Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Атабекян, О периодических группах нечетного периода $n \geq 1003$, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 4, 495–500

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3810>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 12:30:34

О периодических группах нечетного периода $n \geq 1003$

В. С. Атабекян

В работе, опираясь на теорему Адяна–Лысенка о том, что для любого нечетного числа $n \geq 1003$ существует бесконечная группа, каждая собственная подгруппа которой содержится в циклической подгруппе порядка n , доказывается континуальность множества групп с указанным свойством (для данного n). Далее доказывается, что при $m \geq k \geq 2$ и нечетном $n \geq 1003$ m -порожденная свободная n -периодическая группа аппроксимируется как группами указанного типа, так и k -порожденной свободной n -периодической группой, а также что она не удовлетворяет условиям максимальности и минимальности для нормальных подгрупп.

Библиография: 13 названий.

Первое доказательство существования конечно-порожденной простой бесконечной группы было дано Хигманом [1] в 1951 г.

Периодическое произведение показателя n (для нечетного $n \geq 665$), введенное Адяном [2], помимо многих важных применений позволяет построить новые обширные классы периодических простых групп. В частности, в [3] доказывается, что в многообразии B_n всех периодических групп данного нечетного показателя вида $n = k \cdot s$, где k и s взаимно просты, $k \geq 665$ и $s > 1$, можно указать бесконечное число различных конечно-порожденных простых групп. Этим впервые был дан положительный ответ на проблему 23 из монографии [4]: может ли многообразие, отличное от многообразия всех групп, содержать бесконечное количество неизоморфных небелевых простых групп?

Новый тип бесконечных простых периодических групп ограниченного периода был построен Ольшанским в работе [5]. А именно, в многообразии B_n периодических групп данного простого показателя $n > 10^{75}$ была построена 2-порожденная простая группа, все собственные подгруппы которой циклические. Условие простоты показателя n в [6] было заменено на нечетность.

Позже Адян и Лысенко усилили результаты работ [5], [6], доказав, что подобные примеры групп существуют и в многообразиях B_n с значительно меньшими показателями. В их совместной работе [7] для любого нечетного числа $n \geq 1003$ строится бесконечная 2-порожденная группа, каждая собственная подгруппа которой содержится в некоторой циклической подгруппе порядка n . Группы из [7] тоже являются простыми (см. лемма 1).

В отличие от работы [8], которая основана на [5], [6], настоящая заметка базируется на работе [7]. Наша цель – доказать теоремы 1–4, усиливающие соответствующие результаты из [8].

ТЕОРЕМА 1. *В многообразии B_n данного нечетного показателя $n \geq 1003$ существует континуум неизоморфных простых групп, все собственные подгруппы которых циклические.*

ТЕОРЕМА 2. *Для каждого нечетного $n \geq 1003$ и для любого $t \geq 2$ t -порожденная свободная группа $B(t, n)$ многообразия B_n не удовлетворяет условиям минимальности и максимальности для нормальных подгрупп.*

Для нечетных $n > 10^{80}$ справедливость теорем 1, 2 была доказана автором в [8] (см. также [9; теорема 28.7]).

При нечетных $n \geq 665$ существование континуума неизоморфных групп в многообразии B_n впервые было доказано в [10]. Необходимо отметить также, что при $t \geq 2$ и нечетных $n = k \cdot s$, где $k \geq 665$ и $s > 1$, а также при $t > 65$ и нечетных $n \geq 665$ бесконечно убывающие и возрастающие цепи нормальных подгрупп в $B(t, n)$ ранее были найдены Адяном в [11; теорема VI.3.9] и в [10]. Для сравнения следует заметить, что согласно результатам Адяна, Кострикина, Зелманова, Холла–Хигмана и гипотезе Шрайера (справедливость которой следует из классификации конечных простых групп), в $B(t, n)$ при нечетных $n \geq 665$ невозможны бесконечные цепочки нормальных подгрупп конечного индекса. Из этих же соображений следует, что при нечетных $n \geq 665$ группы $B(t, n)$ не финитно аппроксимируемы. Теоремы 3 и 4 касаются аппроксимационных свойств свободных периодических групп и для нечетных $n > 10^{80}$ были доказаны автором в [8] (см. также [9]).

