Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Вьюгин, Неприводимый набор данных Стокса, доставляющий контрпример к обобщенной проблеме Римана–Гильберта, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 2, 305–309

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3807>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 09:11:59

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Неприводимый набор данных Стокса, доставляющий контрпример к обобщенной проблеме Римана–Гильберта

И. В. Вьюгин

1. Введение. Система линейных дифференциальных уравнений с мероморфными коэффициентами

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y, \quad (1)$$

обладает фундаментальной матрицей решений $Y(z)$, которая является многозначной матричной функцией на сфере Римана с выколотыми точками $a_1, \dots, a_n$. Эти точки являются особыми точками коэффициентов системы. Ветвление матрицы $Y(z)$ при обходе по замкнутому пути γ_i , обходящему вокруг особой точки a_i , определяется равенством $\tilde{Y}(z) = Y(z)G_i$. Набор матриц $G_1, \dots, G_n$ определяет представление монодромии χ системы (1)

$$\chi: \pi_1(\bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}, z_0) \rightarrow GL(\mathbb{C}, p). \quad (2)$$

При фиксированной начальной точке обходов z_0 и фиксированных путях γ_i , $i = 1, \dots, n$, представление монодромии задается n образующими матрицами $G_1, \dots, G_n$, соответствующими обходам вокруг особых точек. В случае, когда система (1) имеет только *регулярные* особые точки, т.е. точки, где все решения системы имеют не более чем степенной рост, монодромия χ дает мероморфную классификацию таких систем. В случае, когда особые точки системы иррегулярные, нужно рассматривать *данные Стокса*, дополняющие монодromию. Здесь мы дадим краткое их описание. Подробно о них можно прочитать в [1], а вместе с постановкой задачи Римана–Гильберта для иррегулярных систем – в [2].

В окрестности особой точки, пусть здесь это будет точка $z = 0$, матрица коэффициентов мероморфной системы имеет вид

$$B(z) = \frac{B_{-r-1}}{z^{r+1}} + \dots + B_0 + B_1 z + \dots, \quad (3)$$

где $r \geq 1$ – целое число, называемое *рангом Пуанкаре* системы в точке $z = 0$. Для мероморфной системы (1), имеющей в $z = 0$ иррегулярную особую точку с рангом Пуанкаре $r > 0$, существует формальное решение (4), которое, будучи подставленным в систему, доставляет формальное тождество, хотя ряд, определяющий его разложение, может расходиться. Это формальное решение называют *формальной фундаментальной матрицей* системы. Ее можно задать в следующем виде:

$$\hat{Y}(z) = \hat{F}(z) z^{\hat{\Lambda}} z^{\hat{J}} U e^{Q(z)}, \quad (4)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-6849.2006.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-01004-а).

где $\hat{F}(z)$ – формальный степенной ряд Тейлора, $\hat{\Lambda}$ – целочисленная диагональная матрица, $\hat{J}$ – логарифм формальной монодромии, постоянная матрица, у которой вещественные части собственных значений лежат в полуинтервале $[0, 1)$, U – постоянная матрица специального вида, а $Q(z)$ – диагональная матрица, на диагонали которой стоят многочлены без свободных членов от $z^{-1/s}$ (s – степень разветвления, у системы (5) $s = 2$). Пусть r – максимальная степень многочленов от z^{-1} из $Q(z)$ (в случае, если ранг Пуанкаре системы (1), (3) непонижаем, это r совпадает с рангом Пуанкаре. Тогда, если окрестность особой точки $z = 0$ разбить на $2r$ перекрывающихся секторов S_0^j раствора $\pi/r + \varepsilon$, то в каждом секторе будет существовать настоящее решение $Y_j(z)$, для которого формальное решение $\hat{Y}(z)$ будет асимптотическим. Фундаментальные матрицы решений $Y_i(z)$ в соседних секторах связаны соотношением $Y_{j+1} = Y_j C_0^j$, где C_0^j – постоянная матрица, она называется *матрицей Стокса*. Таким образом, в иррегулярной точке $z = a_i$ определены $2r$ матриц Стокса $C_i^1, \dots, C_i^{2r}$.

Известно, что любое неприводимое представление (2) может быть реализовано как представление монодромии фуксовской системы с особыми точками $a_1, \dots, a_n$ (см. [3]). Для иррегулярных систем, как уже было сказано, роль мероморфного инварианта систем играют данные Стокса, т.е. $\{G_i, C_i^j, S_i^j, Q_i(z)\}$. Основной результат работы [2] (следствие из теоремы 2) утверждает, что неприводимый набор данных Стокса реализуется иррегулярной системой с минимальными порядками полюсов, если только одна из матриц $Q_i(z)$ не содержит нецелых степеней z . В этой работе мы приводим пример, который показывает, что от последнего условия теоремы отказаться нельзя.

