Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Бондарко, Канонические представители в классах строгой изоморфности формальных групп, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 2, 183–189

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3801>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 13:14:39

УДК 512.741.5

Канонические представители в классах строгой изоморфности формальных групп

М. В. Бондарко

Целью настоящей работы является явное построение канонических представителей в каждом классе строгой изоморфности коммутативных формальных групп над произвольным кольцом без кручения. Отдельно рассматривается случай $\mathbb{Z}_{(p)}$ -алгебры. Мы доказываем, что при естественных ограничениях на подкольцо канонические представители формальных групп над ним согласованы с представителями для кольца. Доказаны необходимые и достаточные условия того, что отображение, индуцированное гомоморфизмом колец без кручения на классах строгой изоморфности формальных групп, инъективно и сюръективно.

Библиография: 4 названия.

Введение

Целью этой работы является построение канонических представителей в классах строгой изоморфности формальных групповых законов. Для произвольного кольца R без кручения и каждого простого $p \in \mathbb{Z}$ мы выбираем систему представителей $\theta_p: R/pR \rightarrow R$. Мы доказываем, что любая формальная группа F над R строго изоморфна ровно одной формальной группе $\theta(F)$, чьи коэффициенты при выражении через универсальный криволинейный закон (см. [1]) лежат в соответствующих $\theta_p(R/pR)$. Отдельно рассматривается случай, когда R является $\mathbb{Z}_{(p)}$ -алгеброй. В этом случае выполнен аналогичный результат для универсального p -типического закона. Для кольца целых неразветвленного локального поля эти канонические представители классов строгой изоморфности совпадают с построенными в работах [2] и [3].

Отметим, что единственный известный автору более ранний результат в этом направлении был получен в работе [4] только для одномерных формальных групп над неразветвленным локальным полем.

Мы также доказываем, что если $S \subset R$ и представители в S согласованы с представителями в R , то формальная группа F над R строго изоморфна формальной группе, определенной над S , тогда и только тогда, когда канонический представитель F определен над S .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00082а).

В конце работы мы доказываем необходимые и достаточные условия того, что отображение, индуцированное гомоморфизмом колец без кручения на классах строгой изоморфности формальных групп, инъективно и сюръективно.

ОБОЗНАЧЕНИЯ. Обозначим $\mathbb{P}$ – множество простых чисел, R – коммутативное кольцо с единицей без кручения.

Для каждого простого p будем обозначать кольцо целых чисел, локализованное по p , через $\mathbb{Z}_{(p)}$.

Обозначим $X = (X_i) = X_1, \dots, X_m$ – формальные переменные; x – одна переменная.

Далее, F будет обозначать коммутативный m -мерный формальный групповой закон над R , $\lambda = (\lambda_i(X))$ – логарифм F .

Во всей статье $M_m(\mathfrak{A})$ будет обозначать кольцо матриц размера $m \times m$ над (возможно, некоммутативным) кольцом $\mathfrak{A}$, I_m обозначает единичную матрицу размера $m \times m$; запись $a = (a_i)$ означает, что a – столбец, состоящий из a_i , $1 \leq i \leq m$.

1. Определение и свойства универсальных законов

Этот раздел посвящен напоминанию нужных нам определений и утверждений из книги [1].

1.1. Криволинейные и p -типические группы. Так как в этой статье мы будем изучать только коммутативные формальные группы над кольцами без кручения, наши формальные группы будут иметь логарифмы.

Напомним, что набор рядов $l = (l_i(X_j))$ называется *строгим изоморфизмом* между m -мерными законами F и G , если $l_i \equiv X_i \pmod{\deg 2}$ и $G(l(X), l(Y)) = l(F(X, Y))$. Для формального группового закона над кольцом R набор $\lambda = (\lambda_i(X))$ рядов над $\mathbb{Q}R$ называется *логарифмом* F , если λ задает строгий изоморфизм F и F_+^m ; здесь F_+ обозначает аддитивный формальный групповой закон. Нетрудно видеть, что m -мерная группа F строго изоморфна F_+^m тогда и только тогда, когда все коэффициенты $\lambda_i(X)$ лежат в R для всех $1 \leq i \leq m$.

