Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Н. Зубова, Т. А. Шалошникова, Об усреднении вариационного неравенства, соответствующего задаче с быстро меняющимся типом граничных условий, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 4, 538–549

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3815>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 16:01:52

Об усреднении вариационного неравенства, соответствующего задаче с быстро меняющимся типом граничных условий

М. Н. Зубова, Т. А. Шапошникова

В настоящей работе изучается асимптотическое поведение решения вариационного неравенства с односторонними ограничениями на ε -периодически расположенных подмножествах G_ε , принадлежащих границе $\partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Построена предельная (усредненная) задача и доказана сильная в $H_1(\Omega)$ сходимость решений исходного неравенства к решению предельной нелинейной краевой задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$ в так называемом критическом случае.

Библиография: 5 названий.

Усреднению краевых задач с быстро меняющимся типом граничных условий посвящено большое число работ (см., например, [1]–[4] и имеющуюся там библиографию).

В настоящей работе изучается асимптотическое поведение решения вариационного неравенства с односторонними ограничениями на ε -периодически расположенных подмножествах G_ε , принадлежащих границе $\partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Построена предельная (усредненная) задача и доказана сильная в $H_1(\Omega)$ сходимость решений исходного неравенства к решению предельной нелинейной краевой задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$ в так называемом критическом случае.

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3 \cap \{x_1 > 0\}$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, состоящей из двух частей Γ_1 и Γ_2 , причем $\Gamma_1 = \partial\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\} \neq \emptyset$. Положим

$$G_\varepsilon^0 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, x_2^2 + x_3^2 < a_\varepsilon^2\}, \quad \widehat{G}_\varepsilon = \bigcup_{z \in \widehat{Z}} (G_\varepsilon^0 + 2\varepsilon z) = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_\varepsilon^j,$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр; $0 < a_\varepsilon < \varepsilon$; $\widehat{Z}$ – множество векторов вида $z = (0, z_2, z_3)$, где z_j , $j = 2, 3$, – целые числа.

Обозначим объединение множеств G_ε^j из $\widehat{G}_\varepsilon$ таких, что

$$\overline{G_\varepsilon^j} \subset \Gamma_1^\varepsilon = \{x \in \Gamma_1 : \rho(x, \partial\Gamma_1) \geq 2\varepsilon\},$$

через G_ε , т.е.

$$G_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{N(\varepsilon)} G_\varepsilon^j, \quad \overline{G_\varepsilon^j} \subset \Gamma_1^\varepsilon, \quad N(\varepsilon) \simeq d\varepsilon^{-2}, \quad d = \text{const} > 0,$$

см. рис. 1.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-2538.2006.1).

Рис. 1. Область Ω

Пусть

$$u_\varepsilon \in K_\varepsilon = \{g \in H_1(\Omega, \Gamma_2) : g \geq 0 \text{ п.в. на } G_\varepsilon\} \quad (1)$$

– решение вариационного неравенства

$$\int_{\Omega} \nabla u_\varepsilon \nabla (v - u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u_\varepsilon) dx, \quad (2)$$

где $f \in L_2(\Omega)$, v – произвольный элемент K_ε ; $\nabla g \nabla h \equiv \sum_{j=1}^3 (\partial g / \partial x_j)(\partial h / \partial x_j)$. Через $H_1(\Omega, \Gamma_2)$ мы обозначили замыкание пространства бесконечно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ функций, обращающихся в нуль в окрестности Γ_2 .

Задача (1), (2) имеет единственное решение $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$ (см. [5]), для которого справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{H_1(\Omega)} \leq K. \quad (3)$$

Здесь и далее постоянные, участвующие в оценках и не зависящие от ε , будем обозначать через K .

Заметим, что (1), (2) является обобщенной постановкой следующей задачи:

$$\begin{aligned} \Delta u_\varepsilon &= -f, \quad x \in \Omega, \quad u_\varepsilon \geq 0, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} \geq 0, \quad u_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad x \in G_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} &= 0, \quad x \in \Gamma_1 \setminus \overline{G_\varepsilon}, \quad u_\varepsilon = 0, \quad x \in \Gamma_2, \end{aligned}$$

где ν – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Изучим поведение u_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В силу леммы Минти задача (1), (2) эквивалентна задаче

$$u_\varepsilon \in K_\varepsilon, \quad (4)$$

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla (v - u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u_\varepsilon) dx, \quad (5)$$

где v – произвольный элемент K_ε . Поэтому будем изучать поведение решения задачи (4), (5) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Рис. 2. Область $T_\varepsilon \setminus \overline{G_\varepsilon^0}$

Предположим, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon \varepsilon^{-2} = C = \text{const} > 0. \quad (6)$$

Введем функцию $w_\varepsilon(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, как решение задачи (см. рис. 2)

$$\begin{cases} \Delta w_\varepsilon = 0, & \text{если } x \in T_\varepsilon \setminus \overline{G_\varepsilon^0}, \\ w_\varepsilon = 0, & \text{если } x \in G_\varepsilon^0, \\ w_\varepsilon = 1, & \text{если } x \in \partial T_\varepsilon, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$T_\varepsilon = \left\{ x \in R^3 : \frac{x_1^2}{1 - a_\varepsilon^2 \varepsilon^{-2}} + x_2^2 + x_3^2 < \varepsilon^2 \right\}.$$

Решение задачи (7) легко найти в явном виде. Для этого перейдем к эллипсоидальным координатам ψ, θ_1, θ_2 :

$$\begin{aligned} x_1 &= a_\varepsilon \operatorname{sh} \psi \cos \theta_1, \\ x_2 &= a_\varepsilon \operatorname{ch} \psi \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ x_3 &= a_\varepsilon \operatorname{ch} \psi \sin \theta_1 \sin \theta_2, \end{aligned}$$

где $0 \leq \psi < +\infty$, $0 \leq \theta_1 \leq \pi$, $0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$.

