Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Д. Икрамов, О приведении комплексных матриц к компактному формам посредством унитарных конгруэнций, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 4, 550–559

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3803>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 13:38:24

О приведении комплексных матриц к компактным формам посредством унитарных конгруэнций

Х. Д. Икрамов

Доказано, что всякая сопряженно-нормальная $(n \times n)$ -матрица может быть посредством унитарной конгруэнции приведена к блочно-трехдиагональной форме, в которой порядки последовательных диагональных блоков не превосходят соответственно чисел $1, 2, 3, \dots$. Доказательство конструктивное: описан конечный процесс, преобразующий матрицу к желаемой форме. Указаны достаточные условия для стабилизации порядков диагональных блоков. Компактная форма, соответствующая этому случаю, является ленточной матрицей.

Библиография: 3 названия.

1. Введение. Хорошо известно, что всякую эрмитову матрицу $A \in M_n(\mathbb{C})$ можно привести к трехдиагональному виду посредством конечной последовательности подобий с элементарными унитарными матрицами (отражениями или вращениями). Пусть Q – произведение этих матриц и T – полученная трехдиагональная форма. Тогда

$$Q^*AQ = T. \quad (1)$$

Обозначив столбцы матрицы Q через $q_1, \dots, q_n$ и переписав (1) в виде

$$AQ = QT,$$

получим

$$\begin{aligned} Aq_1 &= t_{11}q_1 + t_{21}q_2, \\ Aq_2 &= t_{12}q_1 + t_{22}q_2 + t_{32}q_3, \\ &\dots\dots\dots \\ Aq_n &= t_{n-1,n}q_{n-1} + t_{nn}q_n. \end{aligned} \quad (2)$$

При этом

$$t_{ii} = (Aq_i, q_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$t_{21} = \|Aq_1 - t_{11}q_1\|_2, \quad (4)$$

$$t_{i+1,i} = \|Aq_i - t_{i,i}q_i - t_{i-1,i}q_{i-1}\|_2, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \quad (5)$$

$$t_{i,i+1} = t_{i+1,i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (6)$$

Формулы (2)–(6) соответствуют еще одному хорошо известному методу унитарного приведения эрмитовой матрицы к трехдиагональному виду, называемому *алгоритмом Ланцоша*. Более привычное описание этого метода выглядит так: по

заданному (нормированному) вектору q_1 строится степенная последовательность

$$q_1, \quad Aq_1, \quad A^2q_1, \quad \dots,$$

к которой применяется процесс ортогонализации, порождающий ортонормированные векторы Ланцоша $q_1, q_2, q_3, \dots$. Первые m векторов Ланцоша ($m = 1, 2, \dots$) составляют ортонормированный базис в m -м крыловском подпространстве

$$\mathcal{K}_m = \mathcal{K}_m(A, q_1) = \text{span}\{q_1, Aq_1, \dots, A^{m-1}q_1\}. \quad (7)$$

Особенностью данного процесса по сравнению со стандартной ортогонализацией Грама–Шмидта является то, что на m -м шаге ($m > 3$) вектор Aq_{m-1} автоматически ортогонален подпространству $\mathcal{K}_{m-3}$. В результате вектор q_m получается из ранее вычисленных векторов Ланцоша посредством трехчленной формулы типа (2), а не m -членного соотношения, как в общем случае. Этот результат, важный с вычислительной точки зрения, есть следствие трехдиагональности матрицы T в (1).

Для матрицы A общего вида процесс унитарного приведения дает вместо трехдиагональной (верхнюю) форму Хессенберга, т.е. матрицу H такую, что $h_{ij} = 0$ при $i > j + 1$. Переходя от матричного равенства

$$Q^*AQ = H$$

к столбцевым соотношениям, получим формулы процесса, называемого в вычислительной линейной алгебре алгоритмом Арнольди.