2. Неприводимая система с неупрощаемыми коэффициентами.

ТЕОРЕМА 1. *Данные Стокса системы*

$$\frac{dy}{dz} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z^{-10} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z^{-6} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z^{-1} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] y, \quad (5)$$

образуют неприводимый набор и не могут быть реализованы иррегулярной системой с минимальными порядками полюсов матрицы коэффициентов, т.е. образуют контр-пример к обобщенной проблеме Римана–Гильберта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система (5) имеет иррегулярную особую точку $z = 0$ с рангом Пуанкаре 9 и точку $z = \infty$ с рангом Пуанкаре 1. Заметим, что калибровочное преобразование $\tilde{y} = z^{\text{diag}(2, -2)} y$ приводит матрицу коэффициентов системы (5) к виду

$$\frac{d\tilde{y}}{dz} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z^{-6} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z^{-5} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} z^{-1} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z^4 \right] \tilde{y}, \quad (6)$$

с рангом Пуанкаре 5 в точке $z = 0$ и невырожденным главным членом. Невырожденность *главной* (первой ненулевой, т.е. B_{-r-1}) матрицы в разложении Лорана коэффициентов системы гарантирует минимальность ранга Пуанкаре (см. [4]). Главные матрицы разложений в нуле (у преобразованной системы (6)) и в бесконечности (у исходной системы (5)) – невырожденные матрицы, следовательно, ранг Пуанкаре в этих точках далее понизить нельзя. Мы покажем, что системы (5) и (6) формально неприводимы ни в нуле ни в бесконечности, а это влечет их разветвленность в этих точках.

Система называется *приводимой*, если с помощью мероморфного калибровочного преобразования $\tilde{y} = M(z)y$ матрица коэффициентов $\tilde{B} = MB(z)M^{-1} + (dM/dz)M^{-1}$ преобразованной системы примет блочно-верхнетреугольный вид; в ином случае говорят, что система *неприводима*. Аналогичным образом определяется формальная приводимость, с тем изменением, что не требуется сходимости степенных рядов.

ЛЕММА 1. *Если система (1) неприводима при помощи аналитического преобразования, то она неприводима при помощи мероморфного преобразования.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть система (1) приводится мероморфной заменой $\tilde{y} = M(z)y$ к блочно-верхнетреугольному виду. Тогда представим матрицу замены в виде

$$M(z) = V_1 z^{D_1} \dots V_l z^{D_l} W(z), \quad (7)$$

где матрица $W(z)$ – аналитическая и обратимая, $V_1, \dots, V_l$ – постоянные верхнетреугольные, а $D_1, \dots, D_l$ – диагональные целочисленные матрицы. Теперь видно, что аналитическое преобразование $W(z)$ также приводит систему к блочно-верхнетреугольному виду, так как $V(z) = V_1 z^{D_1} \dots V_l z^{D_l}$ – верхнетреугольная и, соответственно, применив к блочно-верхнетреугольной системе преобразование $\tilde{\tilde{y}} = V^{-1}(z)\tilde{y} = W(z)y$, мы снова получим блочно-верхнетреугольную систему.

Теперь покажем, что разложение (7) имеет место. Рассмотрим мероморфную матрицу $M(z)$, выберем D_1 такой, чтобы матрица $M_1(z) = z^{-D_1}M(z)$ была голоморфной и не равной нулю в нуле. Пока $\det M_i(0) = 0$ некоторая линейная комбинация ее строк тривиальная (равна нулю), на каждом шаге будем с помощью элементарных преобразований, задаваемых верхнетреугольной матрицей V_i^{-1} , обнулять первую из строк тривиальной линейной комбинации и получать матрицу $M_{i+1}(z) = z^{-D_{i+1}}V_{i+1}^{-1}M_i(z)$. Очевидно, так мы получим матрицу $M_l(z)$ такую, что $\det M_l(0) \neq 0$.