ТЕОРЕМА 3. *Для всякого нечетного $n \geq 1003$ и для любого $t \geq 2$ t -порожденная свободная n -периодическая группа $B(t, n)$ (вполне) аппроксимируется простыми группами, все собственные подгруппы которых циклически.*

ТЕОРЕМА 4. *Для всякого нечетного $n \geq 1003$ и для любых $t \geq k \geq 2$ t -порожденная свободная n -периодическая группа $B(t, n)$ (вполне) аппроксимируется свободной n -периодической группой $B(k, n)$.*

ЛЕММА 1. *Для любого нечетного $n \geq 1003$ группа Γ из [7] является простой группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если Y принадлежит нормализатору $\langle X \rangle$, где X – произвольный элемент группы Γ , то $|\langle X, Y \rangle| \leq n^2$, т.е. $\langle X, Y \rangle$ – циклическая группа. Значит, если $\langle X \rangle$ – нормальная подгруппа, то X принадлежит центру группы Γ . С другой стороны, согласно [11; теорема VI.3.1] (все леммы используемые при доказательстве этого утверждения справедливы и для Γ), централизатор любого неединичного элемента X группы Γ есть циклическая группа порядка n , т.е. центр Γ тривиален. Лемма доказана.

Пусть I – произвольное подмножество натуральных чисел и $1, 2 \notin I$. Для данного I построим 2-порожденную группу Γ^I с циклическими подгруппами, вводя некоторые изменения в определении групп Γ_α из [7]. Для $\alpha = 0, 1, 2$ через Γ_α^I

обозначим группу Γ_α . Предположим, что α – произвольное натуральное число и группы Γ_α^I уже определены для любого $\beta < \alpha$. Если $\alpha \notin I$, то $\Gamma_\alpha^I = \Gamma_\alpha$. Если же $\alpha \in I$, то мы буквально повторим определение определяющих соотношений группы Γ_α из [7], в словах (1.2) и (1.3) поменяв лишь местами последние буквы a и b , т.е. слово (1.2) заменим на слово $C^{200}AC^{200}A^2 \dots A^{n-1}C^{200}b$, а слово (1.3) заменим на слово $C^{300}AC^{300}A^2 \dots A^{n-1}C^{300}a$. Группа Γ^I строится из групп Γ_α^I точно так, как группа Γ из Γ_α . Поэтому справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2. *Для любого I группа Γ^I бесконечна, а все ее максимальные подгруппы – циклические группы порядка n .*

Через N_I обозначим нормальное замыкание множества определяющих соотношений группы Γ^I .

ЛЕММА 3. *Если $I \neq J$, то $N_I \neq N_J$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α – наименьшее натуральное число, принадлежащее в точности одному из множеств I или J . Допустим $\alpha \in I$ и $\alpha \notin J$. Тогда в группе Γ^I выполняется соотношение $C^{200}AC^{200}A^2 \dots A^{n-1}C^{200}b$, а в Γ^J – соотношение $C^{200}AC^{200}A^2 \dots A^{n-1}C^{200}a$. Предположив, что $N_I = N_J$, немедленно получаем, что $a \stackrel{\Gamma^I}{=} b$, вопреки бесконечности группы Γ^I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Число различных гомоморфизмов из свободной группы Γ_0 на Γ^I счетно, следовательно, для данного I равенство $\Gamma^I \cong \Gamma_0/N_J$ может выполняться не более, чем для счетного множества индексов J . С другой стороны, множество всевозможных подмножеств I множества натуральных чисел континуально. Значит, по лемме 3 количество неизоморфных групп Γ^I континуально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. По лемме 3 $B(m, n)$ содержит континуум различных нормальных подгрупп. Значит, среди них есть нормальная подгруппа N , которая не совпадает с нормальным замыканием любого своего конечного подмножества. Тогда, если

$$N = \{w_1, w_2, \dots, w_n, \dots\},$$

то ряд нормальных замыканий множеств

$$\{w_1\} \subset \{w_1, w_2\} \subset \dots \subset \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subset \dots$$

не может стабилизироваться.