Будем искать решение задачи (7) как функцию, зависящую только от $\sigma = \operatorname{sh} \psi$, т.е. $w_\varepsilon(x) = V_\varepsilon(\sigma)$, где $V_\varepsilon(\sigma)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left((1 + \sigma^2) \frac{\partial V}{\partial \sigma} \right) = 0$$

на интервале $0 < \sigma < \sqrt{a_\varepsilon^{-2} \varepsilon^2 - 1}$ и краевым условиям

$$V(0) = 0, \quad V(\sqrt{a_\varepsilon^{-2} \varepsilon^2 - 1}) = 1.$$

Итак,

$$w_\varepsilon(x) = V_\varepsilon(\operatorname{sh} \psi) = \frac{\operatorname{arctg} \operatorname{sh} \psi}{\operatorname{arctg} \operatorname{sh} \psi_\varepsilon}, \quad (8)$$

$$\operatorname{sh} \psi = \sqrt{\frac{|x|^2 - a_\varepsilon^2 + \sqrt{(a_\varepsilon^2 - |x|^2)^2 + 4x_1^2 a_\varepsilon^2}}{2a_\varepsilon^2}}, \quad (9)$$

$$\operatorname{sh} \psi_\varepsilon = \sqrt{a_\varepsilon^{-2} \varepsilon^2 - 1}. \quad (10)$$

Заметим, что в силу четности $w_\varepsilon(x)$ по x_1 имеем $\partial w_\varepsilon / \partial x_1 = 0$ при $x_1 = 0$, $a_\varepsilon^2 < x_2^2 + x_3^2 < \varepsilon^2$.

Учитывая это замечание, получим

$$\int_{T_\varepsilon^+} |\nabla w_\varepsilon|^2 dx = \int_{S_\varepsilon^+} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} ds, \quad (11)$$

где $T_\varepsilon^+ = T_\varepsilon \cap \{x_1 > 0\}$, $S_\varepsilon^+ = \partial T_\varepsilon \cap \{x_1 > 0\}$, ν – единичный вектор внешней нормали к ∂T_ε .

Так как $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – вектор, координаты которого имеют вид

$$\nu_1 = \frac{x_1}{\sqrt{|x|^2 + \alpha_\varepsilon(x_2^2 + x_3^2)}}, \quad \nu_i = \frac{x_i(1 - a_\varepsilon^2 \varepsilon^{-2})}{\sqrt{|x|^2 + \alpha_\varepsilon(x_2^2 + x_3^2)}}, \quad i = 2, 3,$$

где $\alpha_\varepsilon = -2a_\varepsilon^2 \varepsilon^{-2} + a_\varepsilon^4 \varepsilon^{-4}$ и

$$\left. \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_j} \right|_{\partial T_\varepsilon} = \frac{C_\varepsilon a_\varepsilon \varepsilon^{-3}}{4\sqrt{1 - a_\varepsilon^2 \varepsilon^{-2}}} I_{x_j}^\varepsilon \Big|_{\partial T_\varepsilon},$$

где

$$I^\varepsilon \equiv |x|^2 - a_\varepsilon^2 + \sqrt{(a_\varepsilon^2 - |x|^2)^2 + 4x_1^2 a_\varepsilon^2}, \quad C_\varepsilon \equiv \frac{1}{\operatorname{arctg} \operatorname{sh} \psi_\varepsilon},$$

то

$$\left. \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} \right|_{\partial T_\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{1 - a_\varepsilon^2 \varepsilon^{-2}}} \frac{C_\varepsilon a_\varepsilon \varepsilon^{-2}}{\sqrt{1 + a_\varepsilon^2 \varepsilon^{-4} x_1^2 / (1 - a_\varepsilon^2 \varepsilon^{-2})^2}}. \quad (12)$$

Из равенств (11), (12) и условия (6) следует, что

$$\int_{T_\varepsilon^+} |\nabla w_\varepsilon|^2 dx \leq K |\partial T_\varepsilon| \leq K \varepsilon^2. \quad (13)$$

Введем функцию $Q_\varepsilon(x)$, полагая

$$Q_\varepsilon(x) = \begin{cases} w_\varepsilon(x - P_\varepsilon^j), & x \in T_\varepsilon^j, \quad j = 1, 2, \dots, \\ 1, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^\infty \overline{T_\varepsilon^j}, \end{cases} \quad (14)$$

где $P_\varepsilon^j = (0, P_{\varepsilon,2}^j, P_{\varepsilon,3}^j)$ – координаты центра круга G_ε^j ,

$$T_\varepsilon^j = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \frac{x_1^2}{1 - a_\varepsilon^2 \varepsilon^{-2}} + (x_2 - P_{\varepsilon,2}^j)^2 + (x_3 - P_{\varepsilon,3}^j)^2 < \varepsilon^2 \right\}, \quad j = 1, 2, \dots.$$

