Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. П. Стунжас, Локальные особенности хордовых множеств, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 2, 286–304

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3812>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 13:48:46

Локальные особенности хордовых множеств

Л. П. Стунжас

В статье классифицированы локальные особенности хордовых множеств – огибающих двухпараметрических семейств прямых, соединяющих пары точек на двух гладких кривых в $\mathbb{R}^3$; и предъявлены геометрические критерии наличия у хордового множества той или иной локальной особенности.

Библиография: 3 названия.

1. Основные результаты. Рассмотрим A и B – C^∞ -гладкие кривые в $\mathbb{R}^3$. Прямые, соединяющие точку на A с точкой B , образуют, вообще говоря, двухпараметрическое семейство. Огибающую этого семейства назовем *хордовым множеством* A и B .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Очевидно, что хордовое множество является проективным инвариантом, т.е. что проективное преобразование, переводящее пару кривых A_1 и B_1 в пару A_2 и B_2 , переводит хордовое множество A_1 и B_1 в хордовое множество A_2 и B_2 .

Рассмотрим ростки Φ и Ψ C^∞ -гладких кривых в $\mathbb{R}^3$. Ростки отображений в нуле $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, задающих на Φ и Ψ гладкую параметризацию, обозначим соответственно $\phi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ (таким образом, базовыми точками ростков будут $\phi(0)$ и $\psi(0)$), параметры на ростках – p и q . В $\mathbb{R}^3$ введем аффинные координаты (x, y, z) , координатные функции отображений $\phi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ обозначим соответственно $x_\phi, y_\phi, z_\phi, x_\psi, y_\psi, z_\psi$. Очевидно, что хордовое множество можно описать как множество критических значений отображения $\Omega_{\phi, \psi}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, заданного формулой

$$(p, q, \lambda) \mapsto \lambda \phi(p) + (1 - \lambda) \psi(q).$$

Как видно из этой формулы, образы точек $(p, q, 0)$ лежат на Ψ ; $(p, q, 1)$ – на Φ . Касательные прямые в базовых точках обозначим соответственно l_Φ и l_Ψ ; соприкасающиеся плоскости – ρ_Φ и ρ_Ψ .

Будем говорить, что пара (Φ, Ψ) ростков кривых в $\mathbb{R}^3$

- находится в *положении* $\mathcal{U}_1$, если l_Φ и l_Ψ параллельны или пересекаются, ρ_Φ содержит l_Ψ и ρ_Ψ содержит l_Φ ;
- находится в *положении* $\mathcal{U}_2$, если l_Φ проходит через $\psi(0)$ и ρ_Φ содержит l_Ψ ; или наоборот, если l_Ψ проходит через $\phi(0)$ и ρ_Ψ содержит l_Φ ;
- находится в *положении* $\mathcal{U}_3$, если l_Φ проходит через $\psi(0)$ и ρ_Ψ содержит l_Φ ; или наоборот, если l_Ψ проходит через $\phi(0)$ и ρ_Φ содержит l_Ψ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Будем называть пару (Φ, Ψ) ростков кривых в $\mathbb{R}^3$ *уплощенной*, если она находится в положении $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ или $\mathcal{U}_3$.

Пусть E – некоторая точка $\mathbb{R}^3$. Можно естественным образом отобразить $\mathbb{R}^3 \setminus E \rightarrow \mathbb{R}P^2$, сопоставив каждой точке A прямую EA (соответствующее отображение назовем π_E). Для описания роста хордового множества полезно рассмотреть образы ростков кривых при проекции из его базовой точки.

Рассмотрим тройку – “пара ростков Φ и Ψ и точка E ” такую, что E коллинеарно с $\phi(0)$ и $\psi(0)$; $E \notin \Phi, \Psi$; кривизны ростков ненулевые и ограничения $\pi_E|_\Phi$ и $\pi_E|_\Psi$ регулярны. Будем говорить, что тройка имеет *тип*:

- K_0 , если $\pi_E(\Phi)$ и $\pi_E(\Psi)$ – гладкие трансверсальные ростки кривых;
- K_1 , если $\pi_E(\Phi)$ и $\pi_E(\Psi)$ – гладкие касающиеся ростки кривых с различными два-струями;
- K_2 , если у $\pi_E(\Phi)$ и $\pi_E(\Psi)$ совпадают два-струи, но не совпадают три-струи, и пара (Φ, Ψ) не является уплощенной;
- K_3 , если у $\pi_E(\Phi)$ и $\pi_E(\Psi)$ совпадают три-струи, но не совпадают четыре-струи, и пара (Φ, Ψ) не является уплощенной.

Рассмотрим тройку “пара ростков Φ и Ψ и точка E ” такую, что E коллинеарно с $\phi(0)$ и $\psi(0)$, $E \in \Phi$, кривизны ростков ненулевые и ограничение $\pi_E|_\Psi$ регулярно. Будем говорить, что тройка имеет *тип*:

- I_0 , если l_Φ и l_Ψ скрещиваются;
- I_1 , если l_Φ и l_Ψ параллельны или пересекаются и ρ_Φ не содержит l_Ψ ;
- I_2 , если ρ_Φ содержит l_Ψ , у Ψ ненулевое кручение в базовой точке, и пара (Φ, Ψ) не является уплощенной;
- I_3 , если $\psi(0)$ лежит на l_Φ , и пара (Φ, Ψ) не является уплощенной.

Аналогично для точек на Ψ . Также будем говорить, что тройка Φ, Ψ и E имеет *тип* L , если $E \notin \Phi, \Psi$, ровно один росток проецируется из точки E нерегулярно, в базовых точках кривизны обоих ростков ненулевые и пара (Φ, Ψ) не является уплощенной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Множество нулей уравнения $a^2 + b^3 = 0$ в $\mathbb{R}^3$ с координатами (a, b, c) называется *ребром возврата*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Множество коэффициентов (a, b, c) , соответствующее полиномам $x^4 + ax^2 + bx + c$ с кратными вещественными корнями, называется *ласточкиным хвостом*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Множество коэффициентов (a, b, c) , соответствующее полиномам $x^4 + ax^2 + bx + c$ с кратными корнями, называется *пополненным ласточкиным хвостом*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. Пополненный ласточкин хвост является объединением ласточкиного хвоста с половинкой параболы $\{(\tau, 0, \tau^2/4)\}$, соответствующей многочленам с двумя парами кратных чисто мнимых корней.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Образ отображения $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(t, u) \mapsto (u, t^2, t^3u)$, называется *сложенным зонтиком*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Множество нулей уравнения $c^2 - a^2b^3 = 0$ называется *пополненным сложенным зонтиком*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.9. Пополненный сложенный зонтик есть объединение сложенного зонтика с лучом $\{(0, -\tau^2, 0)\}$.

Цель настоящей работы – доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1.10. *Типичная пара ростков и любая точка на соединяющей их базовые точки прямой имеет один из вышеназванных типов. Росток хордового множества в любой точке может быть переведен ростком диффеоморфизма $\mathbb{R}^3$ в росток одного из следующих множеств:*

- *гладкой поверхности в случае, если у исходных ростков и базовой точки ростка хордового множества тип K_1, I_1 либо L ;*
- *ребра возврата, в случае типа K_2 ;*
- *ласточкиного хвоста в случае типа K_3 ;*
- *гладкой кривой в случае типа I_0 ;*
- *пополненного сложенного зонтика в случае типа I_2 ;*
- *пополненного ласточкиного хвоста в случае типа I_3 .*

Если у тройки тип K_0 , то точка не лежит на хордовом множестве пары ростков.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.11. Слова “типичная пара ростков” означают здесь следующее. Назовем пару гладких отображений $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ *нормальной*, если росток первого и росток второго отображения в произвольных точках находятся в одном из описанных выше положений относительно любой точки, коллинеарной базовым точкам ростков. Теорема утверждает, что множество нормальных пар является открытым и всюду плотным в топологии Уитни подмножеством декартового квадрата гладких отображений $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Говоря неформально, хордовое множество общей пары замкнутых кривых в $\mathbb{R}^3$ можно “склеить” из описанных выше локальных особенностей.

2. Вспомогательные определения и результаты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Рассмотрим гладкое отображение $\tau: M \rightarrow N$ гладких многообразий M, N . Сопоставим упорядоченному набору натуральных чисел (индексу) I подмножество прообраза Σ^I (называемое *множеством Тома–Боардмана*) по следующему рекурсивному по длине индекса принципу: пусть $\hat{I}$ и I – индексы, причем $I = \hat{I}k$ (т.е. индекс I получается приписыванием справа к индексу $\hat{I}$ числа k), и $\Sigma^{\hat{I}}$ – подмногообразие M (о том, как определять Σ^I , если это условие не выполнено, – см. [1; начиная со с. 43]). Тогда Σ^I есть множество таких точек $\Sigma^{\hat{I}}$, что в них у отображения τ , ограниченного на $\Sigma^{\hat{I}}$, ранг не менее, чем на k , меньше максимального.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Индексу $I = i_1 \dots i_k$ можно также сопоставить подмножество $\mathfrak{S}^I$ пространства струй $J^k(M, N)$ k -го порядка отображений $M \rightarrow N$. Принадлежность точки прообраза к Σ^I равносильна тому, что ее образ при k -струйном расширении исходного отображения лежит на $\mathfrak{S}^I$. См. [1; с. 40].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Если струйное расширение отображения трансверсально многообразиям $\mathfrak{S}^I$ для всех I , то отображение называется *хорошим*.