Напомним также, что формальный групповой закон F называется *криволинейным*, если λ_i для каждого i можно представить в виде

$$X_i + \sum_{j,k} a_{ijk} X_j^k,$$

где $a_{ijk} \in \mathbb{Q}R$. Если, кроме того, для некоторого $p \in \mathbb{P}$ все λ_i имеют вид

$$X_i + \sum_{j,k} b_{ijk} X_j^{p^k},$$

то F называется *p -типическим формальным групповым законом*.

Следующее утверждение хорошо известно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.1. Пусть логарифм формального группового закона F равен

$$\lambda = (\lambda_i) = \left(\sum a_{i_1 \dots i_m}^i X_1^{i_1} \cdots X_m^{i_m} \right).$$

Тогда выполнены следующие утверждения.

1. Групповой закон F строго изоморфен криволинейному закону с логарифмом, равным

$$(\lambda'_i) = \left(\sum a'^i_{i_1 \dots i_m} X_1^{i_1} \dots X_m^{i_m} \right).$$

Здесь $a'^i_{i_1 \dots i_m} = a^i_{i_1 \dots i_m}$, если $i_s = 0$ для всех s , кроме одного; для всех других мультииндексов коэффициенты $a'^i_{i_1 \dots i_m}$ равны нулю.

2. Пусть $R = \mathbb{Z}_{(p)}$ -алгебра для некоторого $p \in \mathbb{P}$. Тогда F строго изоморфен формальной группе с логарифмом, равным (λ''_i) . Здесь

$$\lambda''_i = \sum a''^i_{i_1 \dots i_m} X_1^{i_1} \dots X_m^{i_m},$$

где $a''^i_{i_1 \dots i_m} = a^i_{i_1 \dots i_m}$, если $i_s = 0$ для всех s , кроме одного; оставшийся i_s – степень p , все остальные $a''^i_{i_1 \dots i_m}$ равны нулю.

Утверждение первой части было доказано в [1] (см. пункт 12.3.6), второе – это теорема 16.4.14 той же книги.

1.2. Универсальные групповые законы и его свойства. В этой статье нам придется пользоваться универсальным m -мерным криволинейным законом. Существуют различные групповые законы, удовлетворяющие нужным нам свойствам, их описание несколько громоздко. В частности, в [1] были построены групповые законы F_R и H_R (см. §§ 12.2, 12.3), каждый из них может быть взят в качестве F_e (см. ниже). Поэтому мы не будем строить универсальные криволинейные законы в этой работе, лишь опишем необходимые нам свойства.

Мы считаем, что универсальный m -мерный криволинейный закон F_e определен над кольцом $\mathbb{Z}[e_{ijk}]$, где $k \geq 2$, а $1 \leq i, j \leq m$. Универсальность означает, что для каждого криволинейного m -мерного группового закона F над произвольным кольцом R существует единственный набор $f_{ijk} \in R$ такой, что при подстановке f_{ijk} вместо e_{ijk} в F_e мы получаем F .

Определим функцию v для $n \in \mathbb{Z}$ следующим образом: $v(n) = p$, если n является положительной степенью простого числа p и $v(n) = 1$ для всех остальных n .

Мы будем считать, что для каждого $t > 1$ существует набор многочленов d_{ijlt} над $\mathbb{Q}$ такой, что логарифм универсального m -мерного криволинейного закона $\lambda_e = (\lambda_{ei})$ удовлетворяет равенству

$$\lambda_{ei} \equiv \sum_{1 \leq j \leq m, l < t} d_{iljt}(e_{uvr}) X_j^l + \sum_j \frac{e_{ij t}}{v(t)} X_j^t \pmod{\deg t + 1}, \quad (1)$$

где i, u, v (независимо) пробегает координаты закона F_e , $2 \leq r < t$, m – размерность формальной группы. Формальные законы F_R и H_R , построенные в [1], удовлетворяют этому свойству согласно [1; формула (12.3.3)].

