Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Дудов, А. Б. Коноплев, О приближении непрерывного многозначного отображения постоянными многозначными отображениями с шаровыми образами, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 4, 525–529

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3809>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 15:41:22

О приближении непрерывного многозначного отображения постоянными многозначными отображениями с шаровыми образами

С. И. Дудов, А. Б. Коноплев

Показано, что задача о наилучшем равномерном приближении в метрике Хаусдорфа непрерывного многозначного отображения с конечномерными выпуклыми компактными образами постоянными многозначными отображениями с шаровыми в смысле некоторой нормы образами может быть сведена к наглядной геометрической задаче. Эта задача требует построения шарового слоя наименьшей “толщины”, содержащего в себе множество, которое является дополнением выпуклого компакта до содержащего его другого выпуклого компакта.

Библиография: 8 названий.

1. В работе [1] непрерывное многозначное отображение (м.о.) с выпуклыми компактными образами равномерно в метрике Хаусдорфа приближалось постоянными м.о. с выпуклыми образами. В этой заметке мы также рассматриваем задачу, когда для приближения м.о. используются постоянные м.о., но с образами в виде шара некоторой нормы.

Пусть непрерывное на отрезке $[a, b]$ м.о. $F(\cdot)$ имеет выпуклые компактные образы $F(t)$ из действительного конечномерного пространства $\mathbb{R}^p$:

$$F(\cdot): [a, b] \Rightarrow Kv(\mathbb{R}^p),$$

$Kv(\mathbb{R}^p)$ – пространство всех выпуклых компактов из $\mathbb{R}^p$, $n(x)$ – некоторая норма на $\mathbb{R}^p$, $Bn(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(x - y) \leq r\}$ – шар в этой норме с центром в точке x и радиусом r ,

$$h(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} n(a - b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} n(a - b) \right\}$$

– расстояние Хаусдорфа между множествами A и B из $\mathbb{R}^p$.

Рассмотрим задачу

$$\varphi(x, r) \equiv \max_{t \in [a, b]} h(F(t), Bn(x, r)) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p, r \geq 0} \quad (1)$$

наилучшего равномерного на отрезке $[a, b]$ приближения м.о. $F(\cdot)$ постоянными м.о. с образами в виде шаров $Bn(x, r)$. Основная цель – редуцировать задачу (1) к одной наглядной геометрической задаче.

Примем некоторые обозначения. Для выпуклого компакта $A \subset \mathbb{R}^p$ и множества $\Omega_A = \mathbb{R}^p \setminus A$ определим функции

$$R(x, A) = \max_{y \in A} n(x - y), \quad \rho(x, A) = \min_{y \in A} n(x - y),$$

$$P(x, A) = \rho(x, A) - \rho(x, \Omega_A).$$

Свойства этих функций изучались, в частности, в [2]–[4]. Отметим, что они являются выпуклыми и конечными на $\mathbb{R}^p$. Поэтому, учитывая ограничения, накладываемые на м.о. $F(\cdot)$, также выпуклыми и конечными, а значит, и непрерывными [3] являются функции

$$R^F(x) = \max_{t \in [a, b]} R(x, F(t)), \quad P^F(x) = \max_{t \in [a, b]} P(x, F(t)).$$

Под $\partial f(x)$ далее понимаем субдифференциал выпуклой функции $f(\cdot)$ в точке x , $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ – алгебраическая сумма множеств A и B , $o_p = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$.

2. Существование решения задачи (1), как и в [1] для рассматриваемой там задачи, следует из непрерывности м.о. $F(\cdot)$ и компактности его образов. Приведем критерий ее решения.

ТЕОРЕМА 1. *Задача (1) эквивалентна задаче*

$$R^F(x) + P^F(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}. \quad (2)$$

При этом для того, чтобы пара (x^*, r^*) являлась решением задачи (1), а точка x^* – решением задачи (2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$o_p \in \partial R^F(x^*) + \partial P^F(x^*), \quad (3)$$

$$r^* = \frac{R^F(x^*) - P^F(x^*)}{2}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано в [5], справедлива следующая формула расстояния Хаусдорфа между выпуклым компактом A и шаром $Bn(x, r)$:

$$h(A, Bn(x, r)) = \max\{R(x, A) - r, P(x, A) + r\}.$$

Поэтому получаем представление целевой функции экстремальной задачи (1) в виде

$$\varphi(x, r) = \max_{t \in [a, b]} \max\{R(x, F(t)) - r, P(x, F(t)) + r\} = \max\{R^F(x) - r, P^F(x) + r\}. \quad (5)$$

Из определения функций $R^F(\cdot)$ и $P^F(\cdot)$ вытекает $R^F(x) \geq P^F(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}^p$. Поэтому из (5) следует

$$\min_{r \geq 0} \varphi(x, r) = \varphi(x, r(x)) = \frac{R^F(x) + P^F(x)}{2}, \quad r(x) = \frac{R^F(x) - P^F(x)}{2}.$$