Введем обозначение

$$\hat{\Sigma}^I = \{(p, q, \lambda) \in \Sigma^I \mid \lambda \neq 0, 1\}.$$

Для исследования хордового множества рассмотрим набор ростков отображений, сопоставляющих значениям параметров p и q точку произведения пространств k -струй ростков отображений $\phi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$. Обозначим это отображение $\hat{\Omega}_{\phi,\psi,k}$ или $\hat{\Omega}_{\phi,\psi}$; произведение пространств k -струй ростков отображений $\phi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ будем называть *пространством разделенных k -струй* отображения $\hat{\Omega}_{\phi,\psi}$.

Одним из основных средств классификации типичных отображений является сильная теорема трансверсальности (Тома): *пусть M^m – замкнутое многообразие и C – замкнутое подмногообразие пространства струй $J^k(M, N)$. Тогда множество отображений $f: M \rightarrow N$, k -струйные расширения которых трансверсальны к C , есть открытое всюду плотное относительно топологии Уитни множество в пространстве всех гладких отображений из M в N .*

Доказательство теоремы см. [1; с. 37].

Для исследования хордовых множеств понадобится следующее похожее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.4 (теорема трансверсальности для пары отображений). *Пусть $M_1^{m_1}$, $M_2^{m_2}$ – замкнутые многообразия и C – замкнутое подмногообразие прямого произведения пространства струй $J^k(M_1, N_1) \times J^k(M_2, N_2)$. Тогда множество пар отображений $f: M_1 \rightarrow N_1$, $g: M_2 \rightarrow N_2$, k -струйные расширения которых трансверсальны к C , есть открытое всюду плотное относительно топологии Уитни множество в прямом произведении пространств всех гладких отображений из M_1 в N_1 и из M_2 в N_2 .*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Похожий результат доказан в [3] для случая, когда M_1 и M_2 – экземпляры одного и того же многообразия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам понадобятся две леммы, доказательства которых также есть в [1].

ЛЕММА 2.6. *Рассмотрим гладкое отображение $F: A \times E \rightarrow B$ прямого произведения гладких многообразий A и E в гладкое многообразие B .*

Будем рассматривать F как семейство отображений F_ε многообразия A в B , зависящих от точки ε многообразия E как от параметра. Пусть отображение F трансверсально к подмногообразию C многообразия B . Тогда почти каждый член $F_\varepsilon: A \rightarrow B$ соответствующего F семейства трансверсален к C , причем в случае замкнутого многообразия C множество ε , соответствующих трансверсальным к C отображениям F_ε , открыто.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. “Почти каждый” здесь означает “принадлежащий дополнению к некоторому множеству меры нуль $\mathfrak{F}$ ”, причем в случае замкнутого C множество $\mathfrak{F}$ также замкнутое.

ЛЕММА 2.8. *Пусть f – гладкое отображение из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Зафиксируем в $\mathbb{R}^m$ и в $\mathbb{R}^n$ системы координат и рассмотрим гладкое отображение $\mathfrak{U}$ прямого произведения пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^s$ в пространство k -струй отображения $J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, определенное формулой*

$$(x, \varepsilon) \mapsto (j_x^k f_\varepsilon), \quad \text{где} \quad f_\varepsilon = f + \varepsilon_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_s e_s$$

($e_1, \dots, e_s$ – всевозможные произведения мономов степени не выше k от координат точки x из $\mathbb{R}^m$ на базисные векторы в $\mathbb{R}^n$).

Тогда образ дифференциала $\mathfrak{U}$ в любой точке есть все касательное пространство к $J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Пусть C – гладкое подмногообразие в $B = J^k(\mathbb{R}^{m_1}, \mathbb{R}^{n_1}) \times J^k(\mathbb{R}^{m_2}, \mathbb{R}^{n_2})$. Применим к произведению отображений из леммы 2.8 лемму 2.6 (в которой $A = \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$, $E = \mathbb{R}^{s_1} \times \mathbb{R}^{s_2}$, $F(x_1, x_2; \varepsilon_1, \varepsilon_2) = (j_{x_1}^k, j_{x_2}^k)$).

По лемме 2.6 для почти всех пар $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ отображение $F_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ трансверсально к C . Выбрав ε_1 и ε_2 достаточно малыми, мы получим сколь угодно близкую к (f, g) пару $(f_{\varepsilon_1}, g_{\varepsilon_2}): \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, k -струйное расширение которой трансверсально к C .

Аналогичные рассуждения можно провести, заменив $\mathbb{R}^{m_i}$ на M_i и $\mathbb{R}^{n_i}$ на N_i .

Знаком “ $\wedge$ ” будем обозначать векторное произведение. Так, если a и b – векторы в плоскости $\mathbb{R}^2$, в которой выбрана некоторая аффинная система координат Oxy , то $a \wedge b$ означает определитель матрицы $|ab| = x_a y_b - x_b y_a$. Если a и b – векторы в пространстве $\mathbb{R}^3$, в котором выбрана некоторая аффинная система координат $Oxyz$, то $a \wedge b$ означает вектор $(y_a z_b - z_a y_b, z_a x_b - z_b x_a, x_a y_b - x_b y_a)$. Если a , b и c – вектора в пространстве $\mathbb{R}^3$, в котором выбрана некоторая аффинная система координат $Oxyz$, то $a \wedge b \wedge c$ означает определитель матрицы

$$|abc| = (y_a z_b - z_a y_b)x_c + (z_a x_b - z_b x_a)y_c + (x_a y_b - x_b y_a)z_c.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. Если у ростка гладкой кривой в $\mathbb{R}^3$ ненулевое кручение в базовой точке, то росток поверхности, замечаемой множеством касательных прямых к ростку кривой с базовой точкой в базовой точке ростка кривой, переводится ростком диффеоморфизма $\mathbb{R}^3$ в ребро возврата. Если у ростка кривой в $\mathbb{R}^3$ нулевое кручение, а векторы первой, второй и четвертой производных ростка кривой в базовой точке не компланарны, то росток поверхности, замечаемой множеством касательных прямых к ростку кривой с базовой точкой в базовой точке ростка кривой, переводится ростком диффеоморфизма $\mathbb{R}^3$ в сложенный зонтик.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [2].

3. Доказательство основной теоремы.

ЛЕММА 3.1. Точка не лежит на хордовом множестве, если и только если она находится в положении K_0 относительно ростков. В окрестности точек, находящихся в положении I_0 , хордовое множество диффеоморфно гладкой кривой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие вырожденности дифференциала отображения $\Omega_{\phi, \psi}$ в точке (p, q, λ) равносильно равенству нулю якобиана

$$D_1(p, q, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda x'_\phi(p) & (1-\lambda)x'_\psi(q) & x_\phi(p) - x_\psi(q) \\ \lambda y'_\phi(p) & (1-\lambda)y'_\psi(q) & y_\phi(p) - y_\psi(q) \\ \lambda z'_\phi(p) & (1-\lambda)z'_\psi(q) & z_\phi(p) - z_\psi(q) \end{vmatrix} = \lambda(1-\lambda)\widehat{D}(p, q) = 0, \quad (3.1)$$

где

$$\widehat{D}(p, q) = \begin{vmatrix} x'_\phi(p) & x'_\psi(q) & x_\phi(p) - x_\psi(q) \\ y'_\phi(p) & y'_\psi(q) & y_\phi(p) - y_\psi(q) \\ z'_\phi(p) & z'_\psi(q) & z_\phi(p) - z_\psi(q) \end{vmatrix} = \phi'(p) \wedge \psi'(q) \wedge (\phi(p) - \psi(q)).$$

Якобиан D_1 равняется 0 либо при $(1 - \lambda)\lambda = 0$, либо при компланарных векторах $\phi', \psi', \phi - \psi$. Первому случаю соответствуют точки кривых (т.е. точки, находящиеся относительно ростков в положениях I), второму – точки прямых, соединяющие точки с не скрещивающимися касательными прямыми, т.е. точки, находящиеся в положениях K_1, K_2, K_3 и L .

В окрестности точек, находящихся в положении I_0 , хордовое множество состоит в точности из точек исходных кривых и, следовательно, диффеоморфно гладкой кривой.

ЛЕММА 3.2. *Для ростков кривых общего положения в точках, где λ не равно 0 или 1, ранг якобиана отображения $\Omega_{\phi, \psi}$ не менее двух.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если λ не равно 0 или 1, ранг отображения $\Omega_{\phi, \psi}$ меньше двух при коллинеарных векторах $\phi', \psi', \phi - \psi$.

Коллинеарным векторам по лемме о рангах [1; с. 30] в пространстве разделенных 1-струй отображения $\hat{\Omega}_{\phi, \psi}$ соответствует множество коразмерности 4. По теореме 2.4 эти условия не выполняются ни в одной точке прообраза отображения $\hat{\Omega}_{\phi, \psi}$, построенного по кривым общего положения.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Из утверждения леммы следует, что множества $\hat{\Sigma}^I$, где I содержит числа больше 1, для кривых общего положения пусты.