ЛЕММА 2. Система (6) неприводима при помощи аналитического преобразования.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что аналитическое преобразование можно выбрать в виде

$$\Gamma(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z + o(z).$$

Действительно, пусть свободный член $\Gamma(z)$ не единичный, тогда, либо он верхнетреугольный, либо $\Gamma(z)$ не приводит к верхнетреугольному виду даже главную матрицу в разложении системы, так как главный член в разложении – $\Gamma(0)B_{-r-1}\Gamma^{-1}(0)$, а матрица B_{-r-1} – верхнетреугольная жорданова клетка. Если матрица $\Gamma(0)$ верхнетреугольна, то вместо $\Gamma(z)$ можно взять $\Gamma^{-1}(0)\Gamma(z)$. Рассмотрим два первых коэффициента преобразованной системы

$$\Gamma(z) \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z^{-6} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z^{-5} + \dots \right] \Gamma^{-1}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z^{-6} + \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 1 & c \end{pmatrix} z^{-5} + \dots. \quad (8)$$

Видим, что систему не удастся сделать верхнетреугольной при помощи аналитического преобразования, а значит, она неприводима. Отметим, что она также формально неприводима.

Из формальной неприводимости систем (6) и (5) в точках $z = 0$ и $z = \infty$ соответственно следует, что они разветвлены в этих точках. Для разветвленных систем верно следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 1. С помощью не повышающего ранга Пуанкаре мероморфного преобразования у систем (6) в точке $z = 0$ и у (5) в $z = \infty$ невозможно одновременно привести к верхнетреугольному виду первые два их матричных коэффициента.

ЛЕММА 3. В формальной фундаментальной матрице (4) системы (6) формальный ряд $\hat{F}(z)$ обратим, т.е. $\det \hat{F}(0) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналитическим калибровочным преобразованием можно преобразовать формальную фундаментальную матрицу (4) к виду

$$\hat{Y}(z) = z^D \hat{H}(z) z^{\hat{\Lambda}} z^{\hat{J}} U e^{Q(z)},$$

где $\hat{H}(z)$ – обратимый ряд и D – целочисленная диагональная матрица. Полос матрицы коэффициентов $(d\hat{Y}/dz)\hat{Y}^{-1}$ должен быть выше минимального в тех случаях, когда выполнено неравенство $|d_1 - d_2| \geq 2$, так как уже две первые матрицы в разложении системы

нельзя одновременно привести к треугольному виду. При этом, при $|d_1 - d_2| \leq 1$ матрицу z^D можно пронести через $\hat{H}(z)$. Действительно, для $d_1 = d_2$ это очевидно; теперь пусть $d_1 = d_2 + 1$, тогда либо $\hat{H}(0)$ – верхнетреугольная матрица и $z^D \hat{H}(z) = \hat{H}'(z)z^D$, где $\hat{H}'(z)$ – также обратимый ряд, либо порядок полюса системы (у нижнего левого элемента матрицы коэффициентов) будет выше минимального.

Определим голоморфное расслоение с мероморфной связностью на сфере Римана следующим образом:

$$\{U_0 = \mathbb{C}, U_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus 0, g_{0\infty} = Y_1 Y_2^{-1} = z^{-\text{diag}(2, -2)}\}.$$

Формы связности $\omega_0 = dY_1 Y_1^{-1}$ и $\omega_\infty = dY_2 Y_2^{-1}$ будут совпадать с системами (6) и (5). Расслоение и связность согласуются, так как преобразование $\tilde{y} = z^{\text{diag}(2, -2)} y$ переводит систему (5) в систему (6).

Формальные фундаментальные матрицы $\hat{Y}_0(z)$ и $\hat{Y}_\infty(z)$ систем (6) и (5) в особой точке $z = 0$ и в точке $z = \infty$ соответственно имеют разложение (4). Матричный ряд $\hat{F}(z)$ обратим по лемме 3. Все возможные системы, мероморфно эквивалентные системе (6) в нуле или системе (5) в бесконечности и имеющие минимальный возможный ранг Пуанкаре, делятся на два класса эквивалентности, системы из одного класса отличаются либо аналитическим, либо скалярным преобразованием, либо их композицией. Эти классы отличаются типом матриц нормирований $\hat{\Lambda}_0$ и $\hat{\Lambda}_\infty$ из разложения (4) для точек $z = 0$ и $z = \infty$.