Это говорит о том, что задача (1) эквивалентна задаче (2). При этом точка x^* является решением задачи (2) тогда и только тогда, когда она является центром

оптимального шара в задаче (1), а радиус этого шара выражается формулой (4). Как отмечалась выше, функции $R^F(x)$ и $P^F(x)$ являются выпуклыми на $\mathbb{R}^p$. Поэтому в соответствии с известным фактом из выпуклого анализа (см., например, [2; с. 142]) критерием того, что точка x^* является решением задачи (2), является выполнение включения $o_p \in \partial(R^F(x^*) + P^F(x^*))$. Теперь осталось заметить, что поскольку функции $R^F(\cdot)$ и $P^F(\cdot)$ являются выпуклыми и непрерывными, то, по теореме Моро–Рокафеллара [2; с. 78] справедливо равенство

$$\partial(R^F(x) + P^F(x)) = \partial R^F(x) + \partial P^F(x).$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Используя формулы субдифференциалов функций $R(x, A)$ и $P(x, A)$ (см. [2; с. 163] и [5] соответственно) и правила субдифференциального исчисления выпуклых функций (конкретно [2; с. 87]), нетрудно выписать формулы субдифференциалов функций $R^F(x)$ и $P^F(x)$ для исследования задач (1), (2) с помощью соотношения (3).

3. Редуцируем задачу (1) к более наглядной, с геометрической точки зрения, форме.

Обозначим через $F^* = \{F(t) : t \in [a, b]\}$ полный образ м.о. $F(t)$,

$$d = \max_{x, y \in F^*} n(x - y)$$

– его диаметр, $A_\lambda = A + Bn(0_p, \lambda)$ – λ -окрестность множества A , со A – выпуклую оболочку множества A , $F_\lambda(t) = (F(t))_\lambda$.

Нетрудно доказать следующие вспомогательные факты.

ЛЕММА 1. Для любого выпуклого компакта A , положительного λ и $x \in \mathbb{R}^p$ выполняется

$$R(x, A_\lambda) = R(x, A) + \lambda, \quad P(x, A_\lambda) = P(x, A) - \lambda.$$

ЛЕММА 2. Для любых компактов A, B и $x \in \mathbb{R}^p$ выполняется

$$\max\{R(x, A), R(x, B)\} = R(x, \text{co}\{A, B\}).$$

ЛЕММА 3. Если пересечение выпуклых компактов A и B не пусто, то для любой точки $x \in C$, где $C = A \cap B$, выполняется

$$\max\{P(x, A), P(x, B)\} = -\rho(x, \Omega_C).$$

ТЕОРЕМА 2. Для любого $\lambda \geq 4d$ задача (1) эквивалентна задаче

$$R(x, A(\lambda)) - \rho(x, \Omega_{B(\lambda)}) \rightarrow \min_{x \in B(\lambda)}, \quad (6)$$

где

$$A(\lambda) = \text{co}\{F_\lambda(t) : t \in [a, b]\}, \quad B(\lambda) = \cap\{F_\lambda(t) : t \in [a, b]\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, при значениях $\lambda \geq d$ множество $B(\lambda) \neq \emptyset$. Тогда, с помощью лемм 1–3 и учетом условий, наложенных на м.о. $F(\cdot)$, нетрудно показать, что для всех $x \in B(\lambda)$ имеет место равенство

$$R^F(x) + P^F(x) = R(x, A(\lambda)) - \rho(x, \Omega_{B(\lambda)}). \quad (7)$$

Теперь остается показать, что при $\lambda \geq 4d$ множество $B(\lambda)$ содержит все множество решений задачи (2). Возьмем произвольную точку $y_0 \in F^*$ и рассмотрим множество

$$G(y_0) = \{y \in \mathbb{R}^p : R^F(y) + P^F(y) \leq R^F(y_0) + P^F(y_0)\}.$$

Из определений функций $R^F(\cdot)$ и $P^F(\cdot)$ легко следуют неравенства $R^F(y_0) \leq d$, $P^F(y_0) \leq d$, а также $P^F(y) \geq -d$ при любом $y \in \mathbb{R}^p$. Поэтому при любых $t \in [a, b]$ и $z \in F(t)$ имеем

$$\begin{aligned} G(y_0) &\subset \{y \in \mathbb{R}^p : R^F(y) \leq 3d\} = \{y \in \mathbb{R}^p : \max_{z \in F(t)} n(y - z) \leq 3d, t \in [a, b]\} \\ &\subset Bn(z, 3d) = z + Bn(0_p, 3d) \subset F^* + Bn(0_p, 3d). \end{aligned} \quad (8)$$

С другой стороны, при любом $t \in [a, b]$ выполняется

$$F_d(t) \equiv F(t) + Bn(0_p, d) \supset F^*,$$

а следовательно, $F_{4d}(t) \supset F^* + Bn(0_p, 3d)$, и тогда

$$B(4d) \equiv \bigcap \{F_{4d}(t) : t \in [a, b]\} \supset F^* + Bn(0_p, 3d). \quad (9)$$