Далее, рассмотрим росток хордового множества в окрестности точки $\Omega_{\phi, \psi}(0, 0, \lambda)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Рассмотрим пять трехмерных векторов a, b, c, d, e . Коразмерность подмножества в $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, соответствующего компланарным тройкам*

$$a, b, c, \quad a, b, d, \quad a, c, e,$$

равна 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

ЛЕММА 3.5. *В случае общего положения пара ростков кривых (Φ, Ψ) не является уплощенной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку, как было показано в доказательстве леммы 3.2, условия

$$\phi'(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) = \psi'(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) = 0, \quad \phi(0) - \psi(0) \neq 0$$

задают множество коразмерности 4, достаточно рассмотреть случай

$$\phi'(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) \neq 0 \quad \text{или} \quad \psi'(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) \neq 0.$$

Несложно видеть, что при этом условии пара ростков кривых (Φ, Ψ) является уплощенной, если и только если выполняется равенство

$$\phi'(0) \wedge \psi'(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) = 0 \tag{3.2}$$

и удовлетворяется либо пара уравнений

$$\phi''(0) \wedge \psi'(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) = 0, \tag{3.3}$$

$$\phi'(0) \wedge \psi''(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) = 0, \tag{3.4}$$

либо пара уравнений

$$\phi'(0) \wedge \phi''(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) = 0, \quad (3.5)$$

$$\psi'(0) \wedge \psi''(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) = 0. \quad (3.6)$$

Применив к векторам

$$\phi(0) - \psi(0), \quad \phi'(0), \quad \psi'(0), \quad \psi''(0), \quad \phi''(0)$$

предложение 3.4, получим, что условия (3.2), (3.3) и (3.4) задают в пространстве разделенных два-струй отображения $\hat{\Omega}_{\phi, \psi}$ множество коразмерности 3. По теореме 2.4 эти условия не выполняются ни в одной точке прообраза отображения $\hat{\Omega}_{\phi, \psi}$, построенного по кривым общего положения.

Применив к векторам

$$\phi(0) - \psi(0), \quad \phi'(0), \quad \psi'(0), \quad \phi''(0), \quad \psi''(0)$$

предложение 3.4, мы докажем то же самое для тройки уравнений (3.2), (3.5) и (3.6).

ЛЕММА 3.6. *Для пары ростков общего положения множество $\hat{\Sigma}^1$ есть гладкое подмногообразие прообраза $\Omega_{\phi, \psi}$. В окрестности образов точек из $\hat{\Sigma}^1 \setminus \hat{\Sigma}^{11}$ хордовое множество есть гладкая поверхность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение равносильно тому, что множество пар (p, q) , при которых касательные к кривым в точках $\phi(p)$ и $\psi(q)$ пересекаются, представляет собой росток гладкой кривой при исходных ростках общего положения.

Если для некоторых (p_0, q_0) функция $\hat{D}$ гладкая, равна 0 и имеет невырожденный дифференциал, то по теореме о неявной функции ее нуль в окрестности точки (p_0, q_0) является гладким подмногообразием коразмерности 1, т.е. кривой.

Так как $(0, 0, \lambda) \in \hat{\Sigma}^1$, выполняется равенство (3.2), а значит, по лемме 3.5 в случае общего положения

$$\text{либо } \phi''(0) \wedge \psi'(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) \neq 0, \quad \text{либо } \phi'(0) \wedge \psi''(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) \neq 0,$$

значит,

$$d\hat{D}(p, q) = (\phi''(p) \wedge \psi'(q) \wedge (\phi(p) - \psi(q))) dp + (\phi'(p) \wedge \psi''(q) \wedge (\phi(p) - \psi(q))) dq \neq 0.$$

Первое утверждение леммы доказано.

Хордовое множество есть образ Σ^1 при отображении $\Omega_{\phi, \psi}$. Дифференциал ограничения $\Omega_{\phi, \psi}$ на $\hat{\Sigma}^1 \setminus \hat{\Sigma}^{11}$ невырожден, следовательно, его образ – гладкая поверхность.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Заметим, что в случае ростков общего положения можно определить либо функцию $P(q)$ (если не выполняется условие (3.3)) при помощи тождества $\hat{D}(P(q), q) \equiv 0$, либо $Q(p)$ (если не выполняется условие (3.4)) при помощи тождества $\hat{D}(p, Q(p)) \equiv 0$. Если у ростков ϕ_1 и ϕ_2 совпадают k -струи, то у ростков отображений $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, заданных формулой

$$(\lambda, q) \mapsto \lambda \phi_i(P_i(q)) + (1 - \lambda) \psi(q)$$

(P_i – функции, построенные по паре ростков $\Phi_i, \Psi, i = 0, 1$), совпадают $(k-1)$ -струи.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. Рассмотрим росток гладко параметризованной кривой в $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{s}(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{s}'(0) \neq 0,$$

и росток гладкой функции

$$f(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(0) \neq 0.$$

У кривой $\{\mathbf{s}(t)\}$ нулевая кривизна в нуле (т.е. $\mathbf{s}'(0) \wedge \mathbf{s}''(0) = 0$), если и только если

$$\mathbf{u}'(0) \wedge \mathbf{s}'(0) = 0, \quad \text{где } \mathbf{u}(t) = \mathbf{s}(t) + f(t)\mathbf{s}'(t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение немедленно вытекает из равенства

$$\mathbf{u}'(0) \wedge \mathbf{s}'(0) = (\mathbf{s}'(0) + f(0)\mathbf{s}''(0) + f'(0)\mathbf{s}'(0)) \wedge \mathbf{s}'(0) = f(0)\mathbf{s}''(0) \wedge \mathbf{s}'(0).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9. Рассмотрим росток гладко параметризованной кривой в $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{s}(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{s}'(0) \wedge \mathbf{s}''(0) \neq 0,$$

и росток гладкой функции

$$f(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(0) \neq 0.$$

У кривой $\{\mathbf{s}(t)\}$ нулевое кручение в нуле (т.е. $\mathbf{s}'(0) \wedge \mathbf{s}''(0) \wedge \mathbf{s}'''(0) = 0$), если и только если

$$\mathbf{u}''(0) \wedge \mathbf{s}'(0) \wedge \mathbf{s}''(0) = 0, \quad \text{где } \mathbf{u}(t) = \mathbf{s}(t) + f(t)\mathbf{s}'(t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение немедленно вытекает из равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{u}''(0) \wedge \mathbf{s}'(0) \wedge \mathbf{s}''(0) &= (\mathbf{s}''(0) + f''(0)\mathbf{s}(0) + f'(0)\mathbf{s}'(0) + f(0)\mathbf{s}'''(0)) \wedge \mathbf{s}'(0) \wedge \mathbf{s}''(0) \\ &= f(0)\mathbf{s}'''(0) \wedge \mathbf{s}''(0) \wedge \mathbf{s}'(0). \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.10. Для пары ростков общего положения $\widehat{\Sigma}^{11}$ представляет собой росток гладкой кривой в прообразе $\Omega_{\phi, \psi}$. В окрестности образов точек из $\widehat{\Sigma}^{11} \setminus \widehat{\Sigma}^{111}$ хордовое множество гладким преобразованием переводится в ребро возврата.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если точка (p, q, λ) лежит на $\widehat{\Sigma}^{11}$, то в ней выполняются уравнение (3.2) и

$$D_2(p, q, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda x'_\phi(p) & (1-\lambda)x'_\psi(q) & x_\phi(p) - x_\psi(q) \\ \lambda y'_\phi(p) & (1-\lambda)y'_\psi(q) & y_\phi(p) - y_\psi(q) \\ \frac{\partial \widehat{D}}{\partial p} & \frac{\partial \widehat{D}}{\partial q} & \frac{\partial \widehat{D}}{\partial \lambda} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.7)$$

для любых аффинных координат $Oxyz$.

Рассмотрим (3.7) как уравнение на λ .

Поскольку $\widehat{D}$ не зависит от λ , данное уравнение линейное. Выразим $D_2(p, q, \lambda)$ через λ и производные функций ϕ и ψ :

$$\begin{vmatrix} \lambda x'_\phi(p) & (1-\lambda)x'_\psi(q) & x_\phi(p) - x_\psi(q) \\ \lambda y'_\phi(p) & (1-\lambda)y'_\psi(q) & y_\phi(p) - y_\psi(q) \\ \phi''(p) \wedge \psi'(q) \wedge (\phi(p) - \psi(q)) & \phi'(p) \wedge \psi''(q) \wedge (\phi(p) - \psi(q)) & 0 \end{vmatrix}.$$

Обозначим

$$|\psi'(q)(\phi(p) - \psi(q))|_{xy} := \begin{vmatrix} x'_\psi(q) & x_\phi(p) - x_\psi(q) \\ y'_\psi(q) & y_\phi(p) - y_\psi(q) \end{vmatrix},$$

$$|\phi'(q)(\phi(p) - \psi(q))|_{xy} := \begin{vmatrix} x'_\phi(p) & x_\phi(p) - x_\psi(q) \\ y'_\phi(p) & y_\phi(p) - y_\psi(q) \end{vmatrix}.$$

Решением линейного уравнения могут быть одна точка, пустое множество или вся прямая. Чтобы реализовался последний вариант, свободный член уравнения должен быть нулевым, т.е. произведение

$$\phi''(p) \wedge \psi'(q) \wedge (\phi(p) - \psi(q)) |\psi'(q)(\phi(p) - \psi(q))|_{xy}$$

должно равняться нулю.