Нам также понадобится универсальный m -мерный p -типический групповой закон F_c , который был определен в [1]. Рассмотрим кольцо $\mathfrak{A} = \mathbb{Z}_{(p)}[c_{ijk}]$, $k > 0$, $1 \leq i, j \leq m$. Определим на нем кольцевой оператор σ с помощью равенства $\sigma(c_{ijk}) = c^p_{ijk}$. Рассмотрим кольцо $\mathfrak{A}'$, которое равно $\mathfrak{A}[[\Delta]]$ как левый $\mathfrak{A}$ -модуль и удовлетворяет равенству $\Delta^s a = \sigma^s(a) \Delta^s$ для каждого $a \in \mathfrak{A}$ и $s > 0$. Тогда

логарифм $\lambda_c = (\lambda_{ci})$ универсального p -типического m -мерного закона $F_c = F_{c,m}$ получается при обращении матрицы

$$u_c = I_m - \sum_{k>0} p^{-1}(c_{ijk})\Delta^k$$

в $M_m(\mathcal{A}')$ и применении результата к $X = (X_1, \dots, X_m)$ по правилу $a\Delta^s(X_j) = aX_j^{p^s}$ для $1 \leq j \leq m$, $s > 0$.

Универсальность снова означает, что для каждого p -типического m -мерного группового закона F над кольцом R существует единственный набор $f_{ijk} \in R$ такой, что при подстановке f_{ijk} вместо c_{ijk} в F_c мы получаем F .

Нетрудно проверить, что для каждого $t > 0$ существует набор многочленов g_{ijlt} над $\mathbb{Q}$ такой, что

$$\lambda_{ci} \equiv \sum_{1 \leq j \leq m, 0 \leq l < t} g_{iljt}(c_{uvr})X_j^{p^l} + \sum_j \frac{c_{ij t}}{p} X_j^{p^t} \pmod{\deg p^{t+1}}, \quad (2)$$

где i, u, v независимо пробегают координаты закона F_c , $1 \leq r < t$.

Мы будем считать, что F_c и F_e обозначают соответствующие универсальные законы размерности m .

Отметим, что для произвольного кольца R (не обязательно $\mathbb{Z}_{(p)}$ -алгебры) закон F_c дает при подстановке $f_{ijk} \in R$ формальную группу над R .

2. Основные результаты

Для каждого $p \in \mathbb{P}$ зафиксируем систему представителей $\theta_p: R/pR \rightarrow R$. Мы также определим $\theta_1: R/R \rightarrow R$; будем считать, что $\theta_1(0) = 0$.

2.1. Канонические представители.

ТЕОРЕМА 2.1.1. 1. Любая формальная группа F над R строго изоморфна ровно одной криволинейной формальной группе $\theta(F)$ такой, что все значения коэффициентов e_{ijk} , при подстановке которых в универсальный криволинейный закон F_e получается $\theta(F)$, принадлежат $\theta_p(R/pR)$ при всех $i > 1$, представимых в виде p^l , $l > 0$, для какого-то простого p , и равны нулю при других значениях i .

2. Пусть R — $\mathbb{Z}_{(p)}$ -алгебра. Тогда любая формальная группа F над R строго изоморфна ровно одной p -типической формальной группе $\theta(F)$ такой, что все значения коэффициентов c_{ijk} , при подстановке которых в универсальный p -типический закон F_c получается $\theta(F)$, принадлежат $\theta_p(R/pR)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Построим логарифм представителя класса изоморфности группы последовательно по степеням X . Пусть для некоторого $s > 1$ криволинейная группа $F' = F_s$ строго изоморфна F , коэффициенты f'_{ijl} , при подстановке которых в F_e получается F' , при всех $1 < l < s$ лежат в $\theta_{v(l)}(R/v(l)R)$. При этом в качестве F_2 можно взять группу, строго изоморфную F , определенную в первой части предложения 1.1.1.

Обозначим логарифм F' через λ' . Возьмем $\lambda'_{s+1} = \lambda'(Y)$, где

$$Y_i = X_i + \sum_j \frac{\theta_{v(s)}(f'_{ijs}) - f'_{ijs}}{v(s)} X_j^s.$$

Согласно определению строгой изоморфности набор рядов λ'_{s+1} дает логарифм формальной группы над R , строго изоморфной F_s . Возьмем набор рядов λ'' , равный “криволинейной части” λ'_{s+1} , т.е. применим первую часть предложения 1.1.1. Из (1) получаем, что для λ'' коэффициенты f''_{ijl} при $l < s+1$ принадлежат $\theta_{v(l)}(R/v(l)R)$. Поэтому мы можем взять формальную группу F_{s+1} , логарифм которой равен λ'' . Предел F_s (заметим, что каждый коэффициент стабилизируется, начиная с некоторого места) будет искомой $\theta(F)$, она будет строго изоморфна всем F_s (а значит, и F).

