Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Шерстюков, О регулярности роста канонических произведений с вещественными нулями, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 4, 621–630

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3816>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:26:21

О регулярности роста канонических произведений с вещественными нулями

В. Б. Шерстюков

Выводится один признак полной регулярности роста канонического произведения с вещественными симметричными нулями, использующий обобщение понятия индекса конденсации последовательности положительных чисел конечной верхней плотности.

Библиография: 12 названий.

Введение. Объектом исследования всюду в настоящей работе является бесконечное произведение Вейерштрасса

$$\mathcal{L}(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right), \quad (1)$$

в котором $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – возрастающая последовательность положительных чисел с конечной верхней плотностью $D(\Lambda) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (k/\lambda_k)$. Каноническое произведение (1) в этом случае определяет целую функцию экспоненциального типа (ц.ф.э.т.), который удовлетворяет неравенству [1]:

$$\sigma[\mathcal{L}] := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \max\{|\mathcal{L}(\lambda)| : |\lambda| \leq r\}}{r} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + r^2/\lambda_k^2)}{r} \leq \pi D(\Lambda).$$

В приложениях к целому ряду задач комплексного анализа важную роль играют оценки снизу функции (1) на вещественной оси. При этом существенно используется величина

$$\delta(\Lambda) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_k} \ln \frac{1}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|},$$

получившая название *индекса конденсации* последовательности Λ [2]. Хорошо известно, что если шаг последовательности $h(\Lambda) := \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda_{k+1} - \lambda_k)$ положителен и Λ имеет плотность $D(\Lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} (k/\lambda_k)$, то $\delta(\Lambda) = 0$. Как показано в диссертации [3], всегда $\delta(\Lambda) \geq 0$. Нам понадобится следующий результат, установленный в [3; гл. 1].

ТЕОРЕМА А. Пусть $\rho(x) = \min_{k \in \mathbb{Z}} |x - \lambda_k|$, $\lambda_{-k} = \lambda_k$, $\widehat{\mathcal{L}}(x) = |\mathcal{L}(x)|/\rho(x)$ и

$$\widehat{\delta}(\Lambda) = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{\widehat{\mathcal{L}}(x)}.$$

Тогда имеет место равенство $\delta(\Lambda) = \widehat{\delta}(\Lambda) (\geq 0)$.

Эта теорема позволяет дать в определенном смысле неумлучшаемую оценку снизу модуля канонического произведения (1) на вещественной оси (постоянную $\delta(\Lambda)$ в ней нельзя уменьшить):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall |x| > x_0(\Lambda, \varepsilon) \quad |\mathcal{L}(x)| \geq \rho(x) \cdot \exp(-(\delta(\Lambda) + \varepsilon)|x|). \quad (2)$$

Уточнение оценки (2), разумеется, возможно только после введения в нее растущего более медленно, чем $|x|$, веса $\omega(|x|)$ и связанного с ним индекса конденсации последовательности Λ , о чем речь пойдет ниже.

Если $\delta(\Lambda) = 0$ и индикаторная диаграмма функции $\mathcal{L}(\lambda)$ совпадает с отрезком, то из оценки (2) можно вывести полную регулярность роста $\mathcal{L}(\lambda)$ на вещественной оси [4; теорема 1]. При этом ц.ф.э.т. $L(\lambda)$ называется *функцией вполне регулярного роста* (в.р.р.) на луче $\arg \lambda = \theta$, если [5] существует

$$\lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ r \notin E}} \left(\frac{\ln |L(re^{i\theta})|}{r} \right)$$

для некоторого множества E с

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\text{mes}(E \cap (0, r))}{r} = 0.$$

Будем, как обычно, называть $L(\lambda)$ ц.ф.э.т.в.р.р., если она имеет вполне регулярный рост на любом луче, исходящем из начала координат. Для канонического произведения (1) наличие в.р.р. равносильно существованию плотности у последовательности Λ .