Из определения $Q_\varepsilon(x)$ и оценки (13) выводим неравенство

$$\int_{\Omega} |\nabla Q_\varepsilon|^2 dx = \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{T_\varepsilon^{j,+}} |\nabla w_\varepsilon(x - P_\varepsilon^j)|^2 dx \leq KN(\varepsilon)\varepsilon^2 \leq K,$$

из которого следует, что

$$Q_\varepsilon \rightharpoonup 1 \quad \text{в } H_1(\Omega) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (15)$$

Положим в неравенстве (5) $v = \phi^+ + Q_\varepsilon(x)\phi^- \in K_\varepsilon$, где $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и обращается в нуль в окрестности границы Γ_2 , $\phi^+(x) = \sup(\phi(x), 0)$, $\phi^-(x) = \phi(x) - \phi^+(x)$. Получим

$$\int_{\Omega} \nabla[\phi^+ + Q_\varepsilon(x)\phi^-] \nabla[\phi^+ + Q_\varepsilon(x)\phi^- - u_\varepsilon] dx \geq \int_{\Omega} f(\phi^+ + Q_\varepsilon(x)\phi^- - u_\varepsilon) dx. \quad (16)$$

Обозначим левую часть неравенства (16) через L . Легко видеть, что L имеет вид

$$\begin{aligned} L \equiv & \int_{\Omega} |\nabla \phi^+|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla[Q_\varepsilon \phi^-]|^2 dx - \int_{\Omega} \nabla \phi^+ \nabla u_\varepsilon dx \\ & - \int_{\Omega} \nabla Q_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon \phi^-) dx + \int_{\Omega} u_\varepsilon \nabla Q_\varepsilon \nabla \phi^- dx - \int_{\Omega} Q_\varepsilon \nabla \phi^- \nabla u_\varepsilon dx. \end{aligned} \quad (17)$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla Q_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon \phi^-) dx &= - \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{G_\varepsilon^j} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_1} \phi^- u_\varepsilon dx_2 dx_3 + \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{\partial T_\varepsilon^j \cap \Omega} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} \phi^- u_\varepsilon ds, \\ \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_1} \Big|_{x \in G_\varepsilon^j} &> 0, \quad \phi^- \leq 0, \quad u_\varepsilon|_{G_\varepsilon^j} \geq 0, \end{aligned}$$

получим

$$\int_{\Omega} \nabla Q_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon \phi^-) dx \geq \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{\partial T_\varepsilon^j \cap \Omega} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} \phi^- u_\varepsilon ds. \quad (18)$$

Из (17) и (18) вытекает, что

$$\begin{aligned} L \leq & \int_{\Omega} |\nabla \phi^+|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla(Q_\varepsilon \phi^-)|^2 dx - \int_{\Omega} \nabla \phi^+ \nabla u_\varepsilon dx \\ & - \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{\partial T_\varepsilon^j \cap \Omega} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} \phi^- u_\varepsilon ds + \int_{\Omega} \nabla Q_\varepsilon \nabla \phi^- u_\varepsilon dx - \int_{\Omega} Q_\varepsilon \nabla \phi^- \nabla u_\varepsilon dx. \end{aligned} \quad (19)$$

Для получения усредненной задачи нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $\phi, g \in H_1(\Omega, \Gamma_2)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{\partial T_\varepsilon^j \cap \Omega} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} (x - P_\varepsilon^j) \phi g ds - C \int_{\Gamma_1} \phi g dx_2 dx_3 \right| \\ & \leq K \{ |a_\varepsilon \varepsilon^{-2} - C| + \sqrt{\varepsilon} \} \|g\|_{H_1(\Omega)} \|\phi\|_{H_1(\Omega)}, \end{aligned}$$

где ν – внешняя единичная нормаль к ∂T_ε^j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{\partial T_\varepsilon^j \cap \Omega} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} \phi g ds &= D_\varepsilon \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{\partial T_\varepsilon^j \cap \Omega} g \phi \left(1 + \frac{a_\varepsilon^2 \varepsilon^{-4} x_1^2}{(1 - a_\varepsilon^2 \varepsilon^{-2})^2} \right)^{-1/2} ds \\ &= D_\varepsilon \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{\partial T_\varepsilon^j \cap \Omega} g \phi \left(\frac{1 - a_\varepsilon^2 \varepsilon^{-2}}{1 - a_\varepsilon^2 \varepsilon^{-4} |\hat{x}|^2} \right)^{1/2} ds, \end{aligned} \quad (20)$$

где $D_\varepsilon = C_\varepsilon a_\varepsilon \varepsilon^{-2} (1 - a_\varepsilon^2 \varepsilon^{-2})^{-1/2}$, $\hat{x} = (x_2 - P_{\varepsilon,2}^j, x_3 - P_{\varepsilon,3}^j)$.

