Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Миронов, Связь между симметриями уравнения Цицейки и иерархией Веселова–Новикова, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 4, 637–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3813>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:34:21

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Связь между симметриями уравнения Цицейки и иерархией Веселова–Новикова

А. Е. Миронов

В этой заметке мы покажем, что с уравнением Цицейки

$$v_{z\bar{z}} = e^{-2v} - e^v \quad (1)$$

естественно связан двумерный оператор Шрёдингера и его изоспектральные деформации, заданные иерархией Веселова–Новикова, отвечают симметриям этого уравнения.

Уравнение Цицейки допускает преобразование симметрии вида

$$v_t = f(v, v_z, v_{\bar{z}}, v_{zz}, v_{z\bar{z}}, v_{\bar{z}\bar{z}}, \dots),$$

если равенство

$$f_{z\bar{z}} + (2e^{-2v} + e^v)f = 0 \quad (2)$$

выполнено на всех решениях уравнения (1). В силу того, что

$$\frac{d}{dt}(v_{z\bar{z}} - e^{-2v} + e^v) = f_{z\bar{z}} + (2e^{-2v} + e^v)f,$$

преобразование симметрии задает поток на пространстве решений уравнения Цицейки.

Уравнение Цицейки имеет следующее представление в виде уравнений Захарова–Шабата со спектральным параметром λ , найденное Михайловым [1]:

$$\partial_z A(\lambda) - \partial_z B(\lambda) + [A(\lambda), B(\lambda)] = 0,$$

где

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & v_z & -\frac{i}{\lambda} e^{-v} \\ -e^v & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -e^v & 0 & 0 \\ 0 & -i\lambda e^{-v} & v_{\bar{z}} \end{pmatrix}.$$

Уравнения Захарова–Шабата являются условием совместности для следующей вспомогательной линейной задачи:

$$\partial_z \Psi(\lambda) = A(\lambda) \Psi(\lambda), \quad \partial_{\bar{z}} \Psi(\lambda) = B(\lambda) \Psi(\lambda),$$

где $\Psi(\lambda) = (\psi(\lambda), \psi_z(\lambda), \psi_{\bar{z}}(\lambda))^T$. Отсюда следует, что функция $\psi(z, \bar{z}, \lambda)$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$L\psi = (\partial_z \partial_{\bar{z}} + e^{v(z, \bar{z})})\psi.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00094а), комплексным интеграционным проектом 2.15 СО РАН, грантом Президента Российской Федерации (грант МК-9651.2006.1) и Фондом Содействия Отечественной Науке.

Напомним построение иерархии уравнений Веселова–Новикова (ВН) [2], которые в случае периодического потенциала задают изоспектральные деформации оператора Шрёдингера, т.е. деформации, сохраняющие спектр Флоке (поверхность, параметризующую блоховские функции) на нулевом уровне энергии. Уравнения ВН задаются (L, A, B) -тройками Манакова

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [L, A_{2n+1}] + B_{2n-2}L, \quad (3)$$

где оператор A_{2n+1} является либо одним из следующих двух операторов:

$$\partial_z^{2n+1} + u'_{2n-1}(z, \bar{z})\partial_z^{2n-1} + \dots + u'_0(z, \bar{z}), \quad \partial_{\bar{z}}^{2n+1} + u''_{2n-1}(z, \bar{z})\partial_{\bar{z}}^{2n-1} + \dots + u''_0(z, \bar{z}),$$

либо их суммой, а оператор B_{2n-2} однозначно находится из (3).

ТЕОРЕМА 1. *Уравнения иерархии Веселова–Новикова задают высшие коммутирующие потоки на пространстве конечнозонных решений уравнения Цицейки, т.е. для высшего уравнения Веселова–Новикова вида $v_{t_n} = f_n(v, v_z, v_{\bar{z}}, v_{zz}, v_{z\bar{z}}, v_{\bar{z}\bar{z}}, \dots)$, равенство (2) выполнено на конечнозонных решениях уравнения Цицейки.*

Доказательство этой теоремы заключается в сопоставлении спектральных данных для конечнозонных решений иерархии ВН [2] и конечнозонных решений уравнения Цицейки [3].