И трехдиагональную форму, и форму Хессенберга принято называть *компактными* по той причине, что в обеих присутствует значительное количество нулевых элементов. Ясно, однако, что трехдиагональная матрица соответствует этому названию в гораздо большей мере. В связи с этим в литературе по линейной алгебре уже продолжительное время (с 1980-х годов) обсуждается следующий вопрос: какие матрицы (за пределами класса эрмитовых матриц) могут быть приведены (посредством конечной последовательности унитарных подобий) к компактным формам, по возможности мало отличающимся от трехдиагональной? Напомним сравнительно недавний результат в этом направлении [1], имеющий непосредственное отношение к тематике данной статьи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A \in M_n(\mathbb{C})$ – нормальная матрица. Существует процесс типа Ланцоша, приводящий A к блочно-трехдиагональной форме

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & & \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & \\ & H_{32} & H_{33} & \dots \\ & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где диагональные блоки $H_{11}, H_{22}, \dots$ квадратные и их порядки в типичном случае даются последовательными натуральными числами $1, 2, 3, \dots$. Если A удовлетворяет уравнению вида

$$g(A, A^*) = 0, \quad (9)$$

где $g(x, y)$ – многочлен степени $k \ll n$, то порядки диагональных блоков H_{ii} в матрице (8), начиная с $i = k$, стабилизируются на значении k .

Более подробно процесс, приводящий к форме (8), обсуждается в п. 3. С полным основанием эту форму можно считать компактной, поскольку число ненулевых элементов в ней не превосходит $O(n^{3/2})$ (тогда как в матрице Хессенберга примерно половина элементов отличны от нуля). Для матрицы A , удовлетворяющей уравнению (9), форму (8) можно рассматривать как ленточную матрицу, а число ненулевых элементов h_{ij} есть линейная функция от n .

Если вместо унитарных подобий говорить об унитарных конгруэнциях, то известны следующие факты.

1. Всякую симметричную матрицу $A \in M_n(\mathbb{C})$ можно привести к трехдиагональному виду посредством конечной последовательности конгруэнций с элементарными унитарными матрицами. Результирующее преобразование описывается формулой

$$Q^T A Q = T, \quad (10)$$

где Q – унитарная матрица.

2. Аналогичный процесс элементарных унитарных конгруэнций приводит матрицу A общего вида к форме Хессенберга.

Автору не известны какие-либо результаты о компактных формах, промежуточных между трехдиагональными и хессенберговыми матрицами.

Цель настоящей статьи – установить такой результат, взяв теорему 1 в качестве образца. При этом нужно рассматривать *сопряженно-нормальные* матрицы, играющие в теории унитарных конгруэнций ту же роль, какую обычные нормальные матрицы выполняют в теории унитарных подобий. Необходимые сведения о сопряженно-нормальных матрицах и доказательство главного результата даны в пп. 4 и 5. Основной технический прием, используемый в доказательстве, а именно, введение вспомогательной матрицы удвоенного порядка, обсуждается в п. 2.

2. Приведение к трехдиагональному виду. Пусть A – комплексная симметричная матрица. Вернемся к равенству (10) и проинтерпретируем его в том же духе, в каком равенство (1) было интерпретировано во введении. Переписав (10) в виде

$$A Q = \bar{Q} T,$$

получим для столбцов $q_1, \dots, q_n$ матрицы Q следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A q_1 &= t_{11} \bar{q}_1 + t_{21} \bar{q}_2, \\ A q_2 &= t_{12} \bar{q}_1 + t_{22} \bar{q}_2 + t_{32} \bar{q}_3, \\ &\dots\dots\dots \\ A q_n &= t_{n-1,n} \bar{q}_{n-1} + t_{nn} \bar{q}_n. \end{aligned} \quad (11)$$

При этом

$$t_{ii} = (A q_i, \bar{q}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

$$|t_{21}| = \|A q_1 - t_{11} \bar{q}_1\|_2, \quad (13)$$

$$|t_{i+1,i}| = \|A q_i - t_{i,i} \bar{q}_i - t_{i-1,i} \bar{q}_{i-1}\|_2, \quad i = 2, 3, \dots, n-1, \quad (14)$$

$$t_{i,i+1} = t_{i+1,i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (15)$$

Черта над символом матрицы или вектора обозначает поэлементное сопряжение.