Построенный в работе [6] пример указывает на существование функций $\mathcal{L}(\lambda)$ вида (1) со свойством $\delta(\Lambda) = 0$, но имеющих в.р.р. только на лучах $\arg \lambda = 0$ и $\arg \lambda = \pi$. С другой стороны, в заметках автора [4], [7] в терминах роста последовательности $\{1/L'(\lambda_k)\}_{k=1}^{\infty}$ установлен, в частности, один признак полной регулярности роста ц.ф.э.т. $L(\lambda)$ с простыми вещественными нулями λ_k . Применительно к каноническому произведению (1) его можно сформулировать так ([7; следствие теоремы 2]):

$$\frac{1}{\mathcal{L}'(\lambda_k)} = O(\lambda_k^\alpha), \quad k \rightarrow \infty, \quad \alpha > 0, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(\lambda) - \text{функция в.р.р.}$$

Под знаком O можно поместить также функцию нулевого экспоненциального типа (т.е. принадлежащую классу $[1; 0]$) со специальными свойствами, описанными в [4]. При обсуждении этого результата во время доклада автора на научном семинаре под руководством проф. Седлецкого в МГУ А. Ю. Поповым была высказана гипотеза о справедливости указанной импликации при более слабой посылке

$$\frac{1}{\mathcal{L}'(\lambda_k)} = O(\exp(\omega(\lambda_k))), \quad k \rightarrow \infty,$$

в которой функцию $\omega(x)$ при некоторых естественных ограничениях можно подчинить лишь условию $\int_1^{+\infty} \omega(x)/x^2 dx < +\infty$. Основной результат настоящей статьи подтверждает это предположение. Для его точной формулировки потребуются некоторые вспомогательные определения и утверждения.

Введем для последовательности Λ положительных нулей канонического произведения (1) и произвольной функции $\omega(x): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ следующую характеристику, называемую в дальнейшем *индексом ω -конденсации*:

$$\delta(\omega, \Lambda) := \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega(\lambda_k)} \ln \frac{1}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|}.$$

Свяжем также с функцией $\omega(x)$ величину

$$\widehat{\delta}(\omega, \Lambda) = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\omega(x)} \ln \frac{1}{\widehat{\mathcal{L}}(x)},$$

характеризующую скорость убывания функции $\mathcal{L}(x)$ вне “малых” окрестностей ее нулей. В случае $\omega(x) = x$ получаем уже известные характеристики $\delta(\Lambda)$ и $\widehat{\delta}(\Lambda)$. Если $x \asymp \omega(x)$, $x \rightarrow +\infty$ (т.е. отношение $\omega(x)/x$ отграничено от нуля и бесконечности), то величины $\delta(\Lambda)$ и $\delta(\omega, \Lambda)$ равны нулю; конечны положительны; обращаются в бесконечность одновременно. Отметим, что последовательность с положительным шагом h и конечной верхней плотностью D имеет конечный индекс конденсации $\delta(\Lambda)$. Из точной оценки $\delta(\Lambda)$ при фиксированных $h > 0$ и $0 < D \leq h^{-1}$, полученной в [3] (см. также [8]), следует, что даже при фиксированном $D > 0$ величина

$$\sup \left\{ \delta(\Lambda) : 0 < h = h(\Lambda) \leq \frac{1}{D}, D(\Lambda) = D \right\} \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad h \rightarrow +0.$$

Пусть $\omega(x): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условиям:

- a) $\omega(x) \nearrow +\infty$, $4x \rightarrow +\infty$;
- b) $\ln x = o(\omega(x))$, $x \rightarrow +\infty$;
- c) $\omega(x)$ выпукла вверх на некотором луче из $\mathbb{R}_+$.

Будем для краткости называть функцию $\omega(x)$ *весом*, что несколько отличается от принятого в зарубежной литературе понятия весовой функции (см., например, [9]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ – возрастающая последовательность положительных чисел, имеющая конечную верхнюю плотность; функция $\omega(x): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условиям а)–с), т.е. является *весом*. Если $\delta(\omega, \Lambda) \geq 0$, то справедливо равенство $\delta(\omega, \Lambda) = \widehat{\delta}(\omega, \Lambda)$.

Центральный результат статьи заключен в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. Пусть последовательность Λ и функция $\omega(x)$ те же, что и в теореме 1, и, кроме того, вес ω удовлетворяет дополнительному условию

- d) $\int_1^{+\infty} \omega(x)/x^2 dx < +\infty$.