Если $\psi'(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) = 0$, то выполняется уравнение (3.3). Если $\psi'(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) \neq 0$, то аффинные координаты $Oxyz$ можно выбрать так, чтобы проекции векторов $\phi(0) - \psi(0)$ и $\psi'(0)$ на плоскость Oxy вдоль оси Oz были не коллинеарны. Тогда определитель $|\psi'(q)(\phi(p) - \psi(q))|_{xy}$ не равняется нулю, следовательно, и в этом случае также выполняется уравнение (3.3).

Другое необходимое условие того, что у линейного уравнения бесконечно много корней, состоит в том, что коэффициент при λ равен нулю, поэтому произведение

$$\phi''(p) \wedge \psi'(q) \wedge (\phi(p) - \psi(q)) |\psi'(q)(\phi(p) - \psi(q))|_{xy}$$

также нулевое.

Если $\phi'(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) = 0$, то выполняется уравнение (3.4). Если $\phi'(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) \neq 0$, аффинные координаты $Oxyz$ можно выбрать так, чтобы проекции векторов $\phi(0) - \psi(0)$ и $\phi'(0)$ на плоскость Oxy вдоль оси Oz были не коллинеарны. Тогда определитель $|\phi'(q)(\phi(p) - \psi(q))|_{xy}$ не равняется нулю, следовательно, и в этом случае также выполняется уравнение (3.4).

Как отмечалось ранее, условия (3.2), (3.3) и (3.4) выполняются одновременно только для уплощенных пар (Φ, Ψ) , значит, по лемме 3.5 в случае общего положения для каждой прямой из хордового множества, заданной значениями параметров (p, q) , существует не более одного λ такого, что точка (p, q, λ) лежит на $\hat{\Sigma}^{11}$. Это позволяет нам локально определить функцию от двух переменных Λ при помощи тождества $D_2(p, q, \Lambda(p, q)) \equiv 0$. При этом p при $|\phi'(q)\phi(p) - \psi(q)|_{xy} \neq 0$ и q при $|\psi'(q)\phi(p) - \psi(q)|_{xy} \neq 0$ локально являются гладкими параметрами на образе $\hat{\Sigma}^{11} \setminus \hat{\Sigma}^{111}$. По теореме о неявной функции функция Λ гладкая.

Из того, что $\hat{\Sigma}^1$ является гладким подмногообразием прообраза Ω , а также из гладкости функции Λ вытекает первое утверждение леммы.

Обозначим через s следующее отображение $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$p \mapsto \Lambda(p, Q(p))\phi(p) + (1 - \Lambda(p, Q(p)))\psi(Q(p)).$$

Образ этого отображения обозначим S . Как показывают предыдущие выкладки, $\Omega_{\phi, \psi}(\hat{\Sigma}^{11}) \subset S$. Поскольку $(0, 0, \lambda) \in \hat{\Sigma}^{11}$, ранг дифференциала ограничения $\Omega_{\phi, \psi}$ на Σ^1 равен единице в точке $\Omega_{\phi, \psi}(0, 0, \lambda)$, значит, образы любых двух ростков кривых на Σ^1 , проходящих через исследуемую точку и трансверсальных ядру дифференциала

$\Omega_{\phi,\psi}$, касаются друг друга. Так как исследуемая точка лежит на дополнении к Σ^{111} , $\widehat{\Sigma}^{11}$ трансверсально ядру дифференциала $\Omega_{\phi,\psi}$, значит, ее образ касается образов кривых, заданных уравнениями $p = \text{const}_1$, $q = \text{const}_2 = Q(\text{const}_1)$, т.е. прямых $\lambda\phi(p) + (1 - \lambda)\psi(Q(p))$.

Таким образом, часть хордового множества, соответствующая параметрам (p, q) в малой окрестности $(0, 0)$, может быть описана как множество точек, лежащих на прямых, касательных к образу Σ^{11} .

Этот геометрический факт можно интерпретировать следующим образом: пусть для некоторого k

$$\mathbf{s}'(0) = \mathbf{s}''(0) = \dots = \mathbf{s}^{(k)}(0) = 0, \quad \mathbf{s}^{(k+1)}(0) \neq 0.$$

Тогда

$$\phi(t) \equiv \mathbf{s}(t) + \mu(t)\mathbf{v}(t), \quad \psi(Q(t)) \equiv \mathbf{s}(t) + \nu(t)\mathbf{v}(t),$$

где $\mathbf{v}(t) := (k! \mathbf{s}'(t))/t^k$, а $\mu(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$ – некие ростки гладких функций. В частности, если $(0, 0, \lambda) \in \widehat{\Sigma}^{11} \setminus \Sigma^{111}$, то

$$\phi(t) \equiv \mathbf{s}(t) + \mu(t)\mathbf{s}'(t), \quad \psi(Q(t)) \equiv \mathbf{s}(t) + \nu(t)\mathbf{s}'(t).$$

У S в исследуемой точке ненулевая кривизна, поскольку в противном случае по предположению 3.8 векторы $\phi'(0)$, $\psi'(0)$ и $\phi(0) - \psi(0)$ были бы коллинеарны.

Докажем, что у S в случае исходных кривых общего положения имеется невырожденное кручение. Предположим противное, тогда по предположению 3.9, примененному к образу S и Φ , векторы ϕ' и ϕ'' компланарны с вектором $\phi - \psi$, следовательно, выполняется уравнение (3.5). То же самое можно сказать и про векторы ψ' и ψ'' , следовательно, выполняется уравнение (3.6). Условия (3.2), (3.5) и (3.6) выполняются одновременно только уплощенных пар (Φ, Ψ) , значит, по лемме 3.5 в случае общего положения кручение ненулевое. По предположению 2.9 в окрестности рассматриваемой точки хордовое множество переводится диффеоморфизмом $\mathbb{R}^3$ в ребро возврата.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.11. Пару ростков Φ , Ψ гладких кривых в $\mathbb{R}^3$ будем называть *центральной* относительно точки E , если отображения $\pi_E|_\Phi$ и $\pi_E|_\Psi$ регулярны и $\pi_E(\Phi) = \pi_E(\Psi)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.12. Для центральной относительно точки E пары ростков кривых Φ и Ψ прообраз E при $\Omega_{\phi,\psi}$ принадлежит Σ^{111} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\Omega_{\phi,\psi}(p, Q(p), \Lambda(p, Q(p))) \equiv E$, а значит,

$$d\Omega_{\phi,\psi}|_{\{(p, Q(p), \Lambda(p, Q(p)))\}} \equiv 0.$$

ЛЕММА 3.13. Если $\Omega_{\phi,\psi}(0, 0, \lambda)$ находится в положении K_2 относительно Φ и Ψ , то $(0, 0, \lambda) \in \Sigma^{11}(\Omega_{\phi,\psi})$. Если $\Omega_{\phi,\psi}(0, 0, \lambda)$ находится в положении K_3 относительно Φ и Ψ , то $(0, 0, \lambda) \in \Sigma^{111}(\Omega_{\phi,\psi})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что если ростки Φ , Ψ находятся в положении K_2 относительно некоторой точки E , то существует такой росток $\widehat{\Psi}$, что у Ψ и $\widehat{\Psi}$ совпадают два-струи, и пара Φ , $\widehat{\Psi}$ является центральной относительно E . Также существует отображение $\widehat{\psi}$, образ которого есть $\widehat{\Psi}$, и два-струи $\widehat{\psi}$ и ψ совпадают. По предположению 3.12 прообраз E при $\Omega_{\phi,\widehat{\psi}}$ принадлежит множеству Σ^{11} отображения $\Omega_{\phi,\widehat{\psi}}$.

Очевидно, что у отображений $\Omega_{\phi, \psi}$ и $\Omega_{\phi, \hat{\psi}}$ совпадают два-струи. Значит, по замечанию 2.2 прообраз E при $\Omega_{\phi, \psi}$ принадлежит множеству Σ^{11} отображения $\Omega_{\phi, \psi}$. Аналогично для K_3 и Σ^{111} .

ЛЕММА 3.14. *В случае ростков ϕ, ψ , находящихся в общем положении, не существует такой точки E , что у кривых $\pi_E(\Phi)$ и $\pi_E(\Psi)$ совпадают четыре-струи.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пара четыре-струй ростков ϕ и ψ задается четыре-струями их координатных функций. Следовательно, размерность пространства четыре-струй равна $5 \cdot 6 = 30$.

Очевидно, что четыре-струи $\pi_E(\Phi)$ и $\pi_E(\Psi)$ совпадают, если и только если существует такое отображение $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, что у $\hat{\psi}$ и ψ совпадают четыре-струи и пара кривых Φ и образ $\hat{\psi}$ является центральной относительно E .

