векторного пространства V , являющегося линейной оболочкой V .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Подмножество S множества камер Вейля системы корней Δ называется *разделяющей системой камер Вейля*, если выполняется следующее условие: для всякой ненулевой линейной функции $l \in V^*$ существует камера Вейля C из S такая, что

$$l|_{\overline{C}} \geq 0, \quad \overline{C} \cap \text{Ker } l = \{0\}$$

(через $\overline{C}$ обозначено замыкание C).

В [1] доказано, что разделяющие системы камер Вейля существуют (в этом утверждении существенно, что система Δ неприводима).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [1]. *Индексом разделения* $\text{sep}(\Delta)$ системы корней Δ называется минимум чисел элементов в разделяющих системах камер Вейля системы корней Δ .

Введем необходимые обозначения:

- 1) C – фиксированная доминантная камера Вейля;
- 2) Δ^+ – система положительных корней в Δ , определенная C ;
- 3) $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – множество простых корней в Δ^+ ;
- 4) π_i – фундаментальный вес, двойственный α_i ;
- 5) мы считаем, что в V зафиксирована структура евклидова пространства, определенная W -инвариантным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$;
- 6) H_α – гиперплоскость в V , ортогональная $\alpha \in \Delta$;
- 7) s_α – отражение с зеркалом H_α , переводящее α в $-\alpha$.

С этого момента для упрощения изложения мы называем *камерой Вейля* замыкание (по определению, открытой) камеры Вейля, из которого удалена точка $\{0\}$.

Сначала дадим описание индуктивного процесса построения разделяющих систем камер Вейля. Индукция ведется по рангу системы корней Δ . База индукции очевидна: в случае A_1 имеется только две камеры Вейля и набор будет состоять из них обеих.

Выберем некоторый простой корень α . Пусть $\Delta_\alpha = \Delta \cap H_\alpha$. Выберем множество Δ_α^+ положительных корней подсистемы Δ_α так, что $\Delta_\alpha^+ \subset \Delta^+$. Группу Вейля системы корней Δ_α мы обозначим W_α и будем рассматривать ее как подгруппу группы Вейля W , порожденную отражениями s_β , где $\beta \in \Delta_\alpha$ (заметим, что эта группа стабилизирует α).

Теперь рассмотрим следующие два случая.

Работа выполнена при поддержке гранта 05-01-02805-CNRS а.

(i) Система корней Δ_α неприводима, и ее ранг на 1 меньше, чем у Δ . Обозначим через C_α доминантную камеру Вейля системы Δ_α . Заметим, что $C_\alpha \supseteq C \cap H_\alpha$. Рассмотрим разделяющую систему камер Вейля для системы Δ_α . Камеры из этой системы получаются из C_α применением некоторых элементов из W_α . Обозначим множество всех этих элементов через W_α^{sep} .

(ii) Условие (i) не выполнено. Положим

$$W_\alpha^{\text{sep}} = \{w \in W \mid \dim wC \cap H_\alpha = \dim H_\alpha, wC \text{ и } C \text{ лежат по одну сторону от } H_\alpha\}.$$

Легко видеть, что в случае (ii)

$$H_\alpha = \bigcup_{w \in W_\alpha^{\text{sep}}} (wC \cap H_\alpha). \quad (1)$$

(Это следует из того, что ни одна из камер Вейля не может пересекаться по своей внутренности с H_α , W действует на камерах транзитивно и, если две камеры имеют общую грань коразмерности 1 на гиперплоскости H_α , то они переводятся друг в друга отражением s_α).

В этом случае нам понадобится

ЛЕММА 3. *Рассмотрим случай (ii). Пусть l – ненулевая линейная функция на H_α . Тогда найдется элемент $w \in W_\alpha^{\text{sep}}$ такой, что l строго положительна на $wC \cap H_\alpha$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует такой вектор $\chi \in H_\alpha$, что $l = \langle \chi, \cdot \rangle$. Ввиду (1) существует такой элемент $w \in W_\alpha^{\text{sep}}$, что $\chi \in wC \cap H_\alpha$. Тогда согласно следующей лемме $l(\lambda) = \langle \chi, \lambda \rangle > 0$ для любого $\lambda \in wC \cap H_\alpha$.