Пусть, далее, индикаторная диаграмма канонического произведения $\mathcal{L}(\lambda)$ является отрезком $[-id, id]$, $d > 0$, мнимой оси. Если индекс ω -конденсации последовательности Λ конечен и неотрицателен ($0 \leq \delta(\omega, \Lambda) < +\infty$), то $\mathcal{L}(\lambda)$ – функция в.р.р.

Успех в доказательстве теоремы 2 достигается последовательным применением приведенного выше обобщения теоремы А и одного известного факта о максимальной скорости убывания вдоль вещественной оси финитного преобразования Фурье (см. ниже теорему В).

ЗАМЕЧАНИЕ. Весьма вероятно, что требование на индикаторную диаграмму функции $\mathcal{L}(\Lambda)$ в условии теоремы 2 можно снять, т.е. показать, что эта индикаторная диаграмма будет отрезком мнимой оси, если выполняются а)–d) и $0 \leq \delta(\omega, \Lambda) < +\infty$. Однако, доказательством такого утверждения автор не располагает.

ТЕОРЕМА В [10; с. 52], [11; с. 79]. Пусть $\omega(x)$ – положительная неубывающая функция ($x \geq 0$), удовлетворяющая условию d). Тогда для любого $a > 0$ найдется четная целая функция $F(\lambda)$ вида

$$F(\lambda) = \int_{-a}^a e^{i\lambda t} d\sigma(t), \quad \text{var } \sigma(t) < \infty,$$

удовлетворяющая оценке

$$|F(x)| \leq \exp(-\omega(|x|)), \quad |x| > x_0.$$

1. Доказательство теоремы 1. Довольно прозрачное в идейном плане доказательство теоремы А, предложенное в [3], является громоздким в своей технической части. Сохраняя с соответствующими изменениями его схему, мы все же считаем целесообразным привести полное доказательство теоремы 1, так как она представляет, на наш взгляд, самостоятельный интерес. Отметим еще, что для последовательности Λ с положительным шагом теорема А установлена несколько иначе в [12; предложение 2]. Неравенство $\delta(\omega, \Lambda) \leq \widehat{\delta}(\omega, \Lambda)$ следует из соотношения $\widehat{\mathcal{L}}(\lambda_k) = |\mathcal{L}'(\lambda_k)|$, $k \in \mathbb{N}$, так как

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\omega(\lambda_k)} \ln \frac{1}{\widehat{\mathcal{L}}(\lambda_k)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\omega(x)} \ln \frac{1}{\widehat{\mathcal{L}}(x)}.$$

Для доказательства неравенства $\widehat{\delta}(\omega, \Lambda) \leq \delta(\omega, \Lambda)$ достаточно, очевидно, считать $\delta(\omega, \Lambda) < +\infty$ и для произвольного числа $\gamma > \delta(\omega, \Lambda) \geq 0$ подобрать последовательность $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ так, чтобы $\gamma_k \rightarrow \gamma$ при $k \rightarrow \infty$ и

$$\ln \widehat{\mathcal{L}}(x) \geq -\gamma_k \omega(x) \quad \forall x \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]. \quad (3)$$

Будем устанавливать (3) в несколько этапов. Имеем

$$\forall k > k_0 \quad \ln |\mathcal{L}'(\lambda_k)| = \ln \widehat{\mathcal{L}}(\lambda_k) > -\gamma \omega(\lambda_k).$$

Положив

$$\mathcal{L}_k(x) = \prod_{\substack{n \neq k \\ n \neq k+1}} \left(1 - \frac{x^2}{\lambda_n^2}\right),$$

получим

$$\begin{aligned} \ln |\mathcal{L}_k(\lambda_k)| &= \ln |\mathcal{L}'(\lambda_k)| + \ln \frac{\lambda_k}{2} - \ln \left|1 - \frac{\lambda_k^2}{\lambda_{k+1}^2}\right| \\ &> -\gamma \omega(\lambda_k) + \ln \frac{\lambda_k}{2} - \ln \left|1 - \frac{\lambda_k^2}{\lambda_{k+1}^2}\right|, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\ln |\mathcal{L}_k(\lambda_{k+1})| > -\gamma \omega(\lambda_{k+1}) + \ln \frac{\lambda_{k+1}}{2} - \ln \left|1 - \frac{\lambda_{k+1}^2}{\lambda_k^2}\right|$$

для $k > k_0$.