Пусть

$$Q = \{y \in R^3 : 0 < y_1 < 2, -1 < y_j < 1, j = 2, 3\}, \quad T^+ = \{y \in Q : |y| < 1\}.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу (см. рис. 3):

Рис. 3. Область $Q \setminus \overline{T^+}$

$$\Delta_y \xi = 0, \quad \text{если } y \in Q \setminus \overline{T^+},$$

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \right|_{\partial T^+ \cap Q} = 1, \quad \left. \frac{\partial \xi}{\partial y_1} \right|_{\partial Q \cap \{y_1=2\}} = -\mu, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на остальной границе } \partial Q. \quad (21)$$

Предположим, что

$$\frac{1}{|Q \setminus T^+|} \int_{Q \setminus T^+} \xi dy = 0.$$

Из условия разрешимости задачи (21) следует, что $\mu = \pi/2$.

Введем вектор-функцию $A^\varepsilon(x) = (A_1^\varepsilon(x), A_2^\varepsilon(x), A_3^\varepsilon(x))^t$,

$$A_1^\varepsilon(x) = \sqrt{1 - a_\varepsilon^2 \varepsilon^{-2}} \xi_{y_1} \left(\frac{x_1}{\varepsilon \sqrt{1 - a_\varepsilon^2 \varepsilon^{-2}}}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon} \right),$$

$$A_2^\varepsilon(x) = \xi_{y_2} \left(\frac{x_1}{\varepsilon \sqrt{1 - a_\varepsilon^2 \varepsilon^{-2}}}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon} \right), \quad A_3^\varepsilon(x) = \xi_{y_3} \left(\frac{x_1}{\varepsilon \sqrt{1 - a_\varepsilon^2 \varepsilon^{-2}}}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon} \right).$$

Имеем, что $\operatorname{div} A^\varepsilon(x) = 0$ при $x \in Y_\varepsilon$, где

$$Y_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \in (0, 2\varepsilon\sqrt{1 - a_\varepsilon^2\varepsilon^{-2}}), |x_j| < \varepsilon, j = 2, 3\} \setminus \overline{T_\varepsilon},$$

Учитывая определение $A^\varepsilon(x)$, получим

$$\int_{Y_\varepsilon} \operatorname{div}(A^\varepsilon \Phi_\varepsilon(x)) = \int_{Y_\varepsilon} A^\varepsilon(x) \nabla \Phi_\varepsilon(x) dx = \int_{\partial Y_\varepsilon} (A^\varepsilon, \nu) \Phi_\varepsilon(x) ds, \quad (22)$$

здесь

$$\Phi_\varepsilon(x) \equiv g(x) \phi(x) \left(\frac{1 - a_\varepsilon^2\varepsilon^{-2}}{1 - a_\varepsilon^2\varepsilon^{-4}|\widehat{x}|^2} \right)^{1/2}.$$

Заметим, что правая часть равенства (22) имеет вид

$$\int_{\partial Y_\varepsilon} (A^\varepsilon, \nu) \Phi_\varepsilon(x) ds = \sqrt{1 - a_\varepsilon^2\varepsilon^{-2}} \int_{\gamma_\varepsilon} \xi_{y_1} \left(2, \frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon} \right) \Phi_\varepsilon(x) ds + \int_{(\partial T_\varepsilon)^+} (A^\varepsilon, \nu) \Phi_\varepsilon ds, \quad (23)$$

где $(\partial T_\varepsilon)^+ = \partial T_\varepsilon \cap \{x : x_1 > 0\}$, $\gamma_\varepsilon = \partial Y_\varepsilon \cap \{x_1 = 2\varepsilon\sqrt{1 - a_\varepsilon^2\varepsilon^{-2}}\}$,

$$\begin{aligned} & \int_{(\partial T_\varepsilon)^+} (A^\varepsilon, \nu) \Phi_\varepsilon(x) ds \\ &= \int_{(\partial T_\varepsilon)^+} \sqrt{1 - a_\varepsilon^2\varepsilon^{-2}} \xi_{y_1} \left(\frac{x_1}{\varepsilon\sqrt{1 - a_\varepsilon^2\varepsilon^{-2}}}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon} \right) \frac{-y_1}{\sqrt{1 - a_\varepsilon^2\varepsilon^{-2}|\widehat{y}|^2}} \Phi_\varepsilon(x) ds \\ & \quad + \int_{(\partial T_\varepsilon)^+} \xi_{y_2} \left(\frac{x_1}{\varepsilon\sqrt{1 - a_\varepsilon^2\varepsilon^{-2}}}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon} \right) \frac{-y_2\sqrt{1 - a_\varepsilon^2\varepsilon^{-2}}}{\sqrt{1 - a_\varepsilon^2\varepsilon^{-2}|\widehat{y}|^2}} \Phi_\varepsilon(x) ds \\ & \quad + \int_{(\partial T_\varepsilon)^+} \xi_{y_3} \left(\frac{x_1}{\varepsilon\sqrt{1 - a_\varepsilon^2\varepsilon^{-2}}}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon} \right) \frac{-y_3\sqrt{1 - a_\varepsilon^2\varepsilon^{-2}}}{\sqrt{1 - a_\varepsilon^2\varepsilon^{-2}|\widehat{y}|^2}} \Phi_\varepsilon ds \\ &= \sqrt{1 - a_\varepsilon^2\varepsilon^{-2}} \int_{(\partial T_\varepsilon)^+} \frac{\Phi_\varepsilon(x)}{\sqrt{1 - a_\varepsilon^2\varepsilon^{-2}|\widehat{y}|^2}} \frac{\partial \xi}{\partial \nu_y} ds \\ &= \sqrt{1 - a_\varepsilon^2\varepsilon^{-2}} \int_{(\partial T_\varepsilon)^+} \frac{\Phi_\varepsilon(x)}{\sqrt{1 - a_\varepsilon^2\varepsilon^{-2}|\widehat{y}|^2}} ds, \quad \widehat{y} = \frac{\widehat{x}}{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (24)$$