Оценим сверху размерность множества четыре-струй центральных пар ростков. Четыре-струя центральной пары ростков определяется точкой E , четыре-струей отображения $\pi \circ \phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}P^2$, четыре-струями отображений

$$\begin{aligned} r_\phi: t &\mapsto ((x_\phi(t) - E_x)^2 + (y_\phi(t) - E_y)^2 + (z_\phi(t) - E_z)^2)^{1/2}, \\ r_\psi: t &\mapsto ((x_\psi(t) - E_x)^2 + (y_\psi(t) - E_y)^2 + (z_\psi(t) - E_z)^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

и четыре-струей функции $P(\cdot)$ с условием $P(0) = 0$. Следовательно, размерность множества четыре-струй центральных ростков не более $3 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 4 = 27$, а его коразмерность в пространстве всех четыре-струй пар отображений $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ не менее 3. По теореме 2.4 в случае общего положения образ отображения $\hat{\Omega}_{\phi, \psi, 4}$ не пересекается с этим множеством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.15. *Рассмотрим отображение $\mathbf{s}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ такое, что*

$$\mathbf{s}(0) = \mathbf{s}'(0) = \mathbf{s}''(0) = \dots = \mathbf{s}^{(k)}(0) = 0, \quad \mathbf{s}^{(k+1)}(0) \neq 0,$$

и $\mathbf{v}, \mathbf{v}(t) = \mathbf{s}'(t)/t^k$; у функции $\mu(\cdot), \mu(0) \neq 0$ и $\nu(\cdot), \nu(0) \neq 0$. Образ отображения $t \mapsto \mathbf{s}(t) + \mu(t)\mathbf{v}(t)$ обозначим Φ , образ отображения $t \mapsto \mathbf{s}(t) + \nu(t)\mathbf{v}(t)$ — Ψ . Если отображения

$$t \mapsto \pi_0(\mathbf{s}(t) + \mu(t)\mathbf{v}(t)) \quad \text{и} \quad t \mapsto \pi_0(\mathbf{s}(t) + \nu(t)\mathbf{v}(t))$$

регулярны, то у проекций $\pi_0(\Phi)$ и $\pi_0(\Psi)$ совпадают $(k+2)$ -струи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку отображения

$$t \mapsto \pi_0(\mathbf{s}(t) + \mu(t)\mathbf{v}(t)) \quad \text{и} \quad t \mapsto \pi_0(\mathbf{s}(t) + \nu(t)\mathbf{v}(t))$$

регулярны, они гладко параметризуют кривые $\pi_0(\Phi)$ и $\pi_0(\Psi)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(t) &= \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \mathbf{s}^{(k+1)}(0) + \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} \mathbf{s}^{(k+2)}(0) + \bar{o}(t^{k+2}), \\ \mathbf{v}(t) &= \frac{1}{k!} \mathbf{s}^{(k+1)}(0) + \frac{t}{(k+1)!} \mathbf{s}^{(k+2)}(0) + \bar{o}(t^2). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\alpha := \frac{\nu(0) - \mu(0)}{\mu(0)\nu(0)(k+1)(k+2)}.$$

Предложение вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{s}(t + \alpha t^{k+2}) + \mu(t + \alpha t^{k+2})\mathbf{v}(t + \alpha t^{k+2})) \wedge (\mathbf{s}(t) + \nu(t)\mathbf{v}(t)) \\
 &= (\mathbf{s}(t) + \mu(t)\mathbf{v}(t)) \wedge (\mathbf{s}(t) + \nu(t)\mathbf{v}(t)) \\
 &\quad + \alpha t^{k+2}(\mathbf{s}'(0) + \mu'(0)\mathbf{v}(0) + \mu(0)\mathbf{v}'(0)) \wedge (\mathbf{s}(t) + \nu(t)\mathbf{v}(t)) + \bar{o}(t^{k+2}) \\
 &= (\mu(0) - \nu(0))\mathbf{v}(0) \wedge \mathbf{s}(0) + \alpha\mu(0)\nu(0)t^{k+2}\mathbf{v}'(0) \wedge \mathbf{v}(0) + \bar{o}(t^{k+2}) \\
 &= (\mu(0) - \nu(0))t^{k+2} \frac{\mathbf{s}^{k+2} \wedge \mathbf{s}^{k+1}}{(k+1)!(k+2)!} + \alpha\mu(0)\nu(0)t^{k+2} \frac{\mathbf{s}^{k+2} \wedge \mathbf{s}^{k+1}}{(k+1)!(k)!} + \bar{o}(t^{k+2}) \\
 &= \bar{o}(t^{k+2}).
 \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 3.16. В случае общего положения, если $(0, 0, \lambda) \in \widehat{\Sigma}^{11} \setminus \widehat{\Sigma}^{111}$, то $\Omega_{\phi, \psi}(0, 0, \lambda)$ лежит в положении K_2 . Если $(0, 0, \lambda) \in \widehat{\Sigma}^{111}$, то $\Omega_{\phi, \psi}(0, 0, \lambda)$ лежит в положении K_3 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.17. Рассмотрим росток гладкого отображения $\mathbf{s}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ такого, что

$$\mathbf{s}(0) = \mathbf{s}'(0) = 0, \quad \mathbf{s}''(0) \wedge \mathbf{s}'''(0) \wedge \mathbf{s}^{(4)}(0) \neq 0.$$

Множество точек вида $\mathbf{s}(t) + \lambda \mathbf{v}(t)$, где $\mathbf{v}(\cdot)$ – росток гладкого отображения $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\mathbf{v}(t) = \mathbf{s}'(t)/t$ при $t \neq 0$ (т.е. множество точек на касательных прямых к образу отображения), диффеоморфно в окрестности нуля ласточкиному хвосту.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\mathbf{s}(0) = \mathbf{s}'(0) = 0, \quad \mathbf{s}''(0) \wedge \mathbf{s}'''(0) \wedge \mathbf{s}^{(4)}(0) \neq 0,$$

существуют такие аффинные координаты $O f g h$, что

$$f_s(t) = t^3 + \bar{o}(t^3), \quad g_s(t) = t^2 + \bar{o}(t^2), \quad h_s(t) = t^4 + \bar{o}(t^4).$$

Очевидно, что

$$f'_s(t) = t f'_v(t), \quad g'_s(t) = t g'_v(t), \quad h'_s(t) = t h'_v(t).$$

Гладкой заменой параметра t функцию g_s можно привести к нормальному виду: $g_s(t) = t^2$.

Рассмотрим отображение $\mathcal{H}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, заданное формулой

$$(t, \lambda, u) \mapsto \left(t^2 + 2\lambda, f_s(t) + \lambda f_v(t) + u, h_s(t) + \lambda h_v(t) + \frac{h'_v(t)}{f'_v(t)} u \right).$$

Вычислим определитель якобиана этого отображения:

$$\begin{aligned}
 \det(d\mathcal{H}) &= \begin{vmatrix} 2t & 2 & 0 \\ f'_s(t) + \lambda f'_v(t) & f'_v(t) & 1 \\ h'_s(t) + \lambda h'_v(t) + \left(\frac{h'_v(t)}{f'_v(t)} \right)' u & h'_v(t) & \frac{h'_v(t)}{f'_v(t)} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 2t & 2 & 0 \\ \lambda f'_v(t) & 0 & 1 \\ \lambda h'_v(t) + \left(\frac{h'_v(t)}{f'_v(t)} \right)' u & 0 & \frac{h'_v(t)}{f'_v(t)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2t & 2 & 0 \\ \lambda f'_v(t) & 0 & 1 \\ \left(\frac{h'_v(t)}{f'_v(t)} \right)' u & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \left(\frac{h'_v(t)}{f'_v(t)} \right)' u.
 \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\frac{h'_v(t)}{f'_v(t)} = \frac{8t + \bar{o}(t)}{3 + \bar{o}(1)},$$

значит,

$$\left(\frac{h'_v(t)}{f'_v(t)} \right)' \Big|_{t=0} = \frac{8}{3} \neq 0.$$

Значит, при малых t множество критических значений отображения $\mathcal{H}$ есть в точности множество точек вида $\mathbf{s}(t) + \lambda \mathbf{v}(t)$.

