Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юдин, О многочленах наилучшего приближения,
Матем. заметки, 2007, том 82, выпуск 4, 631–636

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3804>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 06:18:53

О многочленах наилучшего приближения

В. А. Юдин

В пространстве непрерывных функций, заданных на шаре из $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, исследуется множество алгебраических многочленов, наименее уклоняющихся от нуля. Даются оценки его диаметра и размерности.

Библиография: 8 названий.

Через A_q^n обозначим совокупность однородных алгебраических многочленов (а.м.) порядка q от n -переменных $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$A_q^n = \left\{ P(x) : p(x) = \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_n = q} a_\nu x^\nu \right\}, \quad a_\nu = a_{\nu_1 \dots \nu_n} \in \mathbb{R}^n, \quad x^\nu = x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n},$$

а через Φ_q^n – множество всех а.м. порядка не выше q , $\Phi_q^n = \sum_{j=0}^q A_j^n$.

Пусть $xy = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ – скалярное произведение векторов x и y из $\mathbb{R}^n$, $|x| = \sqrt{xx}$; $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ – единичный шар с границей S^{n-1} . Через

$$E_{q-1}(f) = \inf_{p \in \Phi_{q-1}^n} \|f(x) - p(x)\| = \inf_{p \in \Phi_{q-1}^n} \max_{x \in B^n} |f(x) - p(x)| \quad (1)$$

обозначим наилучшее приближение непрерывной на B^n функции $f(x)$ а.м. порядка $q-1$, $q \in \mathbb{N}$. Многочлен p^* называется *многочленом наилучшего приближения* для f , если $E_{q-1}(f) = \|f - p^*\|$. Как и в одномерном случае, он существует, но для размерностей n , $n \geq 2$, имеется принципиальное отличие – отсутствие его единственности. Пусть множество

$$U_{q-1}(f) = \{p \in \Phi_{q-1}^n : \|f - p\| = E_{q-1}(f)\}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

есть совокупность всех а.м. наилучшего приближения для f . Будем исследовать множество (2) для f из A_q^n , иначе говоря, будем изучать многомерные аналоги а.м. Чебышева [1]. Для размерности два для широкого класса а.м. из A_q^2 найдены [2], [3] точные значения (1). Дана [2] классификация мономов $x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}$, $\nu_1 + \nu_2 = q$, для которых имеется единственность а.м. наилучшего приближения. Для однородного гармонического многочлена

$$f(x) = \rho^q (a \cos q\varphi + b \sin q\varphi), \quad \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \varphi = \arctg x_2/x_1,$$

в [2] найдено, что $E_{q-1}(f) = \sqrt{a^2 + b^2}$, $q \in \mathbb{N}$. Определим для него все множество $U_{q-1}(f)$. Без ограничения общности можно считать, что $f = \rho^q \cos q\varphi$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00986) и РФФИ-ГФЕН Китая (грант № 05-0139005).

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы а.м. p из Φ_{q-1}^2 принадлежал $U_{q-1}(f)$, $f = \rho^q \cos q\varphi$, $q \geq 3$, необходимо и достаточно, чтобы он был представим в виде произведения $h \cdot (1 - \rho^2)$, где $h = h(x_1, x_2)$ – произвольный а.м. из Φ_{q-3}^2 , удовлетворяющий внутри B^2 неравенствам

$$\frac{-1 + \rho^q \cos q\varphi}{1 - \rho^2} \leq h(x_1, x_2) \leq \frac{1 + \rho^q \cos q\varphi}{1 - \rho^2}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале установим необходимость. Пусть $p \in U_{q-1}(f)$. Поскольку $E_{q-1}(f) = 1$, то для всех ρ, φ таких, что $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, выполняются неравенства

$$-1 \leq \rho^q \cos q\varphi - P(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \leq 1. \quad (4)$$

В точках

$$M_k \left(\cos \frac{2\pi k}{q}, \sin \frac{2\pi k}{q} \right), \quad M'_k \left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{q}, \sin \frac{(2k+1)\pi}{q} \right),$$

$k = 0, 1, \dots, q-1$ из (4) получаем неравенства $P(M_k) \geq 0$ и $P(M'_k) \leq 0$, $k = 0, \dots, q-1$, из которых вытекает, что тригонометрический полином $P(\cos \varphi, \sin \varphi)$ имеет на периоде $T = [0, 2\pi)$ не менее $2q$ нулей. Поскольку

$$P(\cos \varphi, \sin \varphi) = \sum_{\nu_1 + \nu_2 \leq q-1} C_\nu \cos^{\nu_1} \varphi \sin^{\nu_2} \varphi$$