Итак, из (22)–(24) следует

$$D_\varepsilon \sqrt{1 - a_\varepsilon^2\varepsilon^{-2}} \left\{ \int_{(\partial T_\varepsilon)^+} \frac{\Phi_\varepsilon(x)}{\sqrt{1 - a_\varepsilon^2\varepsilon^{-2}|\widehat{y}|^2}} ds - \mu \int_{\gamma_\varepsilon} \Phi_\varepsilon(x) ds \right\} = D_\varepsilon \int_{Y_\varepsilon} A^\varepsilon(x) \nabla \Phi_\varepsilon(x) dx. \quad (25)$$

Из (25) выводим для $(\partial T_\varepsilon^j)^+ = \partial T_\varepsilon^j \cap \Omega$, $j = 1, \dots, N(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} & D_\varepsilon \sqrt{1 - a_\varepsilon^2\varepsilon^{-2}} \left\{ \int_{(\partial T_\varepsilon^j)^+} \frac{\Phi_\varepsilon(x)}{\sqrt{1 - a_\varepsilon^2\varepsilon^{-4}[(x_2 - P_{2,\varepsilon}^j)^2 + (x_3 - P_{3,\varepsilon}^j)^2]}} ds \right. \\ & \quad \left. - \mu \int_{\gamma_\varepsilon^j} \Phi_\varepsilon^j(x) dx_2 dx_3 \right\} \\ &= D_\varepsilon \int_{Y_\varepsilon^j} A^{\varepsilon,j}(x) \nabla \Phi_\varepsilon^j(x) dx, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$A^{\varepsilon,j}(x) = A^{\varepsilon}(x_1, x_2 - P_{2,\varepsilon}^j, x_3 - P_{3,\varepsilon}^j), \quad \Phi_{\varepsilon}^j(x) = g(x)\phi(x) \left(\frac{1 - a_{\varepsilon}^2 \varepsilon^{-2}}{1 - a_{\varepsilon}^2 \varepsilon^{-4} |\hat{x}^j|^2} \right)^{1/2},$$

$$\hat{x}^j = (x_2 - P_{2,\varepsilon}^j, x_3 - P_{3,\varepsilon}^j),$$

$$Y_{\varepsilon}^j = \{x \in R^3 : x_1 \in (0, 2\varepsilon\sqrt{1 - a_{\varepsilon}^2 \varepsilon^{-2}}), |x_i - P_i^j| < \varepsilon, i = 2, 3\},$$

$$\gamma_{\varepsilon}^j = \partial Y_{\varepsilon}^j \cap \{x_1 = 2\varepsilon\sqrt{1 - a_{\varepsilon}^2 \varepsilon^{-2}}\}, \quad \bigcup_{j=1}^{N(\varepsilon)} \gamma_{\varepsilon}^j = \hat{\Gamma}_1^{\varepsilon}, \quad j = 1, \dots, N(\varepsilon).$$

Учитывая, что

$$\int_{(\partial T_{\varepsilon}^j)^+} \frac{\Phi_{\varepsilon}^j(x)}{\sqrt{1 - a_{\varepsilon}^2 \varepsilon^{-2} |\hat{y}^j|^2}} ds - \int_{(\partial T_{\varepsilon}^j)^+} \Phi_{\varepsilon}^j(x) ds = \int_{(\partial T_{\varepsilon}^j)^+} \Phi_{\varepsilon}^j(x) \frac{1 - \sqrt{1 - a_{\varepsilon}^2 \varepsilon^{-2} |\hat{y}^j|^2}}{\sqrt{1 - a_{\varepsilon}^2 \varepsilon^{-2} |\hat{y}^j|^2}} ds,$$

$\hat{y}^j = \varepsilon^{-1} \hat{x}^j$, получим из (26)

$$\begin{aligned} D_{\varepsilon} \sqrt{1 - a_{\varepsilon}^2 \varepsilon^{-2}} & \left\{ \int_{(\partial T_{\varepsilon}^j)^+} \Phi_{\varepsilon}^j(x) ds - \mu \int_{\gamma_{\varepsilon}^j} \Phi_{\varepsilon}^j(x) d\hat{x} \right\} \\ & = -D_{\varepsilon} \sqrt{1 - a_{\varepsilon}^2 \varepsilon^{-2}} \int_{(\partial T_{\varepsilon}^j)^+} \Phi_{\varepsilon}^j(x) \frac{1 - \sqrt{1 - a_{\varepsilon}^2 \varepsilon^{-2} |\hat{y}^j|^2}}{\sqrt{1 - a_{\varepsilon}^2 \varepsilon^{-2} |\hat{y}^j|^2}} ds \\ & \quad + D_{\varepsilon} \int_{Y_{\varepsilon}^j} A^{\varepsilon,j}(x) \nabla \Phi_{\varepsilon}^j(x) dx. \end{aligned} \quad (27)$$