Выразим λ и u через f и g :

$$\lambda(f, g, t) = \frac{g - t^2}{2},$$

$$u(f, g, t) = f - f_s(t) - \lambda(f, g, t)f_v(t) = f - f_s(t) - \left(\frac{g - t^2}{2} \right) f_v(t).$$

Введем двухпараметрическое семейство функций $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} H_{f,g}(t) &:= h_{\mathcal{H}}(t, \lambda(f, g, t), u(f, g, t)) \\ &= h_H \left(t, \frac{(g - t^2)}{2} f - f_s(t) - \frac{(g - t^2)}{2} f_v(t) \right) \\ &= h_s(t) + \frac{(g - t^2)}{2} h_v(t) + \frac{h'_v(t)}{f'_v(t)} \left(f - f_s(t) - \frac{(g - t^2)}{2} f_v(t) \right) \\ &= t^4 + t^2 - t^4 + g\bar{o}(t^2) + \bar{o}(t^4) + \frac{8t + \bar{o}(t)}{3 + \bar{o}(1)} \left(f - t^3 - \frac{3g}{2} t + \frac{3}{2} t^3 + g\bar{o}(t) + \bar{o}(t^3) \right) \\ &= \frac{4t^4}{3} - 3gt^2 + \frac{8}{3}ft + g\bar{o}(t^2) + f\bar{o}(t) + \bar{o}(t^4). \end{aligned}$$

Рассмотрим $H_{f,g}(\cdot)$ как деформацию функции $H_{0,0}$. Функция $H_{0,0}$ RL -эквивалентна функции $t \mapsto t^4$. Поскольку $t^4 + x_2 t^2 + x_1 t$ является RL -версальной деформацией этой функции,

$$H_{f,g}(t) = \tau^4(t, x_1, x_2) + g(x_1, x_2)\tau^2(t, x_1, x_2) + f(x_1, x_2)\tau(t, x_1, x_2) = \tilde{H}_{x_1, x_2}(\tau),$$

где τ – гладкая функция трех переменных, $\partial\tau(0, 0, 0)/\partial t \neq 0$.

Поскольку

$$\frac{\partial H'_{f,g}(0)}{\partial g} = 0, \quad \frac{\partial H''_{f,g}(0)}{\partial g} \neq 0, \quad \frac{\partial H'_{f,g}(0)}{\partial f} \neq 0,$$

отображение $(x_1, x_2) \mapsto (f(x_1, x_2), g(x_1, x_2))$ является диффеоморфизмом.

Множество критических значений отображения

$$\widetilde{\mathcal{H}}: (x_1, x_2, \tau) \mapsto (x_1, x_2, \tilde{H}_{x_1, x_2}(\tau))$$

диффеоморфно ласточкиному хвосту. Поскольку отображения $\widetilde{\mathcal{H}}$ и $\mathcal{H}$ локально RL -эквивалентны, множество критических значений отображения $\mathcal{H}$ также локально диффеоморфно ласточкиному хвосту.

ЛЕММА 3.18. *В случае ростков общего положения в образах точек $\widehat{\Sigma}^{111}$ хордовое множество имеет особенность типа ласточкин хвост.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано в доказательстве леммы 3.10,

$$\phi(p) = \mathbf{s}(p) + \mu(p)\mathbf{v}(p), \quad \psi(Q(p)) = \mathbf{s}(p) + \nu(p)\mathbf{v}(p).$$

По лемме 3.14 в случае общего положения четыре-струи проекций $\pi(\Phi)$ и $\pi(\Psi)$ не совпадают, следовательно, по предположению 3.15 $\mathbf{s}''(0) \neq 0$, $\mathbf{v}(t) = \mathbf{s}'(t)/t$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} & (\phi(0) - \psi(0)) \wedge \phi'(0) \wedge \phi''(0) \\ &= \mathbf{v}(0) \wedge (\mu'(0)\mathbf{v}(0) + \mu(0)\mathbf{v}'(0)) \wedge (\mathbf{s}''(0) + \mu''(0)\mathbf{v}(0) + 2\mu'(0)\mathbf{v}'(0) + \mu(0)\mathbf{v}''(0)) \\ &= \mu(0)\mathbf{v}(0) \wedge \mathbf{v}'(0) \wedge (\mathbf{s}''(0) + \mu(0)\mathbf{v}''(0)) \\ &= \mu^2(0)\mathbf{s}''(0) \wedge \mathbf{s}'''(0) \wedge \mathbf{s}^{(4)}(0) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что

$$(\phi(0) - \psi(0)) \wedge \psi'(0) \wedge \psi''(0) = \nu^2(0)\mathbf{s}''(0) \wedge \mathbf{s}'''(0) \wedge \mathbf{s}^{(4)}(0).$$

Таким образом, если $\mathbf{s}''(0) \wedge \mathbf{s}'''(0) \wedge \mathbf{s}^{(4)}(0) = 0$, то пара Φ, Ψ является уплощенной. Значит, по лемме 3.5 в случае общего положения $\mathbf{s}''(0) \wedge \mathbf{s}'''(0) \wedge \mathbf{s}^{(4)}(0) \neq 0$, следовательно, по предположению 3.17 хордовое множество в окрестности $\Omega(0, 0, \lambda)$ переводится ростком диффеоморфизма $\mathbb{R}^3$ в росток ласточкиного хвоста в нуле.

Обозначим

$$\widetilde{\Sigma}^{11} = \{(p, q, \lambda) | \lambda(1 - \lambda) = 0, \Lambda(p, q) = \lambda\}.$$

ЛЕММА 3.19. *В случае общего положения образ $\widetilde{\Sigma}^{11}$ состоит из точек, находящихся в положении I_2 и I_3 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем для определенности считать, что в исследуемой точке $\lambda = 0$. Тогда выполняется равенство (3.3).

Из (3.3) следует, что либо ρ_Φ содержит l_ψ (это соответствует положению I_2), либо вектора $\psi'(0)$ и $\phi(0) - \psi(0)$ коллинеарны (это соответствует положению I_3). Таким образом, первое утверждение леммы доказано.

По предположению 3.4, примененному к векторам $(\phi(0) - \psi(0))$, $\psi'(0)$, $\phi'(0)$, $\phi''(0)$, $\phi'''(0)$, уравнения (3.2), (3.3) и $\phi'''(0) \wedge \phi'(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) = 0$ задают в пространстве разделенных 3-струй отображения $\widehat{\Omega}_{\phi, \psi}$ подмножество коразмерности три, значит, по теореме 2.4 эти три уравнения не могут выполняться одновременно в случае общего положения. Таким образом, $\phi'''(0) \wedge \phi'(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) \neq 0$, а значит, $\phi'''(0) \wedge \phi''(0) \wedge \phi'(0) \neq 0$, т.е. в случае общего положения у Φ ненулевое кручение в базовой точке.

ЛЕММА 3.20. *В окрестности точек, находящихся в положении I_2 , росток хордового множества переводится диффеоморфизмом $\mathbb{R}^3$ в пополненный сложенный зонтик.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем для определенности считать, что в исследуемой точке $\lambda = 0$. Тогда ρ_Φ содержит l_ψ . Если при этом вектора $\psi'(0)$ и $\phi(0) - \psi(0)$ были бы коллинеарны, то выполнялись бы условия (3.3) и (3.5), т.е. пара (Φ, Ψ) являлась бы уплощенной. Следовательно, $\psi'(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) \neq 0$.

Как показано в доказательстве леммы 3.10, при малых p

$$\phi(p) = \mathbf{s}(p) + \mu(p)\mathbf{v}(p), \quad \psi(Q(p)) = \mathbf{s}(p) + \nu(p)\mathbf{v}(p),$$

причем $\mu(0) \neq 0$, $\nu(0) = 0$, $\mathbf{v}(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) = 0$.

Выберем систему координат в $\mathbb{R}^3$ такой, что $\mathbf{s}(0) = 0$.

Заметим, что

$$\frac{\partial \widehat{D}(0, 0)}{\partial p} = \phi''(0) \wedge \psi'(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) = 0,$$

следовательно, по теореме о неявной функции $Q'(0) = 0$. В условиях леммы выполняется уравнение (3.3), значит, по лемме 3.5 в случае общего положения не выполняется уравнение (3.4), следовательно, $\phi'(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) \neq 0$, и

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \widehat{D}(0, 0)}{\partial p \partial p} &= \phi'''(0) \wedge \psi'(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) + \phi''(0) \wedge \psi'(0) \wedge \phi'(0) \\ &= \phi'''(0) \wedge \psi'(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) \neq 0, \end{aligned}$$

а значит, по теореме о неявной функции $Q''(0) \neq 0$. Очевидно, что достаточно рассмотреть случай $Q''(0) > 0$. В этом случае функция $\widetilde{T}: t \mapsto t\sqrt{Q(t)}/t^2$ определена и является гладкой. Обозначим

$$\widetilde{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{s}(t\sqrt{Q(t)}/t^2), \quad \widetilde{\mathbf{v}}(t) = \frac{\widetilde{\mathbf{s}}'(t)}{t},$$

Поскольку $\widetilde{T}'(0) \neq 0$ и $\widetilde{T}^2(t) = Q(t)$, существует такая функция $\widetilde{\nu}(\cdot)$, что $\widetilde{\nu}(0) = 0$,

$$\psi(t^2) = \widetilde{\mathbf{s}}(t) + \widetilde{\nu}(t)\widetilde{\mathbf{v}}(t). \quad (3.8)$$