Теперь пусть F и F' строго изоморфны, различны и удовлетворяют условию на $\theta(F)$ в формулировке теоремы. Пусть $s > 1$ – наименьшее число такое, что $F' \not\equiv F \pmod{\deg s + 1}$. Тогда $\lambda' = \lambda(h_i)$ для некоторых рядов $h_i \equiv X_i \pmod{\deg 2}$ при $1 \leq i \leq m$. Так как $F' \equiv F \pmod{\deg s}$, оба закона криволинейны, мы получаем, что $h_i \equiv X_i + \sum a_{ij} X_j^s \pmod{\deg s + 1}$ для некоторых $a_{ij} \in R$. Из формулы (1) мы получаем, что для коэффициентов, при подстановке которых в F_e получаются F и F' , выполнено равенство $f'_{ijs} = f_{ijs} + v(s)a_{ij}$. Так как f_{ijs} и f'_{ijs} являются представителями элементов $R/v(s)R$, то $a_{ij} = 0$ и $F' \equiv F \pmod{\deg s + 1}$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

2. Доказательство проводится аналогично. Единственное отличие состоит в том, что нужно брать λ_{s+1} , равный p -типической части λ'_{s+1} , т.е. воспользоваться второй частью предложения 1.1.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.2. Естественный выбор для $\theta = \theta_p$ в случае, когда R – кольцо целых полного дискретно нормированного абсолютно неразветвленного поля с совершенным полем вычетов, это система представителей Тейхмюллера. В этом случае представители из пункта 2 нашей теоремы совпадут с каноническими представителями для групп Хонды, построенными в [2] и [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.3. Из доказательства теоремы видно, что $\theta(F) \pmod{\deg r}$ зависит только от $F \pmod{\deg r}$ для каждого $r > 1$. Поэтому для групп F, F' над R мы имеем $\theta(F) \equiv \theta(F') \pmod{\deg r}$, если и только если F' строго изоморфна некоторой F'' такой, что $F \equiv F'' \pmod{\deg r}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1.4. Пусть A – кольцо целых разнохарактеристического локального поля K , π – униформизирующая A . Тогда для формальных A -модулей выполнено утверждение, аналогичное пункту 2 теоремы 2.1.1. При этом нужно брать представители $R/\pi R$ в R , а вместо F_c брать универсальный формальный A -типический модуль F_V^A (см. § 21.5 книги [1]).

2.2. Определенность формальной группы над подкольцом. Пусть R – подкольцо в S такое, что для каждого $p \in \mathbb{P}$ мы имеем $R \cap pS = pR$. Получаем, что $R/pR \subset S/pS$. Зададим представители θ_p элементов S/pS так, что $\theta_p(R/pR) \subset R$ для каждого $p \in \mathbb{P}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2.1. *Группа F строго изоморфна некоторой формальной группе над R тогда и только тогда, когда $\theta(F)$ определена над R .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение “тогда” очевидно.

Обратное утверждение немедленно следует из того, что для группы G над R существует канонический представитель над R , который при наших условиях является также и каноническим представителем над S . Поэтому если группа F над S строго изоморфна G , то $\theta(F) = \theta(G)$, а значит, формальный групповой закон $\theta(F)$ определен над R .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.2. Если $\mathbb{Z}_{(p)} \subset R$, то мы имеем $R = lR$ для всех простых $l \neq p$, т.е. достаточно проверить, что $R \cap lS = lR$ только для $l = p$. В этом случае, очевидно, предложение 2.2.1 будет выполнено также и для представителей, построенных с помощью F_c (т.е. согласно второму пункту теоремы 2.1.1).

2.3. Поведение классов строгой изоморфности формальных групп при гомоморфизмах колец. Для кольца R мы обозначим через $i(R)$ множество классов строгой изоморфности формальных групп над R . Очевидно, гомоморфизм $f: R \rightarrow S$ индуцирует отображение $f_i: i(R) \rightarrow i(S)$.

Докажем основные свойства f_i .