ЛЕММА 4. *Если χ_1, χ_2 – (ненулевые) векторы из V , лежащие в одной камере Вейля, то $\langle \chi_1, \chi_2 \rangle > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду W -инвариантности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ можно считать, что $\chi_1, \chi_2 \in C$, так что $\chi_j = \sum_{\beta \in \Pi} c_{j\beta} \pi_\beta$, где $c_{j\beta} \geq 0$. Так как Δ неприводима, то (см., например, [2; таблица 2, с. 308–309]) $\langle \pi_\beta, \pi_\gamma \rangle > 0$ для всех $\beta, \gamma \in \Pi$. Это дает

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \sum_{\beta, \gamma \in \Pi} c_{1\beta} c_{2\gamma} \langle \pi_\beta, \pi_\gamma \rangle > 0.$$

Докажем теперь основное утверждение работы.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть C_0 – камера Вейля, содержащая корень α . Тогда $C_0, -C_0, wC, s_\alpha wC$, где w пробегает множество W_α^{sep} , – разделяющая система камер Вейля для системы корней Δ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ненулевую линейную функцию $l_\chi(\cdot) = \langle \chi, \cdot \rangle$, где $\chi \in V$. Имеем $\chi = c\alpha + \tilde{\chi}$, где $c \in \mathbb{Q}$, $\tilde{\chi} \in H_\alpha$. Тогда $l_{\tilde{\chi}}(\cdot) = \langle \tilde{\chi}, \cdot \rangle$ – линейная функция, на плоскости H_α . Рассмотрим сначала случай $\tilde{\chi} \neq 0$.

Рассмотрим ситуацию (i). Из того, что мы выбрали разделяющий набор камер для системы Δ_α следует, что найдется элемент $w \in W_\alpha^{\text{sep}}$ такой, что функция $l_{\tilde{\chi}}(\cdot)$ строго положительна на камере wC_α .

Пусть $c \geq 0$. Докажем, что тогда $l_\chi(\cdot)$ положительна на wC . Действительно, $w\bar{C} = w\bar{C}_\alpha + \mathbb{Q}_+ w\pi_\alpha$, где $\mathbb{Q}_+ = \{a \in \mathbb{Q} \mid a \geq 0\}$. Для любого $v \in w\bar{C}$ имеем разложение $v = v_\alpha + aw\pi_\alpha$, где $v_\alpha \in wC \cap H_\alpha \subseteq w\bar{C}_\alpha$, а $a \geq 0$. Заметим, что w стабилизирует α , откуда

$$\langle \alpha, w\pi_\alpha \rangle = \langle w^{-1}\alpha, \pi_\alpha \rangle = \langle \alpha, \pi_\alpha \rangle > 0.$$

Тогда имеем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} l_\chi(v) &= \langle c\alpha + \tilde{\chi}, v_\alpha + aw\pi_\alpha \rangle = \langle \tilde{\chi}, v_\alpha \rangle + ac\langle \alpha, w\pi_\alpha \rangle + a\langle \tilde{\chi}, w\pi_\alpha \rangle \\ &= \langle \tilde{\chi}, v_\alpha \rangle + a\langle \tilde{\chi}, w\pi_\alpha \rangle + ac \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{2} > 0, \end{aligned}$$

так как $\langle \alpha, v_\alpha \rangle = 0$, $\langle \tilde{\chi}, v_\alpha \rangle > 0$, а также $\langle \tilde{\chi}, w\pi_\alpha \rangle \geq 0$.

Докажем последнее неравенство. В случае (i) мы выбрали w таким образом, что функция $\langle \tilde{\chi}, \cdot \rangle$ строго положительна на камере wC_α . Отсюда следует, что $\tilde{\chi}$ принадлежит конусу $\sum_{\beta \in w\Delta_\alpha^+} \mathbb{Q}_{+\beta}$, натянутому на положительные корни из $w\Delta_\alpha^+$. В частности, $\tilde{\chi} \in \sum_{\beta \in w\Delta^+} \mathbb{Q}_{+\beta}$, а значит, функция $\langle \tilde{\chi}, \cdot \rangle$ положительна на камере Вейля wC . Учитывая, что $w\pi_\alpha$ – ребро камеры Вейля wC , получаем требуемое.