Заметим, что так как $|\hat{y}^j| \leq 1$, $j = 1, \dots, N(\varepsilon)$, то из (26) выводим

$$\begin{aligned} D_{\varepsilon} \sqrt{1 - a_{\varepsilon}^2 \varepsilon^{-2}} & \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{(\partial T_{\varepsilon}^j)^+} |\Phi_{\varepsilon}^j| \frac{1 - \sqrt{1 - a_{\varepsilon}^2 \varepsilon^{-2} |\hat{y}^j|^2}}{\sqrt{1 - a_{\varepsilon}^2 \varepsilon^{-2} |\hat{y}^j|^2}} ds \\ & \leq K a_{\varepsilon}^2 \varepsilon^{-2} \left\{ \int_{\Gamma_1} |g| |\phi| d\hat{x} + \int_{\Pi_{\varepsilon}} (|\nabla(g\phi)| + |g\phi|) d\hat{x} \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

Из (27), (28) следует

$$\begin{aligned} & \left| D_{\varepsilon} \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{(\partial T_{\varepsilon}^j)^+} \Phi_{\varepsilon}^j(x) ds - D_{\varepsilon} \mu \int_{\Gamma_1} g\phi d\hat{x} \right| \\ & \leq D_{\varepsilon} \sqrt{1 - a_{\varepsilon}^2 \varepsilon^{-2}} \left| \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{(\partial T_{\varepsilon}^j)^+} \Phi_{\varepsilon}^j(x) ds - \frac{1}{\sqrt{1 - a_{\varepsilon}^2 \varepsilon^{-2}}} \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{(\partial T_{\varepsilon}^j)^+} \Phi_{\varepsilon}^j(x) ds \right| \\ & \quad + D_{\varepsilon} \sqrt{1 - a_{\varepsilon}^2 \varepsilon^{-2}} \left| \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{(\partial T_{\varepsilon}^j)^+} \Phi_{\varepsilon}^j ds - \mu \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{\gamma_{\varepsilon}^j} g\phi ds \right| \\ & \quad + \left| D_{\varepsilon} \mu \left(\sqrt{1 - a_{\varepsilon}^2 \varepsilon^{-2}} \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{\gamma_{\varepsilon}^j} g\phi ds - \int_{\Gamma_1} g\phi d\hat{x} \right) \right| \equiv J_{\varepsilon}^1 + J_{\varepsilon}^2 + J_{\varepsilon}^3. \end{aligned} \quad (29)$$

Оценим J_ε^j , $j = 1, 2, 3$. Имеем из (28)

$$\begin{aligned} J_\varepsilon^1 &\leq K a_\varepsilon^2 \varepsilon^{-2} \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{(\partial T_\varepsilon^j)^+} |\Phi_\varepsilon^j(x)| ds \\ &\leq K a_\varepsilon^2 \varepsilon^{-2} \left\{ \int_{\Gamma_1} |g| |\phi| d\hat{x} + \int_{\Pi_\varepsilon} (|\nabla(g\phi)| + |g\phi|) dx \right\} \\ &\leq K a_\varepsilon^2 \varepsilon^{-2} \|g\|_{H_1(\Omega)} \|\phi\|_{H_1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Из (27) выводим

$$J_\varepsilon^2 \leq K a_\varepsilon^2 \varepsilon^{-2} \|g\|_{H_1(\Omega)} \|\phi\|_{H_1(\Omega)}, \quad (31)$$

и, аналогично,

$$J_\varepsilon^3 \leq K \sqrt{\varepsilon} \|g\|_{H_1(\Omega)} \|\phi\|_{H_1(\Omega)}. \quad (32)$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что

$$|D_\varepsilon \mu - C| \int_{\Gamma_1} |\phi g| d\hat{x} \leq K \{|a_\varepsilon \varepsilon^{-2} - C| + \sqrt{\varepsilon}\} \|\phi\|_{H_1(\Omega)} \|g\|_{H_1(\Omega)}. \quad (33)$$

Итак, лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $h \in H_1(\Omega)$. Тогда

$$\int_{\Omega} |\nabla Q_\varepsilon|^2 h^2 dx \leq K \|h\|_{H_1(\Omega)}^2. \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, справедливо равенство

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} (\nabla Q_\varepsilon, \nabla h) Q_\varepsilon h dx &= 2 \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{(T_\varepsilon^j)^+} (\nabla w_\varepsilon(x - P_\varepsilon^j), \nabla h) w_\varepsilon(x - P_\varepsilon^j) h(x) dx \\ &= - \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{(T_\varepsilon^j)^+} |\nabla w_\varepsilon(x - P_\varepsilon^j)|^2 h^2(x) dx \\ &\quad + \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{(\partial T_\varepsilon^j)^+} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu}(x - P_\varepsilon^j) h^2 ds. \end{aligned} \quad (35)$$

Оценим левую часть равенства (35), используя элементарное неравенство $ab \leq \delta a^2 + C_\delta b^2$, $\delta \in (0, 1)$. Получим

$$\int_{\Omega} |\nabla Q_\varepsilon|^2 h^2 dx \leq K \left\{ \int_{\Omega} |\nabla h|^2 dx + \left| \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{(\partial T_\varepsilon^j)^+} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu}(x - P_\varepsilon^j) h^2 ds \right| \right\}.$$

Применяя лемму 1 к последнему выражению в правой части этого неравенства, выводим оценку (34). Лемма 2 доказана.