Разложим (3.8) в ряд по t :

$$\begin{aligned} t^2\psi'(0) + o(t^3) &= t\widetilde{\mathbf{s}}'(0) + t\widetilde{\nu}'(0)\widetilde{\mathbf{v}}(0) + \frac{t^2}{2}\widetilde{\mathbf{s}}''(0) + t^2\widetilde{\nu}'(0)\widetilde{\mathbf{v}}'(0) + \frac{t^2}{2}\widetilde{\nu}''(0)\widetilde{\mathbf{v}}(0) \\ &+ \frac{t^3}{6}\widetilde{\mathbf{s}}'''(0) + \frac{t^3}{6}\widetilde{\nu}'''(0)\widetilde{\mathbf{v}}(0) + \frac{t^3}{2}\widetilde{\nu}''(0)\widetilde{\mathbf{v}}'(0) + \frac{t^3}{2}\widetilde{\nu}'(0)\widetilde{\mathbf{v}}''(0) + o(t^3). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\widetilde{\mathbf{s}}'(0) + \widetilde{\nu}'(0)\widetilde{\mathbf{v}}(0) = 0, \quad (3.9)$$

$$\widetilde{\mathbf{s}}''(0) + 2\widetilde{\nu}'(0)\widetilde{\mathbf{v}}'(0) + \widetilde{\nu}''(0)\widetilde{\mathbf{v}}(0) = 2\psi'(0), \quad (3.10)$$

$$\widetilde{\mathbf{s}}'''(0) + \widetilde{\nu}'''(0)\widetilde{\mathbf{v}}(0) + 3\widetilde{\nu}''(0)\widetilde{\mathbf{v}}'(0) + 3\widetilde{\nu}'(0)\widetilde{\mathbf{v}}''(0) = 0. \quad (3.11)$$

Домножив равенство коэффициентов при t внешне на $\widetilde{\mathbf{v}}'(0)$, получим

$$\widetilde{\mathbf{s}}'(0) \wedge \widetilde{\mathbf{v}}'(0) + \widetilde{\nu}'(0)\widetilde{\mathbf{v}}(0) \wedge \widetilde{\mathbf{v}}'(0) = 0.$$

Домножив равенство коэффициентов при t^2 внешне на $\widetilde{\mathbf{v}}(0)$, получим

$$\widetilde{\mathbf{s}}''(0) \wedge \widetilde{\mathbf{v}}(0) + 2\widetilde{\nu}'(0)\widetilde{\mathbf{v}}'(0) \wedge \widetilde{\mathbf{v}}(0) = 2\psi'(0) \wedge \widetilde{\mathbf{v}}(0).$$

Прибавив ко второму полученному равенству первое с коэффициентом 2, получим

$$\tilde{s}''(0) \wedge \tilde{v}(0) + 2\tilde{s}'(0) \wedge \tilde{v}'(0) = 2\psi'(0) \wedge \tilde{v}(0) \neq 0.$$

Отсюда следует $\tilde{s}'(0) \neq 0$, значит, $s'(0) \neq 0$ и $v(0) = s'(0)$.

В условиях леммы не выполняется уравнение (3.4), значит, векторы $\phi'(0)$ и $\phi(0) - \psi(0)$ не коллинеарны и по предложению 3.8 у S в точке $\Omega_{\phi,\psi}(0,0,0)$ ненулевая кривизна. С другой стороны по предложению 3.9 из равенства (3.3) следует, что у S в точке $\Omega_{\phi,\psi}(0,0,0)$ нулевое кручение, значит, $s'''(0) \wedge s''(0) \wedge s'(0) = 0$. У Φ ненулевое кручение в базовой точке, $\phi'''(0) \wedge \phi''(0) \wedge \phi'(0) \neq 0$, следовательно, $\phi'''(0) \wedge \phi''(0) \wedge \phi'(0) \neq 0$. Предположим, что $s'(0) \wedge s''(0) \wedge s^{(4)}(0) = 0$, тогда

$$\begin{aligned} \phi'''(0) \wedge \phi''(0) \wedge \phi'(0) &= (s'''(0) + \mu(0)v'''(0) + 3\mu'(0)v''(0) + 3\mu''(0)v'(0) + \mu'''(0)v(0)) \\ &\quad \wedge (s''(0) + \mu(0)v''(0) + 2\mu'(0)v'(0) + \mu''(0)v(0)) \\ &\quad \wedge (s'(0) + \mu(0)v'(0) + \mu'(0)v(0)) = 0. \end{aligned}$$

Противоречие. Следовательно,

$$s''(0) \wedge s''(0) \wedge s^{(4)}(0) \neq 0.$$

Таким образом, в случае Φ и Ψ , находящихся в общем положении, у S не компланарны вектора первой, второй и четвертой производной.

В силу предложения 2.9 множество точек на касательных прямых к кривой с нулевым кручением и не компланарными векторами второй, третьей и четвертой производной локально переводится диффеоморфизмом $\mathbb{R}^3$ в сложенный зонтик.

Заметим, что

$$\tilde{s}(t) + \tilde{v}(t)\tilde{v}(t) = \psi(t^2) = \tilde{s}(-t) + \tilde{v}(-t)\tilde{v}(-t),$$

а значит, Ψ – это кривая самопересечения сложенного зонтика.

То есть в тех координатах (a, b, c) , где поверхность представляется как образ отображения $(t, u) \mapsto (u, t^2, t^3u)$, кривая ψ в некоторой окрестности может быть запаараметризована как $(\epsilon_1(\tau), \tau, \epsilon_2(\tau))$, где $\epsilon_i(\cdot)$ – бесконечно гладкие функции, тождественно равные нулю при положительных значениях аргумента.

Диффеоморфизм $(a, b, c) \mapsto (a - \epsilon_1(b), b, c - \epsilon_2(b))$ переводит росток хордового множества в пополненный сложенный зонтик.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.21. *Для достаточно малых a на ласточкином хвосте нет точек (a, b, c) , удовлетворяющих условиям $a > 0$, $\sqrt{b^2 + (c - a^2/4)^2} < a^4$.¹*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ласточкин хвост является образом отображения

$$(t, a) \mapsto (a, 4t^3 + 2at, t^4 + at^2).$$

Заметим, что при малых $a > 0$ и $t < a$ выполняются неравенства $c < a^4 + a^3 < a^2/8$ и, следовательно, $|c - a^2/4| > a^4$; при малых $a > 0$ и $t \geq a$ выполняется неравенство $|b| \geq |4a^3 + 2a^2| > a^4$.

Значит,

$$\sqrt{b^2 + (c - a^2/4)^2} > \max(|b|, |c - a^2/4|) > a^4.$$

¹ Говоря неформально, это предложение утверждает, что “криволинейный конус”, “осью” которого является половина параболы $\{(a, b, c) | a \geq 0, b = 0, c = a^2/4\}$, а радиус поперечного сечения равен a^4 , при малых a пересекается с ласточкиным хвостом лишь в начале координат.

ЛЕММА 3.22. В окрестности точек, находящихся в положении I_3 , хордовое множество переводится диффеоморфизмом $\mathbb{R}^3$ в пополненный ласточкин хвост.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем для определенности считать, что в исследуемой точке $\lambda = 0$ и выполняется равенство $\psi'(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) = 0$. Заметим, что

$$\frac{\partial \widehat{D}(0, 0)}{\partial p} = \phi''(0) \wedge \psi'(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) = 0,$$

следовательно, по теореме о неявной функции $Q'(0) = 0$.

Как показано в доказательстве леммы 3.10, при малых p

$$\phi(p) = \mathbf{s}(p) + \mu(p)\mathbf{v}(p), \quad \psi(Q(p)) = \mathbf{s}(p) + \nu(p)\mathbf{v}(p),$$

причем $\mu(0) \neq 0$, $\nu(0) = 0$. По лемме 3.1 в случае общего положения ранг отображения $\Omega_{\phi, \psi}$ более двух при $\lambda \neq 0, 1$, следовательно, $\mathbf{v}'(0) \wedge \mathbf{v}(0) \neq 0$, а значит, и $\tilde{\mathbf{v}}(0) \wedge \tilde{\mathbf{v}}'(0) \neq 0$.

Выберем систему координат в $\mathbb{R}^3$ такой, что $\mathbf{s}(0) = 0$.

В условиях леммы выполняется уравнение (3.6), значит, по лемме 3.5 в случае общего положения не выполняется уравнение (3.5), следовательно, $\phi''(0) \wedge \psi'(0) \wedge \phi'(0) \neq 0$. Поскольку $\psi'(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) = 0$,

$$\frac{\partial^2 \widehat{D}(0, 0)}{\partial p \partial p} = \phi'''(0) \wedge \psi'(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) + \phi''(0) \wedge \psi'(0) \wedge \phi'(0) = \phi''(0) \wedge \psi'(0) \wedge \phi'(0) \neq 0,$$

а значит, по теореме о неявной функции $Q''(0) \neq 0$.

Введем так же, как и в лемме 3.20, векторзначные функции $\tilde{\mathbf{s}}(\cdot)$, $\tilde{\mathbf{v}}(\cdot)$ и вещественнозначную функцию $\tilde{\nu}(\cdot)$ так, чтобы выполнялось уравнение (3.8). В условиях данной леммы также выполняются равенства (3.9), (3.10), (3.11) из которых тем же путем можно вывести

$$\tilde{\mathbf{s}}''(0) \wedge \tilde{\mathbf{v}}(0) + 2\tilde{\mathbf{s}}'(0) \wedge \tilde{\mathbf{v}}'(0) = 2\psi'(0) \wedge \tilde{\mathbf{v}}(0) = 0,$$

следовательно, в условиях данной леммы $\tilde{\mathbf{s}}'(0) = 0$, $\tilde{\nu}(0) = 0$. Отсюда, складывая равенство (3.10), домноженное внешне на $3\tilde{\mathbf{v}}'(0)$, и (3.11), домноженное внешне на $\tilde{\mathbf{v}}(0)$, получаем

$$\tilde{\mathbf{s}}'''(0) \wedge \mathbf{v}(0) + 3\tilde{\mathbf{s}}''(0) \wedge \mathbf{v}'(0) = 6\psi'(0) \wedge \mathbf{v}'(0) \neq 0,$$

следовательно, $\mathbf{s}''(0) \neq 0$.