Пусть $c < 0$. Докажем, что тогда $l_\chi(\cdot)$ положительна на камере $s_\alpha wC$. Аналогично предыдущему случаю имеем разложение $v = v_\alpha + as_\alpha w\pi_\alpha$, где $v \in wC$, $v_\alpha \in s_\alpha wC_\alpha$, $a \geq 0$. Также имеет место цепочка равенств

$$\langle \alpha, s_\alpha w\pi_\alpha \rangle = \langle w^{-1}s_\alpha \alpha, \pi_\alpha \rangle = -\langle \alpha, \pi_\alpha \rangle < 0.$$

В этом случае аналогично предыдущему случаю имеем

$$\begin{aligned} l_\chi(v) &= \langle c\alpha + \tilde{\chi}, v_\alpha + as_\alpha w\pi_\alpha \rangle = \langle \tilde{\chi}, v_\alpha \rangle + ac\langle \alpha, s_\alpha w\pi_\alpha \rangle + a\langle \tilde{\chi}, s_\alpha w\pi_\alpha \rangle \\ &= \langle \tilde{\chi}, v_\alpha \rangle + a\langle \tilde{\chi}, s_\alpha w\pi_\alpha \rangle - ac\frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{2} > 0, \end{aligned}$$

так как $\langle \tilde{\chi}, v_\alpha \rangle > 0$ и $\langle \tilde{\chi}, s_\alpha w\pi_\alpha \rangle \geq 0$ (последнее неравенство совершенно аналогично неравенству из предыдущего случая).

В случае (ii) ввиду (1) элемент $\tilde{\chi}$ лежит в некоторой камере Вейля wC системы Δ . Без ограничения общности можно считать, что $\tilde{\chi} \in C_\alpha = C \cap H_\alpha$. Как и в случае (i), имеем разложение $v = v_\alpha + a\pi_\alpha$, где $v \in C$, $v_\alpha \in C_\alpha$, а $a \geq 0$. По лемме 3 выполнено неравенство $\langle \tilde{\chi}, v_\alpha \rangle > 0$.

Отсюда мы получаем при $c \geq 0$:

$$\begin{aligned} l_\chi(v) &= \langle c\alpha + \tilde{\chi}, v_\alpha + a\pi_\alpha \rangle = \langle \tilde{\chi}, v_\alpha \rangle + ac\langle \alpha, \pi_\alpha \rangle + a\langle \tilde{\chi}, \pi_\alpha \rangle \\ &= \langle \tilde{\chi}, v_\alpha \rangle + a\langle \tilde{\chi}, \pi_\alpha \rangle + ac\frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{2} > 0. \end{aligned}$$

Нами было использовано неравенство $\langle \tilde{\chi}, \pi_\alpha \rangle \geq 0$, которое следует из леммы 4, примененной к π_α и весу $\tilde{\chi} \in C$.

При $c < 0$ рассмотрим камеру $s_\alpha C$. Имеем разложение $v = v_\alpha + as_\alpha \pi_\alpha$, где $v \in C$, $v_\alpha \in C_\alpha$, а $a \geq 0$. И нужное утверждение следует из неравенства

$$l_\chi(v) = \langle \tilde{\chi}, v_\alpha \rangle + ac\langle \alpha, s_\alpha \pi_\alpha \rangle + a\langle \tilde{\chi}, s_\alpha \pi_\alpha \rangle = \langle \tilde{\chi}, v_\alpha \rangle - ac\frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{2} + a\langle \tilde{\chi}, s_\alpha \pi_\alpha \rangle > 0.$$

Осталось разобрать случай, когда $\tilde{\chi} = 0$. Докажем, что функция $l_\chi(\cdot)$ строго положительна на камере C_0 , либо на камере $-C_0$. Действительно, в этом случае $l_\chi(\cdot) = c\langle \alpha, \cdot \rangle$. Замечая, что $\alpha \in C_0$, мы снова можем воспользоваться леммой 4.

Таким образом, мы получили следующую оценку для индекса разделения.