Матрица $\hat{\Lambda}_i$, $i = 0, \infty$, может иметь только два возможных типа: $\text{diag}(m, m)$ или $\text{diag}(m, m + 1)$, иначе матрица коэффициентов будет иметь не минимальный порядок полюса. Таким образом, существует только два неэквивалентных набора нормирований, все остальные отличаются на скалярное слагаемое. Совокупных наборов нормирований для двух точек четыре, но реализуется только два, так как их сумма -2 равна сумме следов матриц $\hat{J}$ для точек $z = 0$ и $z = \infty$ со знаком минус:

$$\begin{aligned} \{\hat{\Lambda}_0 = \text{diag}(m, m), \hat{\Lambda}_\infty = -\text{diag}(m + 1, m + 1)\}, \\ \{\hat{\Lambda}'_0 = \text{diag}(m - 1, m), \hat{\Lambda}'_\infty = -\text{diag}(m + 1, m)\}. \end{aligned}$$

Если первое расслоение F имеет координатное описание

$$\{U_0 = \mathbb{C}, U_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus 0, g_{0\infty} = Y_1 Y_2^{-1} = z^{-\text{diag}(2, -2)}\},$$

то второе расслоение F' имеет описание

$$\begin{aligned} \{U_0 = \mathbb{C}, U_\infty = \overline{\mathbb{C}} \setminus 0, \\ g'_{0\infty} = M_0(z) Y_1 Y_2^{-1} M_\infty^{-1}(z) = z^{\text{diag}(1, 0)} T_1 z^{-\text{diag}(2, -2)} T_2^{-1} z^{\text{diag}(0, -1)}\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $M_0(z)$ – мероморфное в точке $z = 0$ калибровочное преобразование системы (6), не повышающее ее ранга Пуанкаре, $M_\infty(z)$ – такое же преобразование системы (5), но в точке $z = \infty$, а T_1 и T_2 – постоянные невырожденные матрицы. Преобразования $M_0(z)$ и $M_\infty(z)$ в формуле (9) представлены как в $z^{\text{diag}(0, 1)} T_1$ и $z^{\text{diag}(0, 1)} T_2$, потому что преобразование $M_0(z)$ может быть представлено в виде $M_0(z) = V(z) z^{\text{diag}(0, 1)} T_1(z)$ с голоморфно обратимыми в нуле матрицами $V(z)$ и $T_1(z)$. Учитывая то, что показатели в матрице $z^{\text{diag}(0, 1)}$ отличаются на единицу, легко проверить, что можно выбрать T_1 постоянной, а $V(z)$ не изменяет голоморфного типа расслоения, поэтому мы исключили его. Аналогичное представление в бесконечности верно и для $M_\infty(z)$.

Склеивающий коцикл расслоения F' будет иметь вид

$$g'_{0\infty} = z^{\text{diag}(1, 0)} T_1 z^{\text{diag}(2, -2)} T_2^{-1} z^{\text{diag}(0, -1)},$$

где T_1, T_2 – постоянные невырожденные матрицы, $V(z)$ голоморфно-обратима в $\mathbb{C}$, а $W(z)$ голоморфно-обратима в $\overline{\mathbb{C}} \setminus 0$. Тогда по лемме 2 лекции 10 из [3], найдутся такие матричные функции $\Gamma_0(z)$ и $\Gamma_\infty(z)$, голоморфно обратимые в $\overline{\mathbb{C}} \setminus 0$ и $\mathbb{C}$ соответственно, что

$$\Gamma_\infty(z)g'_{0\infty}\Gamma_0^{-1}(z) = T'_1(z)z^{D_0}z^{\text{diag}(2,-2)}z^{-D_\infty}T'^{-1}_2(z),$$

где каждая из матриц D_0 и D_∞ равна либо $\text{diag}(1, 0)$, либо $\text{diag}(0, 1)$. Тогда матрица $D = D_0 + \text{diag}(2, -2) - D_\infty$ – это $\text{diag}(1, -1)$, $\text{diag}(2, -2)$ или $\text{diag}(3, -3)$. Теперь очевидно, что коцикл не эквивалентен единичному ни при каком координатном описании расслоения, следовательно, в силу единственности разложения по лемме Соважа это расслоение не тривиально. Теорема доказана.

В заключение хочу выразить благодарность В. П. Лексину и Р. Р. Гонцову за ряд важных замечаний и их внимание к моей работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 2006. [2] A. A. Bolibruch, S. Malek, C. Mitchi, “On the generalized Riemann–Hilbert problem with irregular singularities”, *Expo. Math.*, **24**:3 (2006), 235–272. [3] А. А. Болибрух, *Фуксовы дифференциальные уравнения и голоморфные расслоения*, МЦНМО, М., 2000. [4] J. Moser, “The order of singularity in Fuchs’ theory”, *Math. Z.*, **72**:1 (1960), 379–398.

И. В. Вьюгин

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: ilya_vyugin@mail.ru

Поступило
28.02.2007