Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Балахнев, Формулы суперпозиции для векторных обобщений уравнения мКдФ, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 4, 501–503

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3806>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 14:07:35

Формулы суперпозиции для векторных обобщений уравнения мКдФ

М. Ю. Балахнев

Исходя из преобразований Беклунда, получены формулы суперпозиции для векторных обобщений уравнения мКдФ.

Библиография: 3 названия.

Рассмотрим *модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза (мКдФ)*:

$$z_t - 6z^2 z_x + z_{xxx} = 0. \quad (1)$$

Прямым вычислением можно получить преобразование Беклунда для мКдФ в виде

$$(z + y)_x = (z - y)\sqrt{\mu^2 + (z + y)^2}. \quad (2)$$

Легко проверить, что это преобразование приводится к классическому. Для этого необходимо выполнить в (2) сначала замену переменных $z \rightarrow z'_x$, $y \rightarrow y'_x$, а затем проинтегрировать по x . Подобрав константу интегрирования должным образом, получим

$$z'_x + y'_x = \mu \sinh(z' - y').$$

Векторно-матричные обобщения классических интегрируемых уравнений впервые были представлены в [1]. В данной работе мы рассмотрим два векторных обобщения мКдФ:

$$z_t + z_{xxx} - 6(z, z)z_x = 0, \quad (3)$$

$$z_t + z_{xxx} - 3(z, z)z_x - 3(z, z_x)z = 0, \quad (4)$$

где $z(t, x)$ есть вектор N -мерного векторного пространства V со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Оба уравнения (3) и (4) в скалярном пределе переходят в (1).

Преобразования Беклунда для (3) и (4) впервые были получены в работе [2] и имеют вид

$$y_x + z_x - (y - z)\sqrt{\mu^2 + (y + z)^2} = 0 \quad (5)$$

для уравнения (3) и

$$y_x + z_x + \mu(y - z) - \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + (y + z)^2}}{(y + z)^2} (y(y + z, y) - z(y + z, z)) = 0 \quad (6)$$

для (4), μ – параметр. Преобразования (5) и (6) в скалярном пределе переходят в (2).

Умножив уравнение (5) или (6) на вектор $\mathbf{y} + \mathbf{z}$, мы получим одно и то же выражение

$$(\sqrt{\mu^2 + (\mathbf{y} + \mathbf{z})^2})_x = (\mathbf{y}, \mathbf{y}) - (\mathbf{z}, \mathbf{z}). \quad (7)$$

Проинтегрируем 7 по x ; имеем

$$\sqrt{\mu^2 + (\mathbf{y} + \mathbf{z})^2} = \tilde{u} - \tilde{v} + c, \quad (8)$$

где $\tilde{u} = D_x^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{y})$, $\tilde{v} = D_x^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{z})$ – квазилокальные переменные, c – константа интегрирования. Последнее выражение можно переписать в виде

$$(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2}((\tilde{u} - \tilde{v} + c)^2 - (\mathbf{y}, \mathbf{y}) - (\mathbf{z}, \mathbf{z}) - \mu^2). \quad (9)$$

Выбор константы c не имеет существенного значения, так как квазилокальные переменные в общем случае определены с точностью до константы. Для простоты дальнейших вычислений будем считать, что $c = \mu$.

Таким образом, преобразование Беклунда (5) равносильно следующей системе, состоящей из векторного и скалярного уравнения:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_x + \mathbf{z}_x &= (\mathbf{y} - \mathbf{z})(\tilde{u} - \tilde{v} + \mu), \\ (\mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \frac{1}{2}((\tilde{u} - \tilde{v} + \mu)^2 - (\mathbf{y}, \mathbf{y}) - (\mathbf{z}, \mathbf{z}) - \mu^2), \end{aligned} \quad (10)$$

а преобразование (6) будет равносильно следующей системе:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_x + \mathbf{z}_x &= \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - (\mathbf{z}, \mathbf{z})}{\tilde{u} - \tilde{v}} (\mathbf{y} + \mathbf{z}) + \frac{\tilde{u} - \tilde{v}}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{z}), \\ (\mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \frac{1}{2}((\tilde{u} - \tilde{v} + \mu)^2 - (\mathbf{y}, \mathbf{y}) - (\mathbf{z}, \mathbf{z}) - \mu^2). \end{aligned} \quad (11)$$

Чтобы получить выражение (2) при переходе к скалярному пределу в векторных частях систем (10) и (11), необходимо исключить сначала в них квазилокальные переменные, используя скалярные уравнения.