В силу оценки (3) существует подпоследовательность ε (оставим для нее прежнее обозначение) такая, что $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \in H_1(\Omega, \Gamma_2)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Применяя леммы 1, 2,

оценки (14), (16), (19), получим, что u_0 удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \phi^+|^2 dx - \int_{\Omega} \nabla \phi^+ \nabla u_0 dx - \int_{\Omega} \nabla \phi^- \nabla u_0 dx \\ + \int_{\Omega} |\nabla \phi^-|^2 dx + C \int_{\Gamma_1} (\phi - u_0) \phi^- d\hat{x} \geq \int_{\Omega} f(\phi - u_0) dx, \end{aligned}$$

где ϕ – произвольная функция из $C^\infty(\bar{\Omega})$, обращающаяся в нуль в окрестности Γ_2 . Следовательно, можно считать, что $\phi \in H_1(\Omega, \Gamma_2)$.

Последнее неравенство легко преобразовать к виду

$$\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx - \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla u_0 dx + C \int_{\Gamma_1} (\phi - u_0) \phi^- d\hat{x} \geq \int_{\Omega} f(\phi - u_0) dx. \quad (36)$$

Полагая в (36) $\phi = u_0 + \lambda g$, где $g \in H_1(\Omega, \Gamma_2)$, и устремляя λ к нулю, сначала считая его положительным, а потом – отрицательным, получим интегральное тождество для u_0 :

$$\int_{\Omega} \nabla u_0 \nabla g dx + C \int_{\Gamma_1} u_0^- g d\hat{x} = \int_{\Omega} f g dx, \quad (37)$$

где g – произвольный элемент из пространства $H_1(\Omega, \Gamma_2)$.

Итак, $u_0 \in H_1(\Omega, \Gamma_2)$ – обобщенное решение нелинейной краевой задачи

$$\Delta u_0 = -f, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + C u_0^- = 0, \quad x \in \Gamma_1, \quad u_0 = 0, \quad x \in \Gamma_2. \quad (38)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Во всех рассуждениях условие $u_\varepsilon \geq 0$ на G_ε легко заменить на более общее условие $u_\varepsilon \geq h$ на G_ε , где $h \in H_1(\Omega, \Gamma_2)$. Из только что приведенного рассуждения следует, что $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ в $H_1(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $u_0 \in H_1(\Omega, \Gamma_2)$ – обобщенное решение задачи

$$\Delta u_0 = -f, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} + C(u_0 - h)^- = 0, \quad x \in \Gamma_1, \quad u_0 = 0, \quad x \in \Gamma_2.$$

Докажем, что

$$\|u_\varepsilon - u_0^+ - Q_\varepsilon u_0^-\|_{H_1(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Полагая в неравенстве (2) $v = u_0^+ + Q_\varepsilon u_0^-$, а в интегральном тождестве (37) – $g = u_0^+ + Q_\varepsilon u_0^- - u_\varepsilon$ и вычитая из (37) выражение (2), получим

$$\begin{aligned} \|\nabla(u_0^+ + Q_\varepsilon u_0^- - u_\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ \leq \int_{\Omega} |\nabla(u_0^-(Q_\varepsilon - 1))|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla[u_0^-(Q_\varepsilon - 1)] \nabla(u_0 - u_\varepsilon) dx \\ - C \int_{\Gamma_1} u_0^-(Q_\varepsilon u_0 - u_\varepsilon) d\hat{x}. \end{aligned} \quad (39)$$

Обозначим правую часть неравенства (39) R_ε и покажем, что $R_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} R_\varepsilon &= \int_{\Omega} |\nabla u_0^-|^2 (Q_\varepsilon - 1)^2 dx + \int_{\Omega} |u_0^-|^2 |\nabla Q_\varepsilon|^2 dx \\ &\quad + 2 \int_{\Omega} u_0 (Q_\varepsilon - 1) \nabla u_0^- \nabla Q_\varepsilon dx + \int_{\Omega} (Q_\varepsilon - 1) \nabla u_0^- \nabla (u_0 - u_\varepsilon) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} u_0^- \nabla Q_\varepsilon \nabla u_0 dx - \int_{\Omega} u_0^- \nabla Q_\varepsilon \nabla u_\varepsilon dx - C \int_{\Gamma_1} u_0^- (Q_\varepsilon u_0 - u_\varepsilon) d\widehat{x} \\ &= L_\varepsilon + \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{\partial(T_\varepsilon^j \cap \Omega)} \frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial \nu} Q_\varepsilon |u_0^-|^2 ds - \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{\partial(T_\varepsilon^j \cap \Omega)} \frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial \nu} u_0^- u_\varepsilon ds, \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} L_\varepsilon &= \int_{\Omega} |\nabla u_0^-|^2 (Q_\varepsilon - 1)^2 dx - \int_{\Omega} u_0^- \nabla u_0 \nabla Q_\varepsilon dx + \int_{\Omega} u_\varepsilon \nabla Q_\varepsilon \nabla u_0^- dx \\ &\quad + \int_{\Omega} (Q_\varepsilon - 1) \nabla u_0^- \nabla (u_0 - u_\varepsilon) dx - C \int_{\Gamma_1} u_0^- (Q_\varepsilon u_0 - u_\varepsilon) d\widehat{x}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \int_{\partial(T_\varepsilon^j \cap \Omega)} \frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial \nu} Q_\varepsilon |u_0^-|^2 ds &= \int_{(\partial T_\varepsilon^j)^+} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} (x - P_\varepsilon^j) |u_0^-|^2 ds, \\ \int_{\partial(T_\varepsilon^j \cap \Omega)} \frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial \nu} u_0^- u_\varepsilon ds &= \int_{(\partial T_\varepsilon^j)^+} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} (x - P_\varepsilon^j) u_0^- u_\varepsilon ds - \int_{G_\varepsilon^j} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_1} u_0^- u_\varepsilon d\widehat{x}, \\ \int_{G_\varepsilon^j} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_1} u_0^- u_\varepsilon d\widehat{x} &\leq 0, \end{aligned}$$