СЛЕДСТВИЕ 6. *Выполнена оценка $\text{sep}(\Delta) \leq 2|W_\alpha^{\text{sep}}| + 2$.*

С помощью этого следствия мы получаем ниже оценки на $\text{sep}(\Delta)$ для каждого из типов систем простых корней

$$A_l, \quad B_l, \quad C_l, \quad D_l, \quad F_4, \quad E_6, \quad E_7, \quad E_8$$

(для $\Delta = G_2$ и группы диэдра индекс разделения вычислен в [1]). Нам понадобится

ЛЕММА 7. *Пусть Δ – простая система корней одного из типов*

$$A_n, \quad D_n, \quad E_6, \quad E_7, \quad E_8.$$

Тогда число камер Вейля, пересекающих H_α по грани коразмерности 1, равно $\text{rk}(\Delta) \cdot |W_\alpha|$.

Доказательство. Пусть C_β – грань коразмерности 1 камеры C , перпендикулярная простому корню $\beta \in \Pi$ соответственно. Как известно, группа Вейля действует транзитивно на системах корней указанных типов (доказательство сразу сводится к случаю A_2 , в котором оно очевидно). Поэтому найдется такой элемент $w \in W$, что $wC_\beta \in H_\alpha$. Будем называть wC_β гранью типа β .

Заметим, что если $w_1, w_2 \in W$ – такие элементы, что $w_i C_\beta \subset H_\alpha$, $i = 1, 2$, то $w_1 w_2^{-1} \in W_\alpha$. (Действительно, $w_1 w_2^{-1}$ переводит грань $w_2 C_\beta$ в грань $w_1 C_\beta$, а так как они обе телесны в гиперплоскости H_α , то этот элемент переводит в себя и H_α .)

Из вышесказанного получаем, что камеры Вейля могут пересекать плоскость по грани коразмерности 1 любого типа $\beta \in \Pi$ и любые две камеры, пересекающие H_α по граням одного типа, могут быть переведены друг в друга элементом W_α . Тем самым, их количество равно $\text{rk}(\Delta)|W_\alpha|$.

(1) Пусть Δ – система корней типа A_l . Тогда $|W| = (l+1)!$. Выберем $\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Имеет место случай (ii), так как $\Delta_\alpha = A_{l-2}$. $W_\alpha \cong S_{l-1}$ и, значит,

$$\text{sep}(A_l) \leq 2 \text{rk}(\Delta)|W_\alpha| + 2 = 2l! + 2.$$

(2) Пусть Δ – система корней типа B_l . Выберем $\alpha = \varepsilon_l$. В этом случае $\Delta_\alpha = B_{l-1}$ (это те корни, в запись которых не входит ε_l). Таким образом, имеет место случай (i) и выполнена индуктивная оценка

$$|W_{B_l}^{\text{sep}}| = 2|W_{B_{l-1}}^{\text{sep}}| + 2.$$

Откуда по индукции легко получить оценку

$$\text{sep}(B_l) \leq 2^{l+1} - 2.$$

(3) Пусть Δ – система корней типа C_l . Она двойственна системе корней B_l , так что $W(C_l) = W(B_l)$. Поэтому

$$\text{sep}(C_l) = \text{sep}(B_l) \leq 2^{l+1} - 2.$$

(4) Пусть Δ – система корней типа D_l . В этом случае возьмем $\alpha = \varepsilon_{l-1} - \varepsilon_l$. Тогда $\Delta_\alpha = D_{l-2} \times A_1$, где система A_1 порождена корнем $\varepsilon_{l-1} + \varepsilon_l$. Мы находимся в ситуации пункта (ii) (система Δ_α приводима), поэтому

$$\text{sep}(D_l) \leq 2|\Pi| \cdot |W_{D_{l-2}}| \cdot |W_{A_1}| + 2 = \frac{2^{l-1}l!}{(l-1)} + 2.$$