есть тригонометрический полином порядка $q-1$, то по основной теореме алгебры он имеет на T самое большое $2q-2$ нуля. Следовательно, $P(\cos \varphi, \sin \varphi) \equiv 0$, т.е. а.м. $P(x_1, x_2)$ обращается в нуль на S^1 . Значит, он представим в виде

$$P(x_1, x_2) = (1 - x_1^2 - x_2^2)h(x_1, x_2), \quad h \in \Phi_{q-3}^2. \quad (5)$$

Отметим, что иной вывод представления (5) можно получить из известной [4; с. 72] теоремы Безу для двух переменных.

Подставим (5) в правое неравенство (4), получим

$$\rho^q \cos q\varphi - (1 - \rho^2)h(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \leq 1,$$

откуда выводим левую часть неравенства (3). Аналогично получаем и правую часть (3).

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть а.м. p представим в виде (5). Так как $1 - x_1^2 - x_2^2 \in \Phi_2^2$, а $h \in \Phi_{q-3}^2$, то произведение (5) принадлежит Φ_{q-1}^2 . Из левого неравенства (3) находим

$$f(x_1, x_2) - P(x_1, x_2) \leq \rho^q \cos q\varphi + 1 - \rho^q \cos q\varphi = 1.$$

Аналогично устанавливается и противоположное неравенство. Теорема доказана.

ПРИМЕЧАНИЕ. Нахождение множества $U_{q-1}(f)$ для произвольного а.м. f из A_q^n при размерностях n , $n \geq 3$, – задача трудная, поскольку предварительно нужно вычислить точные значения наилучших приближений, а они найдены [5]–[7] лишь в некоторых частных случаях. Наибольшей популярностью обладают мономы как простейшие f из A_q^n . Складывающаяся на сегодня ситуация следующая: точные

значения (1) для мономов до четвертого порядка включительно известны. Для $n = 3$, с точностью до перестановок переменных, выпишем все мономы пятого и шестого порядков, для которых (1) не найдено:

$$q = 5: \quad x_1^3 x_2 x_3 \text{ и } x_1^2 x_2^2 x_3; \quad q = 6: \quad x_1^4 x_2 x_3 \text{ и } x_1^3 x_2^2 x_3.$$

Условие (3) теоремы трудно проверяемое, поэтому приведем более простые достаточные условия для принадлежности а.м. множеству $U_{q-1}(f)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $n \geq 2$, $q \geq 3$ и а.м. f из A_q^n таков, что $P \equiv 0$ принадлежит $U_{q-1}(f)$. Тогда совокупность а.м. вида

$$(1 - |x|^2)h(x), \quad h \in \Phi_{q-3}^n, \quad \|h\| \leq \max_{x \in S^{n-1}} |f(x)|, \quad (6)$$

также принадлежит $U_{q-1}(f)$.

Действительно, $1 - |x|^2 \in \Phi_2^n$, $h \in \Phi_{q-3}^n$; значит, произведение $p = (1 - |x|^2)h$ входит в Φ_{q-1}^n . Оценим сверху уклонение p от f . При $x \in B^n$ имеем

$$|f(x) - p(x)| \leq |f(x)| + (1 - |x|^2)\|h\|.$$

Так как $f(x)$ – однородный а.м. порядка q , то

$$|f(x)| \leq |x|^q \cdot \max_{x \in S^{n-1}} |f(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно,

$$|f(x) - p(x)| \leq \{|x|^q + 1 - |x|^2\} \max_{x \in S^{n-1}} |f(x)|.$$

При $x \in B^n$ выполнено $|x|^q \leq |x|^2$, поэтому для всех $x \in B^n$

$$|f(x) - p(x)| \leq \max_{x \in S^{n-1}} |f(x)| \leq \|f\|,$$

т.е. $E_{q-1}(f) \leq \|f\|$, но в силу условия $p \equiv 0 \in A_q^n$ имеем $\|f\| = E_{q-1}(f)$, значит, а.м. из (6) являются а.м. наилучшего приближения.