В условиях леммы выполняется уравнение (3.6), значит, по лемме 3.5 в случае общего положения не выполняется уравнение (3.5), следовательно,

$$\phi''(0) \wedge \phi'(0) \wedge (\phi'(0) - \psi(0)) \neq 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \phi''(0) \wedge \phi'(0) \wedge (\phi(0) - \psi(0)) &= (\mathbf{s}''(0) + \mu(0)\mathbf{v}''(0) + 2\mu'(0)\mathbf{v}'(0) + \mu''(0)\mathbf{v}(0)) \\ &\quad \wedge (\mathbf{s}'(0) + \mu(0)\mathbf{v}'(0) + \mu'(0)\mathbf{v}(0)) \wedge \mu(0)\mathbf{v}(0) \\ &= \mu^3(0)\mathbf{v}''(0) \wedge \mathbf{v}'(0) \wedge \mathbf{v}(0) \neq 0, \end{aligned}$$

значит, в случае общего положения

$$\mathbf{s}^{(4)}(0) \wedge \mathbf{s}'''(0) \wedge \mathbf{s}''(0) \neq 0.$$

Таким образом, к множеству точек на касательных прямых к кривой S можно применить предложение 3.17.

Согласно предложению 3.17 объединение касательных к S прямых в окрестности $\Omega(0, 0, 0)$ диффеоморфно ласточкиному хвосту. Поскольку

$$\tilde{\mathbf{s}}(t) + \tilde{\nu}(t)\tilde{\mathbf{v}}(t) = \psi(t^2) = \tilde{\mathbf{s}}(-t) + \tilde{\nu}(-t)\tilde{\mathbf{v}}(-t),$$

Ψ является кривой самопересечения ласточкиного хвоста. Следовательно, в тех гладких координатах (a, b, c) в $\mathbb{R}^3$, где объединение множеств точек прямых, соединяющих точки $\psi(Q(p))$ и $\phi(p)$, есть ласточкин хвост, кривая Ψ может быть запараметризована следующим образом:

$$a(t) = t, \quad b(t) = \epsilon_1(t), \quad c(t) = \frac{t^2}{4} + \epsilon_2(t),$$

где $\epsilon_1(\cdot), \epsilon_2(\cdot)$ – бесконечно гладкие функции, равные нулю при отрицательных значениях аргумента. Докажем, что объединение множеств точек прямых, соединяющих точки $\psi(Q(p))$ и $\phi(p)$, и “полукривой” $\{\psi(t) | t > 0\}$ ростком диффеоморфизма $\mathbb{R}^3$ переводится в пополненный ласточкин хвост.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ пару замкнутых кругов с центрами в нуле Δ_1 и Δ_2 радиусов 1 и 2 соответственно и семейство диффеоморфизмов $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{D}_X: (b, c) \mapsto (B(b, c), C(b, c)),$$

зависящих от двумерного параметра $X \in \Delta_1$, таких, что $\mathcal{D}_X(x) = x$ при $x \notin \Delta_2$, $\mathcal{D}_X(X) = 0$, $\mathcal{D}_0$ – тождественное преобразование.

Заметим, что поскольку отображения $\mathcal{D}_X$ являются тождественным преобразованием вне Δ_2 , $B_0(b, c) = b$ и $C_0(b, c) = c$, возможны следующие представления семейств функций $B_{(b_s, c_s)}(b, c)$ и $C_{(b_s, c_s)}(b, c)$:

$$B_{(b_s, c_s)}(b, c) = b + b_s B_{1, (b_s, c_s)}(b, c) + c_s B_{2, (b_s, c_s)}(b, c), \quad (3.12)$$

$$C_{(b_s, c_s)}(b, c) = b + b_s C_{1, (b_s, c_s)}(b, c) + c_s C_{2, (b_s, c_s)}(b, c), \quad (3.13)$$

где $B_{1, (b_s, c_s)}, B_{2, (b_s, c_s)}, C_{1, (b_s, c_s)}, C_{2, (b_s, c_s)}$ – некоторые гладкие двухпараметрические семейства функций от двух переменных с компактным носителем.

Рассмотрим отображение $\mathfrak{D}_+: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+^3$, где $\mathbb{R}_+^3$ – полупространство, заданное неравенством $a > 0$ (для удобства чтения запишем компоненты векторов в столбик):

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ a^4 B_{(\epsilon_1(a)/a^4, \epsilon_2(a)/a^4)}\left(\frac{b}{a^4}, \frac{(c - a^2/4)}{a^4}\right) \\ \frac{a^2}{4} + a^4 C_{(\epsilon_1(a)/a^4, \epsilon_2(a)/a^4)}\left(\frac{b}{a^4}, \frac{(c - a^2/4)}{a^4}\right) \end{pmatrix}.$$

В силу предложения 3.21 $\mathfrak{D}_+$ неподвижно на ласточкином хвосте. В силу того, что у B_1 компактный носитель, для любых l, k

$$\left| \frac{\partial^k \partial^l B_{1, (b_s, c_s)}(b, c)}{\partial b^k \partial c^l} \right| < \text{const}_{l, k}. \quad (3.14)$$

Аналогичные утверждения верны для B_2, C_1, C_2 .

С помощью (3.12), (3.13) и индукции по l и k несложно доказать, что для любых l, k , кроме $l = k = 0$, выполнено

$$\frac{\partial^k \partial^l \mathfrak{D}_{+,b}(a, b, c)}{\partial b^k \partial c^l} = \delta_{k,l} + \epsilon_1(a) \mathcal{P}_{b,1} + \epsilon_2(a) \mathcal{P}_{b,2}, \quad (3.15)$$

где $\mathcal{P}_{b,1}$ и $\mathcal{P}_{b,2}$ – полиномиальные выражения от

$$a, \quad \frac{1}{a}, \quad \epsilon_1^{(i)}(a), \quad \epsilon_2^{(i)}(a), \quad \frac{\partial^{i+j} B_1(b, c)}{\partial b^i \partial c^j}, \quad \frac{\partial^{i+j} B_2(b, c)}{\partial b^i \partial c^j},$$

$i, j = 0, 1, \dots, k+l$, $\delta_{k,l} = 1$ при $k = 1, l = 0$, иначе $\delta_{k,l} = 0$.

Следовательно, в силу (3.14) и (3.15)

$$\lim_{a \rightarrow 0} \max_{b, c} \left| \frac{\partial^k \partial^l \mathfrak{D}_{+,b}(a, b, c)}{\partial b^k \partial c^l} - \delta_{k,l} \right| = 0$$

(аналогично для $\mathfrak{D}_{+,c}$), а значит, $\mathfrak{D}_+$ можно доопределить на дополнении к $\mathbb{R}_+^3$ тождественным преобразованием, причем получившееся преобразование $\mathfrak{D}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ будет бесконечно гладким диффеоморфизмом, переводящим “полукривую” $\{\psi(t) | t > 0\}$ в “полукривую” $\{(t^2, 0, t^4/4)\}$ и неподвижным на ласточкином хвосте.

Таким образом, $\mathfrak{D}$ переводит росток хордового множества в точке $\Omega(0, 0, 0)$ в росток пополненного ласточкиного хвоста в начале координат.

ЛЕММА 3.23. *В окрестности точек, находящихся в положении I_1 , хордовое множество является гладкой поверхностью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся случаем $\lambda = 0$. Поскольку исследуемая точка находится в положении I_1 , по лемме 3.19 ее прообраз лежит в дополнении к $\tilde{\Sigma}^{11}$, поэтому, как было показано в доказательстве леммы 3.10, в ее окрестности у отображения

$$\mathfrak{L}: (q, \lambda) \mapsto \lambda \phi(P(q)) + (1 - \lambda) \psi(q)$$

ранг дифференциала равен 2, а значит, образ данного отображения является гладкой поверхностью.

С другой стороны, в окрестности данной точки росток Ψ лежит внутри образа $\mathfrak{L}$, значит, хордовое множество также локально является гладкой поверхностью.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, Изд-во МЦНМО, М., 2004.
- [2] Sh. Izumiya, N. Takeuchi, “Singularities of ruled surfaces in $\mathbb{R}^3$ ”, *Turkish J. Math.*, **28**:2 (2004), 153–163; <http://eprints.math.sci.hokudai.ac.jp/archive/00000648/>.
- [3] Дж. Н. Мазер, “Устойчивость C^∞ -отображений. V. Трансверсальность”, *УМН*, **29**:1 (1974), 99–128.

Л. П. Стунжас

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

21.11.2006

Исправленный вариант

18.04.2007