(5) Пусть Δ – система корней типа F_4 . Если выбрать $\alpha = \varepsilon_4$, то $\Delta_\alpha = B_3$. Мы находимся в ситуации случая (i). Воспользовавшись следствием 6 и случаем (2), получаем

$$\text{sep}(F_4) \leq 30.$$

(6) Пусть Δ – система корней типа E_6 . Выберем $\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Тогда $\Delta_\alpha = A_5$ ($\varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon$, $\varepsilon_3 - \varepsilon_4$, $\varepsilon_4 - \varepsilon_5$, $\varepsilon_5 - \varepsilon_6$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_6 + \varepsilon$ – система простых корней). Имеет место случай (i). Таким образом,

$$\text{sep}(E_6) \leq 2|W_{A_5}^{\text{sep}}| + 2 = 242.$$

(7) Пусть Δ – система корней типа E_7 . Выберем $\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Тогда $\Delta_\alpha = D_6$ ($\varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + \varepsilon_8$, $\varepsilon_3 - \varepsilon_4$, $\varepsilon_4 - \varepsilon_5$, $\varepsilon_5 - \varepsilon_6$, $\varepsilon_6 - \varepsilon_7$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_7 + \varepsilon_8$ – система простых корней). Имеет место случай (i). Таким образом,

$$\text{sep}(E_7) \leq 2|W_{D_6}^{\text{sep}}| + 2 = 2^9 \cdot 3^2 + 2 = 4610.$$

(8) Пусть Δ – система корней типа E_8 . Выберем $\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Тогда $\Delta_\alpha = E_7$ ($\varepsilon_6 + \varepsilon_7 + \varepsilon_8$, $\varepsilon_3 - \varepsilon_4$, $\varepsilon_4 - \varepsilon_5$, $\varepsilon_5 - \varepsilon_6$, $\varepsilon_6 - \varepsilon_7$, $\varepsilon_7 - \varepsilon_8$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_8$ – система простых корней). Имеет место случай (i). Таким образом,

$$\text{sep}(E_8) \leq 2|W_{E_7}^{\text{sep}}| + 2 = 9222.$$

(9) Пусть K – группа отражений H_3 (здесь и далее используются обозначения и терминология [3]). Выберем в качестве корня α старший корень. Тогда $W_\alpha = W_{A_2}$ и, тем самым,

$$|W_{H_3}^{\text{sep}}| \leq 2|W_{A_2}^{\text{sep}}| + 2 = 14.$$

(10) Пусть K – группа отражений H_4 . В качестве корня α выбирается старший корень. Тогда $W_\alpha = H_3$,

$$|W_{H_4}^{\text{sep}}| \leq 2|W_{H_3}^{\text{sep}}| + 2 = 30.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Рассмотрим старший корень α_0 и расширенную диаграмму Дынкина. Диаграммы, соответствующие системам Δ_α , получаются следующим образом: необходимо выкинуть из расширенной диаграммы α_0 и все корни, к нему примыкающие. Докажем это. Заметим, что $\Delta_{\alpha_0}^+ \subset \Delta^+$. Также те простые корни, которые не были выкинуты из диаграммы, остаются неразложимыми и, тем самым, будут простыми в Δ_{α_0} (назовем их набор Π_{α_0}). Докажем, что Π_{α_0} – система простых корней в Δ_α . Пусть есть некоторый положительный разложимый корень $\beta = \sum_{\alpha \in \Pi} c_\alpha \alpha \in \Delta$, где $c_i \geq 0$, который является простым в Δ_α . Тогда

$$\langle \beta, \alpha_0 \rangle = \sum_{\alpha \in \Pi} c_\alpha \langle \alpha, \alpha_0 \rangle = 0.$$

Но так как α_0 – старший корень, то он лежит в камере Вейля и, значит, $\langle \alpha, \alpha_0 \rangle \geq 0$. Из предыдущего равенства мы получаем, что $c_\alpha \neq 0$ выполнено, только если $\langle \alpha, \alpha_0 \rangle = 0$, ибо иначе для всех корней α , входящих в разложение β , выполнено $\alpha \in \Pi_{\alpha_0}$, что противоречит неразложимости корня β .

Авторы благодарят В.Л. Попова за постановку задачи и внимание к работе и Э.Б. Винберга за обсуждение ряда вопросов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] V.L. Popov, *Tensor product decompositions and open orbits in multiple flag varieties*, [arXiv:math.RT/0609003](https://arxiv.org/abs/math.RT/0609003). [2] Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, УРСС, Москва, 1995. [3] J. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **29**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

В. Жгун

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: zhgoon@mail.ru

Поступило
05.12.2006

Д. Миронов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
E-mail: mironovd@mccme.ru