ПРИМЕР 1. Пусть $f = x_1 \cdots x_n$, $n \geq 3$. Применение теории инвариантов [5] дало возможность вычислить

$$E_{n-1}(f) = \|f\| = n^{-n/2}.$$

Из (6) находим, что множество а.м. вида

$$(1 - |x|^2)h(x), \quad h \in \Phi_{n-3}^n, \quad \|h\| \leq n^{-n/2},$$

также является множеством а.м. наилучшего приближения для f .

ПРИМЕР 2. Рассмотрим уже знакомый нам а.м. двух переменных $f = \rho^q \cos q\varphi$, $q \geq 3$. Будем его приближать а.м. из Φ_{q-1}^n на шаре B^n произвольной размерности $n \geq 3$. В [2] показано, что $E_{q-1}(f) = 1$, $n = 2$. Поскольку $B^n \supset B^2$, то $E_{q-1}(f) \geq 1$ для $n \geq 3$. Выбирая $P = 0$, находим, что $E_{q-1}(f) = 1$ для всех размерностей $n \geq 2$. Следовательно, из (6) получаем, что совокупность а.м. вида

$$(1 - |x|^2)h(x), \quad h \in \Phi_{q-3}^n, \quad q \geq 3, \quad n \geq 2, \quad \|h\| \leq 1, \quad (7)$$

также принадлежит $U_{q-1}(f)$.

Перейдем к вопросу: для каких а.м. f из A_q^n множество многочленов наилучшего приближения “самое большое”? Конкретизируя, будем искать f из A_q^n , для которых множество $U_{q-1}(f)$ имеет самый большой диаметр и самую большую размерность. При $q = 1$ наилучшая константа, очевидно, одна и равна

$$\frac{1}{2} \left(\max_{x \in B^n} f + \min_{x \in B^n} f \right).$$

При $q = 2$ также имеет место единственность.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для любого $n \in \mathbb{N}$, для любого $f \in A_2^n$ наилучший многочлен из Φ_1^n (линейная функция) единственен.

Прежде всего, используя четность $f(-x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ ($f(x)$ – квадратичная форма), находим, что для любого а.м.

$$p(x) = c + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = c + bx$$

выполнено

$$\|f(x) - p(x)\| = \|f(x) - p(-x)\|,$$

значит, по неравенству треугольника

$$\|f(x) - p(x)\| \geq \left\| f(x) - \frac{p(x) + p(-x)}{2} \right\| = \|f(x) - c\|.$$

Следовательно, $E_1(f) \geq E_0(f)$, но в силу монотонности наилучших приближений $E_0(f) \leq E_1(f)$. Таким образом, $E_0(f) = E_1(f)$. Так как любое ортогональное преобразование переводит B^n в B^n , то достаточно ограничиться частным случаем – $f(x)$ имеет канонический вид (приведена к главным осям).

Рассмотрим два варианта: f – знакопостоянная квадратичная форма,

$$f = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_m x_m^2, \quad 0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_m, \quad 2 \leq m \leq n,$$

и f – знакопеременная квадратичная форма,

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_m > 0, \quad 2 \leq m \leq n.$$

Рассмотрим первый случай. Так как

$$E_1(f) = \frac{1}{2}(\lambda_m - \lambda_1), \quad \max_{x \in B^n} f(x) = \lambda_m, \quad \min_{x \in B^n} f(x) = \lambda_1,$$

то любой а.м. наилучшего приближения имеет вид

$$p = \frac{\lambda_1 + \lambda_m}{2} + bx.$$

Предположим, что $b \neq 0$, тогда на сфере радиуса ε $f(x) = O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, а линейная функция bx принимает как положительные, так и отрицательные значения. Значит, в окрестности нуля разность $f(x) - p(x)$ принимает значения большие, чем $(\lambda_m - \lambda_1)/2$, противоречие. Подобным же образом, рассматривая разность $f(x) - p(x)$ в окрестностях точек максимума и минимума $f(x)$, устанавливаем справедливость утверждения и во втором случае.