Через M обозначим пересечение всех нормальных подгрупп N_I по всевозможным I : $M = \bigcap_{I \subset \mathbb{N}} N_I$. Группа Γ_0/M обладает континуум неизоморфными простыми факторгруппами

$$\Gamma^I \cong \Gamma_0/M/N_I/M.$$

С другой стороны, для каждого пересечения $M_k = N_{I_1} \cap N_{I_2} \cap \dots \cap N_{I_k}$, где k – натуральное число, группа Γ_0/M_k вкладывается в прямое произведение $\Gamma^{I_1} \times \Gamma^{I_2} \times \dots \times \Gamma^{I_k}$ простых групп и поэтому может иметь лишь конечное множество факторгрупп. Таким образом, для любого натурального числа k и для любых $I_1, I_2, \dots, I_k$ можно найти такую подгруппу $N_{I_{k+1}}$, что

$$M_k = N_{I_1} \cap N_{I_2} \cap \dots \cap N_{I_k} \supsetneq N_{I_1} \cap N_{I_2} \cap \dots \cap N_{I_k} \supset N_{I_{k+1}},$$

ибо в противном случае для некоторой подгруппы $M_k = N_{I_1} \cap N_{I_2} \cap \dots \cap N_{I_k}$ и для любого I будет выполняться

$$\Gamma^I \cong \Gamma_0/M_k \cap N_I/N_I/M_k \cap N_I \cong \Gamma_0/M_k/N_I/M_k,$$

вопреки вышесказанному. Теорема 2 доказана.

Чтобы доказать теорему 3, нам понадобится следующее усиление леммы 7.3 из [7].

ЛЕММА 4. *Для любого натурального числа $\tau > 2$ всякая нециклическая подгруппа Δ группы Γ содержит нециклическую подгруппу вида $T\langle A, Z^{-1}BZ \rangle T^{-1}$, где A и B – элементарные периоды некоторых рангов γ и β , причем $\gamma > \tau$ и $\beta > \tau$. Более того, A , B и Z можно выбрать так, чтобы коммутатор $(A^d, Z^{-1}B^dZ)$ был сопряжен в Γ некоторому слову C или C^{-1} , где $C \in \bigcup_{\alpha > \tau} \overline{\Psi}_\alpha$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X \stackrel{\Gamma}{=} TA^iT^{-1}$ и $TYT^{-1} \stackrel{\Gamma}{=} Z^{-1}B^jZ$, где A и B – минимизированные периоды рангов γ и β соответственно, $\gamma \leq \beta$. Считая, что i и j – собственные делители n , выберем s и t так, чтобы $186 < si, tj < (n+1)/2 - 148$. Тогда в силу лемм 3.2 и 7.2 [7] коммутатор $(X^s, Y^t) \stackrel{\Gamma}{=} T(A^{si}, Z^{-1}B^{tj}Z)T^{-1}$ сопряжен некоторому минимизированному элементарному периоду D некоторого ранга $\delta \geq \beta + 1$. В силу леммы 6.6 [7] X и (X^s, Y^t) не могут порождать циклическую подгруппу. Заменив X на $X_1 = Y$, а Y – на коммутатор $Y_1 = (X^s, Y^t)$ и повторив предыдущие рассуждения, мы получим, что в одной из подгрупп, сопряженных группе $\langle X_1, Y_1 \rangle_\Gamma$ (очевидно $\langle X, Y \rangle_\Gamma \supset \langle X_1, Y_1 \rangle_\Gamma$), содержится подгруппа вида $\langle A_1, Z_1^{-1}B_1Z_1 \rangle$, где $A_1 = B$ и $B_1 = D$ – минимизированные элементарные периоды рангов γ_1 и β_1 , причем $\beta_1 = \delta > \beta = \gamma_1$. Еще раз повторив описанные шаги, получим, что Δ содержит нециклическую подгруппу вида $T\langle A_2, Z^{-1}B_2Z \rangle T^{-1}$, где A_2 и B_2 – минимизированные элементарные периоды рангов γ_2 и β_2 , причем $\beta_2 > \gamma_2 \geq \beta_1 > \gamma_1$. Применяя описанную процедуру $\tau - \beta$ раза, получим, что Δ содержит нециклическую подгруппу вида $T\langle A', Z^{-1}B'Z \rangle T^{-1}$, где A' и B' – минимизированные элементарные периоды рангов γ' и β' , причем $\tau < \gamma'$ и $\tau < \beta'$. Далее, повторив доказательство леммы 7.3 [7], мы достигнем указанного результата.