Следуя Бианки [3; с. 418], предположим коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{u} & \xrightarrow{\nu} & \mathbf{q} \\ \mu \uparrow & & \uparrow \mu \\ \mathbf{p} & \xrightarrow{\nu} & \mathbf{v} \end{array} \quad (12)$$

где $\mathbf{p}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{q}$ – решения уравнения (3), связанные преобразованием Беклунда (10), т.е. выполнены четыре векторных соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_x + \mathbf{p}_x &= (\mathbf{u} - \mathbf{p})(\tilde{u} - \tilde{p} + \mu), \\ \mathbf{v}_x + \mathbf{p}_x &= (\mathbf{v} - \mathbf{p})(\tilde{v} - \tilde{p} + \nu), \\ \mathbf{q}_x + \mathbf{u}_x &= (\mathbf{q} - \mathbf{u})(\tilde{q} - \tilde{u} + \nu), \\ \mathbf{q}_x + \mathbf{v}_x &= (\mathbf{q} - \mathbf{v})(\tilde{q} - \tilde{v} + \mu) \end{aligned} \quad (13)$$

и четыре скалярных соотношения

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{2}[(\tilde{u} - \tilde{p})^2 + 2\mu(\tilde{u} - \tilde{p}) - (\mathbf{u}, \mathbf{u}) - (\mathbf{p}, \mathbf{p})], \\(\mathbf{v}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{2}[(\tilde{v} - \tilde{p})^2 + 2\nu(\tilde{v} - \tilde{p}) - (\mathbf{v}, \mathbf{v}) - (\mathbf{p}, \mathbf{p})], \\(\mathbf{q}, \mathbf{u}) &= \frac{1}{2}[(\tilde{q} - \tilde{u})^2 + 2\nu(\tilde{q} - \tilde{u}) - (\mathbf{q}, \mathbf{q}) - (\mathbf{u}, \mathbf{u})], \\(\mathbf{q}, \mathbf{v}) &= \frac{1}{2}[(\tilde{q} - \tilde{v})^2 + 2\mu(\tilde{q} - \tilde{v}) - (\mathbf{q}, \mathbf{q}) - (\mathbf{v}, \mathbf{v})].\end{aligned}\tag{14}$$

Исключая из (13) производные, получаем

$$(\mathbf{u} - \mathbf{p})(\tilde{u} - \tilde{p} + \mu) - (\mathbf{v} - \mathbf{p})(\tilde{v} - \tilde{p} + \nu) = (\mathbf{q} - \mathbf{u})(\tilde{q} - \tilde{u} + \nu) - (\mathbf{q} - \mathbf{v})(\tilde{q} - \tilde{v} + \mu).\tag{15}$$

Далее, мы вычисляем скалярные произведения (15) с векторами $\mathbf{p}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{q}$ и получаем четыре уравнения. Выражая из полученных уравнений переменные $\tilde{q}$, $(\mathbf{q}, \mathbf{q})$, $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ и подставляя их в (15), находим формулу суперпозиции для решений векторного уравнения (3):

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} + \frac{(\nu^2 - \mu^2)(\mathbf{u} - \mathbf{v})}{(\tilde{u} - \tilde{v} - \nu + \mu)^2 - (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2}.\tag{16}$$

Аналогично, предположив коммутативность диаграммы (12) для преобразования (11), а также, используя выражения (14), мы получаем формулу суперпозиции для решений (4):

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= \frac{\tilde{u} - \tilde{v}}{\xi^2(\tilde{u} - \tilde{p}) - \eta^2(\tilde{v} - \tilde{p})}(\xi\eta\mathbf{p} - 2(\nu + \mu)(\xi(\tilde{u} - \tilde{p})\mathbf{v} + \eta(\tilde{v} - \tilde{p})\mathbf{u})), \\ \xi &= (\tilde{u} - \tilde{v} + \mu)^2 - (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 - \mu^2, \\ \eta &= (\tilde{u} - \tilde{v} - \nu)^2 - (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 - \nu^2.\end{aligned}\tag{17}$$

Из соотношений (14) легко получить скалярную формулу суперпозиции для решений (3) и (4):

$$\sqrt{\mu^2 + (\mathbf{u} + \mathbf{p})^2} + \sqrt{\nu^2 + (\mathbf{q} + \mathbf{u})^2} = \sqrt{\nu^2 + (\mathbf{v} + \mathbf{p})^2} + \sqrt{\mu^2 + (\mathbf{q} + \mathbf{v})^2}.$$

Отметим также, что, согласно (14), в формулах (16) и (17) можно исключить переменные $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ и $\tilde{p}$ с помощью соотношений

$$\tilde{u} - \tilde{p} + \mu = \sqrt{\mu^2 + (\mathbf{u} + \mathbf{p})^2}, \quad \tilde{v} - \tilde{p} + \nu = \sqrt{\nu^2 + (\mathbf{v} + \mathbf{p})^2}.$$

Автор благодарит В. В. Соколова и В. Е. Адлера за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. И. Свинолулов, В. В. Соколов, “Векторно-матричные обобщения классических интегрируемых уравнений”, *ТМФ*, **100:2** (1994), 214–218.
- [2] М. Ю. Балахнев, “Об одном классе интегрируемых эволюционных векторных уравнений”, *ТМФ*, **142:1** (2005), 13–20.
- [3] L. Bianchi, *Lezioni di Geometria Differenziale*, v. II, Spoerri, Pisa, 1902.

М. Ю. Балахнев

Орловский государственный университет

E-mail: balakhnev@yandex.ru

Поступило

23.03.2006