ТЕОРЕМА 2.3.1. Пусть R, S – кольца без кручения, $f: R \rightarrow S$ – гомоморфизм. Тогда отображение f_i инъективно (соответственно сюръективно) тогда и только тогда, когда для каждого $p \in \mathbb{P}$ выполнено $f^{-1}(pS) = pR$ (соответственно выполнено $f(R) \bmod pS = S/pS$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Проверка условия инъективности.

Если для каждого $p \in \mathbb{P}$ выполнено $f^{-1}(pS) = pR$, то мы можем выбрать представители θ_p для S и R такие, что представители для R переходят в представители для S . Так как f инъективно на представителях для каждого p , мы получаем требуемое.

Обратно, пусть существует $p \in \mathbb{P}$ такое, что $f^{-1}(pS) \neq pR$. Выберем такой элемент $z \in R \setminus pR$, что $f(z) \in pS$. Рассмотрим одномерную формальную группу F_z с логарифмом, равным

$$\lambda_z = x + \sum_{i>0} \frac{z^{1+p+\dots+p^{i-1}} x^{p^i}}{p^i} \in \mathbb{Q}R[[x]].$$

Так как F_z получается при подстановке в (одномерный) закон F_c набора $f_{111} = z$, $f_{11i} = 0$ для $i \geq 2$, мы получаем, что F_z – формальная группа над R . Так как $z/p \notin R$, то F_z не может быть строго изоморфна над R аддитивной формальной группе. Так как для каждого $i > 0$ мы имеем $f(z^{1+p+\dots+p^{i-1}})/p^i \in S$, то $f_*(F_z)$ строго изоморфна аддитивной формальной группе над S .

2. Проверка условия сюръективности.

Заменив R на $f(R)$, мы получаем, что достаточно доказывать утверждение в случае, когда f – вложение. Если для каждого $p \in \mathbb{P}$ выполнено $f(R) \bmod pS = S/pS$, то мы можем выбрать представители θ_p для S , лежащие в R , а значит, каждая группа над S строго изоморфна некоторой формальной группе над R .

Обратно, если существует $p \in \mathbb{P}$ такое, что $f(R) \bmod pS \neq S/pS$, то выберем такой элемент $z \in S$, что $z \bmod pS \notin R \bmod pS$. Снова рассмотрим формальную группу F_z , логарифм которой равен λ_z ; она определена над S . Проверим, что F_z не может быть строго изоморфна формальной группе над R . Пусть F_z строго изоморфна над S группе G над R , ряд h задает строгий изоморфизм. Тогда для эндоморфизмов $[p]$ формального умножения на p мы имеем $[p]_G = h \circ [p]_{F_z} \circ h^{-1}$, при этом $[p]_{F_z} \equiv zx^p \bmod (pS, \deg p + 1)$. Так как $h \equiv x \bmod \deg 2$, мы получаем, что ряд $[p]_G$ также сравним с zx^p по модулю $(pS, \deg p + 1)$. Таким образом, формальная группа G не может быть определена над R .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3.2. В частности, мы передоказали результат книги [1] для колец без кручения:

$$i(R) = i\left(\prod_{p \in \mathbb{P}} \varprojlim R/p^s R\right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} i(\varprojlim R/p^s R).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3.3. Конечно же, если $\mathbb{Z}_{(p)} \subset R$, то достаточно проверять условия теоремы для единственного простого числа, равного p .

Автор благодарен С. В. Востокову за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Hazewinkel, *Formal Groups and Applications*, Pure and Applied Mathematics, **78**, Academic Press, New York–London, 1978.
- [2] М. В. Бондарко, С. В. Востоков, “Явная классификация формальных групп над локальными полями”, *Теория чисел, алгебра и алгебраическая геометрия*, К 80-летию со дня рожд. акад. И. Р. Шафаревича, Тр. МИАН, **241**, № 2, Наука, М., 2003, 43–67.
- [3] М. В. Бондарко, “Явная классификация формальных групп над полными дискретно нормированными полями с несовершенным полем вычетов”, Тр. СПб МО, **11**, 2005, 1–36.
- [4] Т. Honda, “On the theory of commutative formal groups”, *J. Math. Soc. Japan*, **22** (1970), 213–246.

М. В. Бондарко

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступило

04.02.2004

Исправленный вариант

04.12.2006