Формулы (11)–(15) соответствуют методу CSYM, предложенному в [2] для решения линейных систем с комплексными симметричными матрицами. По своему типу CSYM относится к методам минимальных невязок, однако отличается от других известных представителей этого класса (таких методов, как MINRES и GMRES) тем, что используемые в нем пробные подпространства не являются крыловскими. Более точная формулировка такова: положим

$$\mathcal{N}_m = \text{span}\{q_1, \dots, q_m\}, \quad 1 \leq m \leq n. \quad (16)$$

Тогда (см. [2; предложение 2])

$$\mathcal{N}_m = \text{span}\{q_1, \bar{A}\bar{q}_1, \bar{A}Aq_1, (\bar{A}A)\bar{A}\bar{q}_1, \dots, (\bar{A}A)^{l-1}q_1, (\bar{A}A)^{l-1}\bar{A}\bar{q}_1\}, \quad (17)$$

если $m = 2l$, и

$$\mathcal{N}_m = \text{span}\{q_1, \bar{A}\bar{q}_1, \bar{A}Aq_1, \dots, (\bar{A}A)^{l-1}\bar{A}\bar{q}_1, (\bar{A}A)^l q_1\}, \quad (18)$$

если $m = 2l+1$. Таким образом, степенные последовательности, участвующие в формировании подпространств $\mathcal{N}_m$, порождаются матрицей

$$A_L = \bar{A}A, \quad (19)$$

а не A . В отличие от обычных крыловских процессов, здесь две степенных последовательности вместо одной; их начальными векторами являются q_1 и $\bar{A}\bar{q}_1$.

Несмотря на сказанное, мы покажем, что CSYM может быть описан на языке крыловских подпространств. Точнее, CSYM может рассматриваться как проекция на $\mathbb{C}^n$ крыловского процесса, идущего в пространстве удвоенной размерности.

Сопоставим всякой матрице $A \in M_n(\mathbb{C})$ матрицу удвоенного порядка

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{A} \\ A & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Известно (см. [3; теорема 2.1]), что спектр этой матрицы симметричен относительно нуля:

$$\text{Sp}(\hat{A}) = \{\mu_1, \dots, \mu_n, -\mu_1, \dots, -\mu_n\}. \quad (21)$$

Будем считать, что $\mu_1, \dots, \mu_n$ принадлежат замкнутой правой полуплоскости. Тогда эти числа совпадают с псевдособственными значениями матрицы A , как они определены в [3], т.е. с квадратными корнями, имеющими неотрицательные вещественные части, из собственных значений матрицы A_L (или, что все равно, матрицы $A_R = A\bar{A}$). Ввиду особенностей спектра $\text{Sp } A_L$, невещественные псевдособственные значения в множестве $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ распадаются на сопряженные пары.

Легко видеть, что четные степени матрицы (20) имеют блочно-диагональный вид:

$$\hat{A}^{2m} = A_L^m \oplus A_R^m. \quad (22)$$

Нечетные степени имеют ту же структуру, что и сама матрица $\hat{A}$:

$$\hat{A}^{2m+1} = \begin{pmatrix} 0 & A_L^m \bar{A} \\ A_R^m A & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Пусть теперь $A = A^T$. Очевидно, что матрица $\hat{A}$ в этом случае является эрмитовой. Фиксируем нормированный вектор $q_1 \in \mathbb{C}^n$ и положим

$$v = \begin{pmatrix} q_1 \\ \bar{q}_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2n}. \quad (24)$$

Степенная последовательность, порождаемая матрицей $\hat{A}$ и вектором v , состоит из векторов

$$v, \quad \hat{A}v = \begin{pmatrix} \bar{A}q_1 \\ Aq_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}^2v = \begin{pmatrix} A_L q_1 \\ A_R \bar{q}_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}^3v = \begin{pmatrix} A_L \bar{A}q_1 \\ A_R Aq_1 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad (25)$$

Верхние половины этих векторов образуют последовательность

$$q_1, \quad \bar{A}q_1, \quad A_L q_1, \quad A_L \bar{A}q_1, \quad \dots, \quad (26)$$

конечные сегменты которой определяют подпространства (17) и (18).

Если матрица T в формуле (10) неприводима (т.е. все поддиагональные элементы $t_{i+1,i}$ отличны от нуля), то размерности подпространств $\mathcal{K}_m$ монотонно возрастают от 1 до n . Отсюда следует, что первые n членов последовательности (25) линейно независимы.

Итак, для комплексной симметричной матрицы A установлено соответствие между пробными подпространствами метода CSYM и крыловскими подпространствами вспомогательной матрицы $\hat{A}$. Мы хотели бы распространить это соответствие на более широкий класс сопряженно-нормальных матриц. При таком распространении изменяется содержание понятия крыловского подпространства, о чем будет сказано в следующем пункте.