Пусть j – произвольное фиксированное неотрицательное целое число. Вводя некоторые изменения в определении групп Γ_α и Γ , индукцией по рангу $\alpha \geq 0$ определим новые группы $\Gamma_\alpha(j)$ и $\Gamma(j)$. Для рангов $\alpha \leq j$ определение группы $\Gamma_\alpha(j)$ совпадает с определением группы $B(2, n, \alpha)$, т.е. $\Gamma_\alpha(j) \rightleftharpoons B(2, n, \alpha)$. Если же $\alpha > j$ и для любого β , где $0 \leq \beta < \alpha$, группы $\Gamma_\beta(j)$ уже определены, то группа $\Gamma_\alpha(j)$ строится с помощью групп $\Gamma_\beta(j)$ точно так, как с помощью групп Γ_β строится группа Γ_α ; а определение группы $\Gamma(j)$ с помощью групп $\Gamma_\alpha(j)$ повторяет определение группы Γ . Из определений групп $\Gamma_\alpha(j)$ и $\Gamma(j)$ следует, что для них справедливы как все леммы из [11] и [7], которые верны для Γ_α и Γ , так и лемма 4, доказанная выше.

ЛЕММА 5. *Для любого $j \geq 0$ группа $\Gamma(j)$ – бесконечная 2-порожденная группа, всякая собственная подгруппа которой содержится в циклической подгруппе порядка $n \geq 1003$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tau > j$, а Δ – произвольная нециклическая подгруппа группы $\Gamma(j)$. В силу леммы 4 подгруппа Δ содержит нециклическую подгруппу вида $T\langle A, Z^{-1}BZ\rangle T^{-1}$, где A и B – элементарные периоды некоторых рангов γ и β , причем $\gamma > \tau$ и $\beta > \tau$. Так как $\tau > j$, можем заключить, что в группе $\Gamma(j)$ выполняются соотношения (1.2) и (1.3), в которых участвуют указанные периоды A и B . Таким образом, $a, b \in T^{-1} \cdot \Delta \cdot T$.

ЛЕММА 6. Для всех $j \geq 0$ группы $\Gamma(j)$ являются бесконечными и простыми.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Простота группы $\Gamma(j)$ следует из леммы 1, а бесконечность следует из предложения 5.1 [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [12]. Скажем, что группа A вполне аппроксимируется группами класса $\mathbf{K}$, если для каждого конечного набора неединичных элементов из группы A существует эпиморфизм из A на некоторую группу из класса $\mathbf{K}$, при котором образы данного конечного набора неединичны.

ЛЕММА 7. Для любого натурального числа k группа $B(2, n)$ вполне аппроксимируется семейством групп $\{\Gamma(j)\}_{j=k}^{\infty}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – произвольное слово в алфавите $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ и $X \neq 1$ в $B(2, n)$. В силу VI.2.4 [11] можно считать, что $X \in \mathcal{A}_{\tau}$, где $\tau > \partial(X)$. Тогда $X \in \mathcal{R}_{\alpha}$ для любого α . Следовательно, по лемме IV.2.16 [11] $X \stackrel{\alpha}{\sim} \Lambda$. Таким образом, предположив, что $j > \tau$, можно утверждать, что $X \stackrel{\alpha}{\sim} \Lambda$ для любого α во всех группах $\Gamma(j)$, так как группы $\Gamma(j)$ и группа $B(2, n)$ имеют одинаковое множество слов $\mathcal{A}_{\tau}$ при $j > \tau$. Значит, при естественном эпиморфизме из $B(2, n)$ в $\Gamma(j)$ образ слова X неединичный.