Пусть Γ – риманова поверхность рода g . Выберем на Γ две точки ∞_1 и ∞_2 с локальными параметрами k_1^{-1} , k_2^{-1} в окрестностях этих точек, а также дивизор $D = P_1 + \dots + P_g$. Функцией Бейкера–Ахиезера, отвечающей спектральным данным

$$\{\Gamma, \infty_1, \infty_2, k_1^{-1}, k_2^{-2}, D\},$$

называется функция $\psi(P, z, \bar{z}, t'_1, t''_1, t'_2, t''_2, \dots)$, $P \in \Gamma$, которая обладает следующими свойствами:

1) в точках ∞_1 и ∞_2 функция ψ имеет существенные особенности следующего вида:

$$\begin{aligned} \psi &= \exp(zk_1 + t'_1 k_1^3 + \dots + t'_n k_1^{2n+1} + \dots) \left(1 + \frac{\xi(z, \bar{z}, t)}{k_1} + O\left(\frac{1}{k_1^2}\right) \right), \\ \psi &= \exp(\bar{z}k_2 + t''_1 k_2^3 + \dots + t''_n k_2^{2n+1} + \dots) \left(c(z, \bar{z}, t) + \frac{\eta(z, \bar{z}, t)}{k_2} + O\left(\frac{1}{k_2^2}\right) \right); \end{aligned}$$

2) на $\Gamma \setminus \{\infty_1, \infty_2\}$ функция ψ мероморфна и имеет простые полюса в точках дивизора D .

Для дивизора D в общем положении функция Бейкера–Ахиезера существует и единственна. Имеет место

ТЕОРЕМА 2 [2]. *Предположим, что поверхность Γ обладает следующими свойствами:*

- 1) на Γ существует голоморфная инволюция $\sigma: \Gamma \rightarrow \Gamma$, $\sigma^2 = \text{id}$, такая, что $\sigma(\infty_i) = \infty_i$, $\sigma(k_i) = -k_i$, $i = 1, 2$;
- 2) на Γ существует мероморфный дифференциал Ω с простыми полюсами в точках ∞_1, ∞_2 , а нули Ω совпадают с дивизором $D + \sigma(D)$.

Тогда функция ψ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \partial_z \partial_{\bar{z}} \psi + e^{v(z, \bar{z}, t)} \psi &= 0, \quad e^{v(z, \bar{z}, t)} = -\xi_{\bar{z}} = -\eta_z, \\ \partial_{t'_n} \psi &= A'_{2n+1} \psi = (\partial_z^{2n+1} + v'_{2n-1} \partial_z^{2n-1} + \dots + v'_0) \psi, \\ \partial_{t''_n} \psi &= A''_{2n+1} \psi = (\partial_{\bar{z}}^{2n+1} + v''_{2n-1} \partial_{\bar{z}}^{2n-1} + \dots + v''_0) \psi. \end{aligned}$$

При этом выполнены уравнения Веселова–Новикова

$$\frac{\partial L}{\partial t'_n} = [L, A'_{2n+1}] + B'_{2n-2}L, \quad \frac{\partial L}{\partial t''_n} = [L, A''_{2n+1}] + B''_{2n-2}L.$$

Функция v будет удовлетворять уравнению Цицейки, если дополнительно потребовать, чтобы спектральная кривая Γ была тригональной кривой. Имеет место

ТЕОРЕМА 3 [3]. *Предположим, что на Γ существует мероморфная функция λ с дивизором нулей и полюсов $3\infty_1 - 3\infty_2$ такая, что $\lambda(\sigma(P)) = -\lambda(P)$, причем $\lambda = ik_1^{-3}$ в окрестности ∞_1 и $\lambda = k_2^3/i$ в окрестности ∞_2 . Тогда функция v удовлетворяет уравнению Цицейки.*

Таким образом, теорема 1 доказана.

Связь между уравнениями ВН и уравнением Цицейки, указанная в теореме 1, объясняется еще и тем, что как следует из [4], первое стационарное уравнение ВН является следствием уравнения Цицейки, а следовательно, уравнения ВН должны задавать потоки на пространстве решений уравнения Цицейки. Справедлива

ТЕОРЕМА 4. *Стационарное уравнение Веселова–Новикова*

$$[L, A_3] + B_0 L = 0, \quad (4)$$

где $A_3 = \partial_z^3 + \partial_{\bar{z}}^3 - (v_z^2 + v_{z\bar{z}})\partial_z - (v_{\bar{z}}^2 + v_{z\bar{z}})\partial_{\bar{z}}$, $B_0 = -\partial_z(v_z^2 + v_{z\bar{z}}) - \partial_{\bar{z}}(v_{\bar{z}}^2 + v_{z\bar{z}})$, равносильно системе уравнений

$$\partial_z(e^{-2v} - e^v - v_{z\bar{z}}) + 2v_z(e^{-2v} - e^v - v_{z\bar{z}}) = 0, \quad \partial_{\bar{z}}(e^{-2v} - e^v - v_{z\bar{z}}) + 2v_{\bar{z}}(e^{-2v} - e^v - v_{z\bar{z}}) = 0.$$