3. Обобщенный процесс Ланцоша. Пусть $A \in M_n(\mathbb{C})$ – нормальная матрица. Для произвольного (ненулевого) вектора $b \in \mathbb{C}^n$ последовательность

$$b, \quad Ab, \quad A^*b, \quad A^2b, \quad AA^*b, \quad A^{*2}b, \quad A^3b, \quad \dots \quad (27)$$

будем называть *обобщенной степенной последовательностью*, порожденной парой (A, b) .

Удобно рассматривать последовательность (27) как состоящую из сегментов длины соответственно 1, 2, 3, 4, Сегмент с номером k , называемый k -м *слоем*, можно описать как совокупность векторов вида $u = W_k(A, A^*)b$, где $W_k(s, t)$ пробегает множество одночленов степени k от (коммутирующих) переменных s и t . Символ $W_0(s, t)$ обозначает пустое слово, так что $W_0(s, t)b$ есть попросту вектор b .

Суть обобщенного процесса Ланцоша состоит в ортогонализации последовательности (27). Пусть $v_1, v_2, v_3, \dots$ – получаемые при этом ненулевые ортогональные векторы. Положим

$$\mathcal{K}_m = \text{span}\{v_1, \dots, v_m\}.$$

Обозначим через $\text{orth}_{\mathcal{K}} w$ ортогональную составляющую в разложении вектора w относительно линейного подпространства $\mathcal{K}$.

Обобщенный процесс Ланцоша задается следующим предписанием.

1. Выбрать ненулевой вектор b и положить $v_1 = b$.

2. Пусть уже построены ненулевые векторы $v_1, \dots, v_m$, составляющие ортогональный базис линейной оболочки первых k_m векторов $u_1, \dots, u_{k_m}$ последовательно (27). Если перпендикуляр $\text{orth}_{\mathcal{K}_m} u_{k_m+1}$ не равен нулю, принять его в качестве вектора v_{m+1} и положить $k_{m+1} = k_m + 1$. В противном случае построить вектор $\text{orth}_{\mathcal{K}_m} u_{k_m+2}$. Если он ненулевой, принять его в качестве v_{m+1} и положить $k_{m+1} = k_m + 2$ и т.д.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если все векторы k -го слоя последовательности (27) дают нулевые перпендикуляры на текущее подпространство $\mathcal{K}_m$, то $\mathcal{K}_m$ есть инвариантное подпространство матрицы A (следовательно, и матрицы A^*). Процесс Ланцоша в этом случае завершается досрочно.

В дальнейшем мы пользуемся следующей терминологией. *Обобщенным подпространством Крылова* (с номером m) называется подпространство

$$\mathcal{L}_m(A, b) = \text{span}\{W(A, A^*)b : \deg W \leq m\}. \quad (28)$$

Его размерность обозначается через ℓ_m . Число $\omega_m = \ell_m - \ell_{m-1}$, $m \geq 1$, называется *шириной* m -го слоя; мы полагаем $\omega_0 = 1$. Иначе ω_m можно определить как размерность фактор-пространства $\mathcal{L}_m / \mathcal{L}_{m-1}$.

Предположим, что векторы $v_1, v_2, \dots$, построенные в процессе Ланцоша, образуют базис пространства $\mathbb{C}^n$ (т.е. процесс не завершился досрочно). Нормируем их и полученные ортонормированные векторы $q_1, \dots, q_n$ будем называть *векторами Ланцоша*. По построению, q_1 есть базисный вектор подпространства $\mathcal{L}_0$; векторы q_1, q_2, q_3 составляют (ортонормированный) базис подпространства $\mathcal{L}_1$; вообще, первые ℓ_m , $m \geq 1$, векторов Ланцоша являются (ортонормированным) базисом подпространства $\mathcal{L}_m$. В этих терминах ω_m есть число векторов Ланцоша, добавленных к базису подпространства $\mathcal{L}_{m-1}$ посредством ортогонализации векторов в m -м слое последовательности (27). Естественно разбить на слои и сам базис Ланцоша, считая вектор q_1 его нулевым слоем, векторы q_2 и q_3 – первым слоем, и т.д.