Если $X_1, X_2, \dots, X_k$ – произвольная конечная последовательность неединичных в группе $B(2, n)$ слов, то, выбрав $\tau > \max\{\partial(X_1), \partial(X_2), \dots, \partial(X_k)\}$ и $j > \tau$, можем заключить, что $X_i \neq 1$ в $\Gamma(j)$ для всех i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3 следует из лемм 5, 6 и 7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_l$ – произвольная конечная последовательность неединичных в группе $B(m, n)$ слов. Обозначим $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ и $\{a, b\}$ множества свободных образующих групп $B(m, n)$, $B(k, n)$ и $B(2, n)$ соответственно. Согласно теореме Ширваняна [13] существует вложение $S: B(m, n) \rightarrow B(2, n)$, а по лемме 7 можно выбрать такое натуральное число j , что при естественном эпиморфизме $E: B(2, n) \rightarrow \Gamma(j)$ выполняется $E(S(X_i)) \neq 1$ для всех i . Так как $S(a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1}) \neq 1$, то за счет увеличения j можно предположить, что $E(S(a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1})) \neq 1$. По лемме 5 тогда группа $\Gamma(j)$ порождается элементами $E(S(a_1))$ и $E(S(a_2))$, т.е. гомоморфизм $E \circ S: B(m, n) \rightarrow \Gamma(j)$ является эпиморфизмом. Пусть $G: B(k, n) \rightarrow \Gamma(j)$ – такой эпиморфизм, что $G(b_i) = E(S(a_i))$ для $i = 1, \dots, k$, и $F: B(m, n) \rightarrow B(k, n)$ – такой эпиморфизм, что $F(a_i) = b_i$ для $i = 1, \dots, k$, а при $i > k$ $F(a_i) = V_i$, где $G(V_i) = E(S(a_i))$. Тогда, очевидно, $G \circ F = E \circ S$ и поэтому $F(X_i) \neq 1$ для всех i . Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. Higman, “A finitely generated infinite simple group”, *J. London Math. Soc.*, **26** (1951), 61–64.
- [2] С. И. Адян, “Периодическое произведение групп”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН, **142**, 1976, 3–21.
- [3] С. И. Адян, “О простоте периодических произведений групп”, *Докл. АН СССР*, **241**:4 (1978), 745–748.
- [4] Х. Нейман, *Многообразия групп*, Мир, М., 1969.
- [5] А. Ю. Ольшанский, “Группы ограниченного периода с подгруппами простых порядков”, *Алгебра и логика*, **21**:5 (1982), 553–618.
- [6] В. С. Атабекян, С. В. Иванов, *Два замечания о группах ограниченного периода*, деп. в ВИНТИ 243-B87.
- [7] С. И. Адян, И. Г. Лысенко, “О группах, все собственные подгруппы которых конечные циклические”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:5 (1991), 933–990.
- [8] В. С. Атабекян, *Об аппроксимации и подгруппах свободных периодических групп*, деп. в ВИНТИ 5380-B86.
- [9] А. Ю. Ольшанский, *Геометрия определяющих соотношений в группах*, Наука, М., 1989.
- [10] С. И. Адян, “Нормальные подгруппы свободных периодических групп”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:5 (1981), 931–947.
- [11] С. И. Адян, *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, Наука, М., 1975.
- [12] N. Gupta, F. Levin, “Generation groups of certain product varieties”, *Arch. Math.*, **30**:2 (1978), 113–117.
- [13] В. Л. Ширванян, “Вложение группы $B(\infty, n)$ в группу $B(2, n)$ ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:1 (1976), 190–208.

В. С. Атабекян

Ереванский государственный университет, Армения

E-mail: avarujan@ysu.am

Поступило

03.02.2006