Учитывая, что множество $G(y_0)$ содержит все множество решений задачи (2), из (8), (9) следует, что и множество $B(4d)$ его также содержит. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из наложенных на м.о. $F(\cdot)$ условий и из определений множеств $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ вытекает, что они являются выпуклыми компактами, причем $B(\lambda) \subset A(\lambda)$. Значение функции $R(x, A(\lambda))$ выражает радиус наименьшего шара с центром в точке x , содержащего в себе множество $A(\lambda)$. А значение функции $\rho(x, \Omega_{B(\lambda)})$ – радиус наибольшего шара с центром в точке $x \in B(\lambda)$, содержащегося в $B(\lambda)$. Поэтому с геометрической точки зрения задача (6) требует построения шарового слоя наименьшей “толщины” с центром из множества $B(\lambda)$, содержащего в себе множество $A(\lambda) \cap \Omega_{B(\lambda)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Оценка сверху по включению для множества решений задачи (2) в виде множества $F^* + Bn(0_p, 3d)$, полученная в процессе доказательства, является грубой. С другой стороны, как показывают примеры, могут быть решения, которые не содержатся в F^* .

4. В качестве примера рассмотрим м.о. вида

$$F(t) = (1 - t)A + tB, \quad t \in [0, 1], \quad (10)$$

где A и B – некоторые выпуклые компакты из $\mathbb{R}^p$.

Нетрудно показать, что в данном случае $F^* = \text{co}\{A, B\}$ и при всех $x \in \mathbb{R}^p$ выполняется

$$R^F(x) = \max\{R(x, A), R(x, B)\}, \quad P^F(x) = \max\{P(x, A), P(x, B)\}. \quad (11)$$

Рассуждения, аналогичные приведенным при доказательстве теоремы 2, для м.о. вида (10) с учетом формул (11) приводят нас к справедливости следующего факта.

ТЕОРЕМА 3. Задача (1) для м.о. вида (10) при всех значениях $\lambda \geq 4d$ эквивалентна задаче

$$R(x, \text{co}\{A_\lambda, B_\lambda\}) - \rho(x, \Omega_{A_\lambda \cap B_\lambda}) \rightarrow \min_{x \in A_\lambda \cap B_\lambda}.$$

Непосредственно из теоремы 3 получаем

СЛЕДСТВИЕ. Если $B \subset A$, то задача (1) для м.о. вида (10) при $\lambda \geq 4d$ эквивалентна задаче

$$R(x, A_\lambda) - \rho(x, \Omega_{B_\lambda}) \rightarrow \min_{x \in B_\lambda}.$$

Из теоремы 1 и леммы 1 следует, что задача (1) эквивалентна соответствующей задаче о приближении м.о. $F_\lambda(\cdot)$ при $\lambda \geq 0$.

Теорема 2 фактически говорит о том, что при исследовании задачи (1) принципиальное значение имеет задача

$$R(x, A) - \rho(x, \Omega_B) \rightarrow \min_{x \in B} \quad (12)$$

о построении минимального шарового слоя, содержащего множество, представляющего собой дополнение заданного выпуклого компакта B до другого выпуклого компакта A , содержащего B . Для случая $A = B$ задача (12) становится задачей о построении шарового слоя наименьшей “толщины”, содержащего границу выпуклого компакта. Результаты по ее исследованию см. в [6] и в библиографии, указанной в [7], для случая, когда $n(x) = \|x\|$ – евклидова норма, а для произвольной нормы – в [8]. Если $n(x)$ – евклидова норма, то, как показано в [7], эта задача эквивалентна задаче наилучшего приближения в метрике Хаусдорфа выпуклого компакта A евклидовым шаром.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. С. Никольский, “Об аппроксимации непрерывного многозначного отображения постоянными многозначными отображениями”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика*, 1990, № 1, 76–80.
- [2] Б. Н. Пшеничный, *Выпуклый анализ и экстремальные задачи*, Наука, М., 1980.
- [3] В. Ф. Демьянов, Л. В. Васильев, *Недифференцируемая оптимизация*, Наука, М., 1981.
- [4] С. И. Дудов, “Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния”, *Матем. заметки*, **61**:4 (1997), 530–542.
- [5] С. И. Дудов, И. В. Златорунская, “Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы”, *Матем. сб.*, **191**:10 (2000), 13–38.
- [6] Т. Боннезен, В. Фенхель, *Теория выпуклых тел*, Фазис, М., 2002.
- [7] М. С. Никольский, Д. Б. Силин, “О наилучшем приближении выпуклого компакта элементами аддиала”, *Оптимальное управление и дифференциальные уравнения*, Тр. МИАН, № 211, 1995, 338–354.
- [8] С. И. Дудов, “Об оценке границы выпуклого компакта шаровым слоем”, *Изв. Саратов. ун-та. Новая сер.*, 1:2 (2001), 64–75.

С. И. Дудов

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: dudovSI@info.sgu.ru

Поступило

17.11.2006

А. Б. Коноплев

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: alexey.konoplev@gmail.com