Покажем, что обобщенный процесс Ланцоша можно рассматривать как метод унитарного приведения матрицы A к блочно-трехдиагональной форме (8). Будем интерпретировать A как линейный оператор, действующий в $\mathbb{C}^n$, и составим матрицу этого оператора в базисе из векторов Ланцоша. Примем во внимание следующие свойства обобщенных крыловских подпространств (см. [1; раздел 2]):

1) если $x \in \mathcal{L}_m$, то

$$Ax \in \mathcal{L}_{m+1}, \quad A^*x \in \mathcal{L}_{m+1};$$

2) если $q_\ell \in \mathcal{L}_m \setminus \mathcal{L}_{m-1}$, то

$$Aq_\ell \perp \mathcal{L}_{m-2}, \quad A^*q_\ell \perp \mathcal{L}_{m-2}.$$

В применении к векторам Ланцоша свойство 1) означает, что векторы вида Aq , где q пробегает m -й слой базиса Ланцоша, имеют нулевые коэффициенты Фурье по векторам из слоев с номерами, большими $m + 1$. Из свойства 2) следует, что те же векторы Aq имеют нулевые коэффициенты и по векторам из слоев $0, 1, \dots, m - 2$. Таким образом, в $(m + 1)$ -м блочном столбце матрицы H отличны от нуля только блоки $H_{m,m+1}$, $H_{m+1,m+1}$ и $H_{m+2,m+1}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, т.е. H является блочно-трехдиагональной матрицей. Унитарная матрица Q , составленная из векторов $q_1, \dots, q_n$, осуществляет приведение A к форме H .

4. Сопряженно-нормальные матрицы. Матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ называется *сопряженно-нормальной*, если

$$AA^* = \overline{A^*A}. \quad (29)$$

Сопряженно-нормальными являются, в частности, симметричные и кососимметричные матрицы (подобно тому, как эрмитовы и косоэрмитовы матрицы входят в класс обычных нормальных матриц).

Легко проверить, что матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ тогда и только тогда будет сопряженно-нормальной, когда соответствующая ей матрица $\hat{A}$ (см. (20)) нормальна в обычном смысле.

По аналогии с п. 2 фиксируем нормированный вектор $q_1 \in \mathbb{C}^n$ и определим вектор v формулой (24). Построим обобщенную степенную последовательность, порождаемую парой $\hat{A}, v$. Учтем при этом, что

$$\hat{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A^T & 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

и степени этой матрицы выражаются формулами, аналогичными (22) и (23). В результате получим последовательность

$$\begin{aligned} v, \quad \hat{A}v &= \begin{pmatrix} \overline{Aq_1} \\ Aq_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}^*v = \begin{pmatrix} A^*\overline{q_1} \\ A^Tq_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}^2v = \begin{pmatrix} A_Lq_1 \\ A_R\overline{q_1} \end{pmatrix}, \\ \hat{A}\hat{A}^*v &= \begin{pmatrix} \overline{AA^Tq_1} \\ AA^*\overline{q_1} \end{pmatrix}, \quad \hat{A}^{*2}v = \begin{pmatrix} A^*A^Tq_1 \\ A^TA^*\overline{q_1} \end{pmatrix}, \quad \dots \end{aligned} \quad (31)$$

Верхние половины этих векторов образуют последовательность

$$q_1, \quad \overline{Aq_1}, \quad A^*\overline{q_1}, \quad \overline{AAq_1}, \quad \overline{AA^Tq_1}, \quad A^*A^Tq_1, \quad \overline{AA^*Aq_1}, \quad \dots \quad (32)$$

Проведем ортогонализацию последовательности (32). Вектор q_1 уже нормирован. На втором шаге ортогонализуем вектор Aq_1 к $\overline{q_1}$:

$$w_2 = Aq_1 - h_{11}\overline{q_1}, \quad h_{11} = (Aq_1, \overline{q_1}). \quad (33)$$

Теперь полагаем

$$h_{21} = \|w_2\|_2, \quad q_2 = \frac{\overline{w_2}}{h_{21}}.$$

Эти соотношения означают, что $q_2 \perp q_1$ и

$$q_2 \in \text{span}\{q_1, \overline{Aq_1}\}, \quad (34)$$

как и должно быть.

На третьем шаге ортогонализуем A^Tq_1 к $\overline{q_1}$ и $\overline{q_2}$:

$$w_3 = A^Tq_1 - h_{11}\overline{q_1} - h_{12}\overline{q_2}. \quad (35)$$

Коэффициент h_{11} имеет значение, указанное в (33), а

$$h_{12} = (A^Tq_1, \overline{q_2}) = (Aq_2, \overline{q_1}).$$

Вычислив w_3 , полагаем

$$h_{13} = \|w_3\|_2, \quad q_3 = \frac{\bar{w}_3}{h_{13}}. \quad (36)$$

Из (35) и (36) выводим, что

$$q_3 \in \text{span}\{q_1, q_2, A^* \bar{q}_1\}.$$

Очевидно, что это включение согласуется с первыми тремя членами последовательности (32) (см. (34)).