Поскольку класс конечнозонных решений уравнения Цицейки достаточно обширен, то, учитывая теорему 1, становится очевидно, что уравнения иерархии ВН задают высшие симметрии уравнения Цицейки. Подтверждением этой гипотезы является

ТЕОРЕМА 5. *Второе, третье, пятое уравнения Веселова–Новикова задают симметрии уравнения Цицейки.*

Второе и третье уравнения ВН имеют вид

$$\begin{aligned} v_{t_2} &= \frac{1}{9} (5v_1 v_2^2 + 5v_1^2 v_3 - 5v_2 v_3 - v_5 - v_1^5), \\ v_{t_3} &= \frac{1}{81} (4v_1^7 - 84v_1^3 v_2^2 - 42v_1^4 v_3 + 42v_3(2v_2^2 - v_4) \\ &\quad + 7v_1(4v_2^3 + 9v_3^2 + 12v_2 v_4) - 21v_2 v_5 + 21v_1^2(2v_2 v_3 + v_5) - 3v_7), \end{aligned}$$

где $\partial_z^i v = v_i$. Пятое уравнение ВН мы здесь не приводим из-за его громоздкого вида. В теореме 5 пропущено четвертое уравнение ВН, поскольку оно является следствием уравнения (4) и, следовательно, задает тривиальную симметрию $v_{t_4} = 0$.

Отметим, что все симметрии уравнения Цицейки (и соответствующий оператор рекурсии) найдены в [5], а также для эквивалентного уравнения – в [6].

Теорема 1 обладает следующей геометрической интерпретацией. Поверхность Γ в $\mathbb{C}P^2$ называется лагранжевой, если ограничение формы Фубини–Штуди на Γ равно нулю. Поверхности в $\mathbb{C}P^2$ можно задавать с помощью композиции

$$\varphi = \mathcal{H} \circ r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2,$$

где $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^5$, $\mathcal{H}$ – проекция расслоения Хопфа. Если отображение φ конформно, а образ φ лагранжев и минимален, то компоненты радиус-вектора r удовлетворяют уравнению Шрёдингера (см. [7])

$$Lr = \Delta r + e^v r = 0.$$

Если при этом отображение φ Λ -периодично, где $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ – некоторая решетка, $2e^v(dx^2 + dy^2)$ – индуцированная метрика на образе φ , то компоненты радиус-вектора r являются

блеховскими функциями для оператора L и функция v удовлетворяет уравнению Цицейки. Кроме того, оператор L является конечнозонным на нулевом уровне энергии. Таким образом, каждому минимальному лагранжеву тору в $\mathbb{C}P^2$ отвечает конечнозонный оператор Шрёдингера и конечнозонное решение уравнения Цицейки. При этом иерархия ВН задает интегрируемые деформации в классе минимальных лагранжевых торов, при которых сохраняется спектр Флоке оператора Шрёдингера (детали см. в [7]).

Автор искренне благодарен Б. И. Сулейманову за внимание и стимулирующий интерес к этой работе, А. В. Жиберу и Р. И. Ямилову за ряд ценных замечаний, а также А. П. Веселову и Е. В. Ферапонтову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. V. Mikhailov, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **3**:1–2 (1981), 73–117. [2] А. П. Веселов, С. П. Новиков, *Докл. АН СССР*, **279**:1 (1984), 20–24. [3] Р. А. Шарипов, *ТМФ*, **87**:1 (1991), 48–56. [4] E. V. Ferapontov, *Differential Geom. Appl.*, **11**:2 (1999), 117–128. [5] А. В. Жибер, *Симметрии и интегралы нелинейных дифференциальных уравнений*, Дис. докт. физ.-матем. наук, Уфа, 1993. [6] В. В. Соколов, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:2 (1980), 79–80. [7] А. Е. Миронов, *Сиб. электрон. матем. известия*, **1** (2004), 38–46.

А. Е. Миронов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Новосибирский государственный университет

E-mail: miroнов@math.nsc.ru

Поступило

03.04.2007