получим

$$0 \leq R_\varepsilon \leq L_\varepsilon + \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{(\partial T_\varepsilon^j)^+} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} (x - P_\varepsilon^j) |u_0^-|^2 ds - \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{(\partial T_\varepsilon^j)^+} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} (x - P_\varepsilon^j) u_0^- u_\varepsilon ds. \quad (41)$$

Так как $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ в $H_1(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то в силу теоремы вложения имеем $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ в $L_q(\Gamma_1)$, где $q < 4$. Отсюда и из леммы 1 следует

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{(\partial T_\varepsilon^j)^+} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} (x - P_\varepsilon^j) |u_0^-|^2 ds - \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{(\partial T_\varepsilon^j)^+} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} (x - P_\varepsilon^j) u_0^- u_\varepsilon ds \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (42)$$

Осталось показать, что $L_\varepsilon \rightarrow 0$, если $\varepsilon \rightarrow 0$. Действительно, аналогично выводим

$$\int_{\Gamma_1} u_0^- (Q_\varepsilon u_0 - u_\varepsilon) d\widehat{x} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (43)$$

Кроме того, из леммы 2 имеем

$$\left| \int_{\Omega} u_0^- \nabla u_0 \nabla Q_\varepsilon dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |u_0^-|^2 |\nabla Q_\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} \|\nabla u_0\|_{L_2(\Pi_\varepsilon)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (44)$$

$$\left| \int_{\Omega} u_\varepsilon \nabla Q_\varepsilon \nabla u_0^- dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} u_\varepsilon^2 |\nabla Q_\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} \|\nabla u_0^-\|_{L_2(\Pi_\varepsilon)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (45)$$

Легко также видеть, что

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0^-|^2 (Q_\varepsilon - 1)^2 dx \leq \|\nabla u_0\|_{L_2(\Pi_\varepsilon)}^2 \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (46)$$

$$\left| \int_{\Omega} (Q_\varepsilon - 1) \nabla u_0^- \nabla (u_0 - u_\varepsilon) dx \right| \leq \|u_0 - u_\varepsilon\|_{H_1(\Omega)} \|\nabla u_0^-\|_{L_\varepsilon(\Pi_\varepsilon)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (47)$$

Из оценок (43)–(47) выводим, что $L_\varepsilon \rightarrow 0$, если $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, из (41)–(47) имеем $R_\varepsilon \rightarrow 0$.

Итак, доказана

ТЕОРЕМА. Пусть $u_\varepsilon \in K_\varepsilon$ – решение вариационного неравенства (2), а $u_0 \in H_1(\Omega, \Gamma_1)$ – обобщенное решение задачи (38). Тогда, если выполнено условие (6), то $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ в $H_1(\Omega)$ и

$$\|u_\varepsilon - Q_\varepsilon u_0^- - u_0^+\|_{H_1(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где функция $Q_\varepsilon(x)$ задана равенством (14).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если предположить, что u_0 не только принадлежит $H_1(\Omega)$, но и удовлетворяет, например, условию $|\nabla u_0| \leq M = \text{const}$ в Ω , то из (39), (40) и лемм 1 и 2 можно вывести оценку скорости сходимости u_ε к u_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} & \|\nabla(u_0^+ + Q_\varepsilon u_0^- - u_\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ & \leq K \left\{ \int_{\Pi_\varepsilon} |\nabla u_0^-|^2 dx + \left| \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \int_{\partial(T_\varepsilon^j \cap \Omega)} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \nu} (x - P_\varepsilon^j) u_0^- (Q_\varepsilon u_0 - u_\varepsilon) ds \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - C \int_{\Gamma_1} u_0^- (Q_\varepsilon u_0 - u_\varepsilon) d\hat{x} \right| \right\} \\ & \leq K \{ |a_\varepsilon \varepsilon^{-2} - C| + \sqrt{\varepsilon} \}. \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Damlamian, Li Ta-Tsien, “Boundary homogenization for elliptic problems”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **66**:4 (1987), 351–361.
- [2] Г. А. Чечкин, “Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий”, *Матем. сб.*, **184**:6 (1993), 99–150.
- [3] Р. Р. Гадыльшин, “О краевой задаче для лапласиана с быстро меняющимися граничными условиями”, *Докл. РАН*, **362**:4 (1998), 456–459.
- [4] D. I. Borisov, “On a model boundary value problem for Laplacian with frequently alternating type of boundary condition”, *Asymptot. Anal.*, **35**:1 (2003), 1–26.
- [5] И. Экланд, Р. Тетам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М., 1979.

М. Н. Зубова

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Т. А. Шапошникова

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

22.12.2006

Исправленный вариант

03.04.2007