В соответствии с соглашением, принятым в п. 3, последовательность (31) разбита на слои. Установим аналогичное разбиение для последовательности (32). Таким образом, векторы $A\bar{q}_1$ и $A^* \bar{q}_1$, (неявно) участвовавшие во втором и третьем шагах ортогонализации, составляют первый слой, а q_2 и q_3 составляют первый слой будущего ортонормированного базиса $q_1, \dots, q_n$.

Следующие три шага процесса соответствуют ортогонализации векторов во втором слое последовательности (32). Практически она выполняется так: векторы Aq_2 , Aq_3 и $A^T q_2$ последовательно ортогонализуются к уже вычисленным векторам $\bar{q}_i$, нормируются и превращаются соответственно в q_4 , q_5 и q_6 .

Смысл коэффициентов ортогонализации $h_{11}, h_{12}, \dots$ и нормировочных коэффициентов $h_{21}, h_{13}, \dots$ выявляется из равенств (33), (35) и аналогичных равенств последующих шагов (ср. с (11)): эти коэффициенты образуют матрицу H , к которой A приводится посредством унитарной конгруэнции с трансформирующей матрицей

$$Q = (q_1 \dots q_n). \quad (37)$$

Матрица H имеет блочное устройство, показанное формулой (8), причем размеры блоков определяются шириной слоев в последовательности (32). Это утверждение обосновывается примерно так же, как для обобщенного процесса Ланцоша, и опирается на аналогии свойств 1) и 2), отмеченных в п. 3. Пусть $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m(\hat{A}, v)$, $m = 1, 2, \dots$, – обобщенные крыловские подпространства, определяемые последовательностью (31), а $\mathcal{M}_m$ – их проекции на $\mathbb{C}^n$, определяемые последовательностью (32). Положим

$$\mathcal{P}_m = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \bar{x} \in \mathcal{M}_m\}.$$

Обсуждение процесса ортогонализации, проведенное выше, показывает, что

$$Aq \in \mathcal{P}_{m+1} \quad \text{и} \quad A^T q \in \mathcal{P}_{m+1},$$

если $q \in \mathcal{M}_m$, что соответствует свойству 1) из п. 3.

Пусть $q_l \in \mathcal{M}_m \setminus \mathcal{M}_{m-1}$, $m \geq 2$, а $q_i \in \mathcal{M}_{m-2}$. Тогда

$$(Aq_l, \bar{q}_i) = (q_l, A^* \bar{q}_i) = (A^T q_i, \bar{q}_l) = 0, \quad (38)$$

поскольку

$$A^T q_i \in \mathcal{P}_{i+1} \subset \mathcal{P}_{m-1} \quad \text{и} \quad \bar{q}_l \perp \mathcal{P}_{m-1}.$$

Аналогичной выкладкой показываем, что

$$(A^T q_l, \bar{q}_i) = 0. \quad (39)$$

Равенства (38) и (39) соответствуют свойству 2) из п. 3.

5. Приведение к ленточной форме. Всякая линейная зависимость между членами последовательности (31) влечет за собой линейную зависимость между соответствующими членами последовательности (32). Отсюда следует, что ширина произвольного слоя в (32) не превосходит ширины одноименного слоя в (31).

Обратимся теперь к теореме 1 в той части, которая касается уравнения (9). Предположим, что для матрицы (20) соотношение

$$g(\hat{A}, \hat{A}^*) = 0 \quad (40)$$

выполнено при некотором $k \ll n$. В этом случае ширина любого слоя в (31) не превосходит k , каков бы ни был вектор v . Это же верно для слоев последовательности (32). Поэтому процесс ортогонализации из п. 4 приводит A к блочно-трехдиагональной форме H , в которой максимальный порядок диагонального блока не превосходит k . Теперь матрицу H можно рассматривать как ленточную с шириной ленты не большей, чем $3k$.