Рассмотрим общий случай $q \geq 3$. Имеет место

ТЕОРЕМА 2. Для любых $n \geq 2, q \geq 3$

$$\sup_{f \in A_q^n} \text{diam} \frac{U_{q-1}(f)}{E_{q-1}(f)} = 2, \quad (8)$$

$$\dim \Phi_{q-3}^n \leq \sup_{f \in A_q^n} \dim U_{q-1}(f) \leq \dim \Phi_{q-1}^n - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в качестве $f(x)$ а.м. из примера 2 $f = \rho^q \cos q\varphi$. Положим в (7) $h_1(x) \equiv 1, h_2(x) \equiv -1, x \in B^n$. Находим

$$p_1(x) = 1 - |x|^2, \quad p_2(x) = -(1 - |x|^2).$$

Вычисляем расстояние между p_1 и p_2 :

$$\max_{x \in B^n} |p_1(x) - p_2(x)| = \max_{x \in B^n} |2(1 - |x|^2)| = 2 = 2E_{q-1}(f),$$

следовательно,

$$\sup_{f \in A_q^n} \text{diam} U_{q-1}(f) \geq 2E_{q-1}(f).$$

Противоположное неравенство очевидно. Для любой непрерывной функции $f(x)$ пусть p_1 и p_2 — а.м. наилучшего приближения из Φ_{q-1}^n . Тогда по неравенству треугольника

$$\|p_1 - p_2\| = \|p_1 - f + f - p_2\| \leq 2E_{q-1}(f).$$

Равенство (8)₁ доказано. Установим справедливость неравенств (8)₂. Снова выберем $f = \rho^q \cos q\varphi$, из (7) находим, что

$$\sup_{f \in A_q^n} \dim U_{q-1}(f) \geq \dim U_{q-1}(\rho^q \cos q\varphi) = \dim \Phi_{q-3}^n.$$

Левая часть неравенства (8)₂ установлена. Правую часть докажем для произвольной непрерывной функции. Вся совокупность мономов $\{x^\nu\}$, $\nu_1 + \dots + \nu_n \leq q-1$, образует линейно-независимую на B^n систему функций размерности

$$\dim \Phi_{q-1}^n = \binom{n+q-1}{q-1}$$

поэтому размерность $U_{q-1}(f)$ не превосходит размерности Φ_{q-1}^n . Эту оценку можно легко на единицу уменьшить. Предположим, что для некоторой функции $f(x)$

$$\dim U_q(f) = \dim \Phi_{q-1}^n.$$

Выберем в $U_{q-1}(f)$ “отрезок” а.м. наилучшего приближения для $f(x)$

$$c_0 + \sum_{1 \leq \nu_1 + \dots + \nu_n \leq q-1} c_\nu x^\nu = c_0 + g(x), \quad a \leq c_0 \leq b, \quad a < b.$$

В силу выпуклости множества $U_{q-1}(f)$ такой выбор всегда возможен. Получается, что для разности $f(x) - g(x)$ имеется несколько констант, наилучшим образом ее приближающих, что невозможно. Теорема доказана.

Автор предполагает, что для $f \in A_q^n$ верхние оценки (8)₂ являются грубыми.

Качественно (без оценок размерности) отсутствие единственности а.м. наилучшего приближения дано в [8].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. Л. Чебышев, *Полное собрание сочинений*, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1948.
- [2] W. B. Gearhart, “Some Chebyshev approximations by polynomials in two variables”, *J. Approx. Theory*, **8**:3 (1973), 195–209.
- [3] В. А. Юдин, “Наименее уклоняющиеся от нуля многочлены”, *Матем. заметки*, **78**:2 (2005), 308–313.
- [4] Р. Уокер, *Алгебраические кривые*, ИЛ, М., 1952.
- [5] Н. Н. Андреев, В. А. Юдин, “Наименее уклоняющиеся от нуля многочлены и кубатурные формулы чебышевского типа”, *Функциональные пространства, гармонический анализ, дифференциальные уравнения*, Тр. МИАН, **232**, Наука, М., 2001, 45–57.
- [6] N. N. Andreev, V. A. Yudin, “Best approximation of polynomials on the sphere and on the ball”, *Recent Progress in Multivariate Approximation*, Proceedings of the 4th International Conference, Witten–Bommerholz, Germany, September 24–29, 2000, Internat. Ser. Numer. Math., **137**, Birkhäuser, Basel, 2001, 23–30.
- [7] Yuan Xu, “On polynomials of least deviation from zero in several variables”, *Experiment. Math.*, **13**:1 (2004), 103–112.
- [8] I. Mairhuber, “On Haar’s theorem concerning Chebyshev approximation problems having unique solutions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7** (1956), 609–615.

В. А. Юдин

Московский энергетический институт

E-mail: vlayudin@mtu-net.ru

Поступило

05.06.2006

Исправленный вариант

07.12.2006