Учитывая блочную структуру матриц $\hat{A}$ и $\hat{A}^*$, получаем, что уравнение (40) равносильно двум соотношениям вида

$$\varphi(A, \bar{A}, A^T, A^*) = 0, \quad \psi(A, \bar{A}, A^T, A^*) = 0. \quad (41)$$

Ниже мы указываем функции φ и ψ для некоторых конкретных значений k . Сейчас же отметим, что рассуждения этого и предыдущего пунктов в совокупности эквивалентны доказательству следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A \in M_n(\mathbb{C})$ – сопряженно-нормальная матрица. Тогда посредством унитарных конгруэнций A может быть приведена к блочно-трехдиагональной форме (8), где диагональные блоки $H_{11}, H_{22}, \dots$ квадратные и их порядки в типичном случае даются последовательными натуральными числами $1, 2, 3, \dots$. Если A удовлетворяет при некотором k системе уравнений (41), то порядки диагональных блоков в матрице (8) не превосходят k .

Эта теорема является аналогом теоремы 1 с унитарными конгруэнциями, заменяющими унитарные подобия.

Проиллюстрируем теорему 2 в части, касающейся системы (41), для наиболее важных частных случаев $k = 1$ и $k = 2$. Заметим, что уравнение (40), приведенное к (41), влечет за собой равенство

$$g(\lambda, \bar{\lambda}) = 0$$

для всякого $\lambda \in \text{Sp}(\hat{A})$. С учетом формулы (21) это означает, что псевдособственные значения $\mu_1, \dots, \mu_n$ матрицы A должны удовлетворять условиям

$$\tilde{\varphi}(\mu, \bar{\mu}) = 0, \quad \tilde{\psi}(\mu, \bar{\mu}) = 0,$$

вытекающим из (41).

При $k = 1$ матрица $\hat{A}$ должна подчиняться соотношению

$$\alpha \hat{A} + \beta \hat{A}^* + \gamma I_{2n} = 0$$

для некоторых комплексных чисел α , β и γ , причем α и β должны быть отличны от нуля. Система (41) для этого случая имеет вид

$$\gamma I_n = 0, \quad \alpha A + \beta A^T = 0,$$

откуда

$$\gamma = 0, \quad |\alpha| = |\beta|.$$

Нетрудно проверить, что для ненулевой матрицы A равенство

$$A^T = e^{i\varphi} A, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

возможно лишь в двух случаях: $A = A^T$ и $A = -A^T$. Итак, соотношение

$$f(\hat{A}, \hat{A}^*) = 0,$$

где f – линейный многочлен, может описывать лишь (комплексные) симметричные и кососимметричные матрицы A .

При $k = 2$ матрица $\hat{A}$ подчиняется соотношению

$$c_{11}\hat{A}^2 + 2c_{12}\hat{A}\hat{A}^* + c_{22}\hat{A}^{*2} + 2c_{10}\hat{A} + 2c_{20}\hat{A}^* + c_{00}I_{2n} = 0,$$

где хотя бы один из коэффициентов c_{11} , c_{12} и c_{22} не равен нулю. Соответствующая система (41) имеет вид

$$c_{11}A\bar{A} + 2c_{12}AA^* + c_{22}A^T A^* + c_{00}I_n = 0, \quad (42)$$

$$2c_{10}A + 2c_{20}A^T = 0. \quad (43)$$

Как было показано выше, равенство (43) при ненулевых c_{10} и c_{20} означает, что A симметрична или кососимметрична. В этом случае уравнение (42) накладывает дополнительные ограничения на ее псевдоспектр.

Если $c_{10} = c_{20} = 0$, то A есть сопряженно-нормальная матрица, псевдосообственные значения которой удовлетворяют уравнению

$$c_{11}\mu^2 + 2c_{12}|\mu|^2 + c_{22}\bar{\mu}^2 + c_{00} = 0.$$

В типичном случае это уравнение описывает центральную кривую второго порядка.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Elsner, Kh. D. Ikramov, “On a condensed form for normal matrices under finite sequences of elementary unitary similarities”, *Linear Algebra Appl.*, **254**:1–3 (1997), 79–98.
- [2] A. Bunse-Gerstner, R. Stöver, “On a conjugate gradient-type method for solving complex symmetric linear systems”, *Linear Algebra Appl.*, **287**:1–3 (1999), 105–123.
- [3] A. George, Kh. D. Ikramov, E. V. Matushkina, W.-P. Tang, “On a QR-like algorithm for some structured eigenvalue problems”, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **16**:4 (1995), 1107–1126.

Х. Д. Икрамов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило

12.07.2006