Возможны следующие ситуации:

- I) $\lambda_{k+1} \leq 2\lambda_k$;
- II) $\lambda_{k+1} > 2\lambda_k$.

Рассмотрим случай I) Пусть $a_k = \ln |\lambda_{k+1} - \lambda_k|$. Тогда из (4) получаем

$$\begin{aligned} \ln |\mathcal{L}_k(\lambda_k)| &> -\gamma\omega(\lambda_k) - a_k + \ln \frac{\lambda_k \lambda_{k+1}^2}{2(\lambda_k + \lambda_{k+1})}, \\ \ln |\mathcal{L}_k(\lambda_{k+1})| &> -\gamma\omega(\lambda_{k+1}) - a_k + \ln \frac{\lambda_{k+1} \lambda_k^2}{2(\lambda_k + \lambda_{k+1})} \end{aligned}$$

для $k > k_0$.

Поскольку при $\lambda_k < \lambda_{k+1} \leq 2\lambda_k$ верно

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} > \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} > \frac{1}{3},$$

то для $k > k_0$

$$\begin{aligned} \ln |\mathcal{L}_k(\lambda_k)| &> -\gamma\omega(\lambda_k) - a_k + \ln \frac{\lambda_k \lambda_{k+1}}{4}, \\ \ln |\mathcal{L}_k(\lambda_{k+1})| &> -\gamma\omega(\lambda_{k+1}) - a_k + \ln \frac{\lambda_k \lambda_{k+1}}{6}. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$l(x) = -\gamma\omega(x) - a_k + \ln \frac{\lambda_k \lambda_{k+1}}{6}.$$

Из $\gamma > 0$ и условия с) из определения веса следует, что $l(x)$ является выпуклой вниз на некотором луче $\mathbb{R}_+$. В свою очередь функция $\ln |\mathcal{L}_k(x)|$ выпукла вверх на $(\lambda_{k-1}, \lambda_{k+2})$, что доказано в [3]. Так как при всех $k > k_0$ $\ln |\mathcal{L}_k(\lambda_k)| > l(\lambda_k)$ и $\ln |\mathcal{L}_k(\lambda_{k+1})| > l(\lambda_{k+1})$, то отсюда вытекает

$$\ln |\mathcal{L}_k(x)| > l(x) \quad \forall x \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]. \quad (5)$$

Напомним, что

$$\widehat{\mathcal{L}}(x) = \begin{cases} \frac{|\mathcal{L}(x)|}{|x - \lambda_k|}, & x \in \left[\lambda_k, \frac{\lambda_k + \lambda_{k+1}}{2} \right], \\ \frac{|\mathcal{L}(x)|}{|x - \lambda_{k+1}|}, & x \in \left(\frac{\lambda_k + \lambda_{k+1}}{2}, \lambda_{k+1} \right], \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_k(x) \left(1 - \frac{x^2}{\lambda_k^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{\lambda_{k+1}^2} \right).$$

Следовательно,

$$\widehat{\mathcal{L}}(x) \geq \begin{cases} \frac{|\mathcal{L}_k(x)|(\lambda_{k+1} - x)}{\lambda_k \lambda_{k+1}}, & x \in \left[\lambda_k, \frac{\lambda_k + \lambda_{k+1}}{2} \right], \\ \frac{|\mathcal{L}_k(x)|(x - \lambda_k)}{\lambda_k \lambda_{k+1}}, & x \in \left(\frac{\lambda_k + \lambda_{k+1}}{2}, \lambda_{k+1} \right]. \end{cases} \quad (6)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{k+1} - x}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} &\geq \frac{1}{2}, & x \in \left[\lambda_k, \frac{\lambda_k + \lambda_{k+1}}{2} \right], \\ \frac{x - \lambda_k}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} &> \frac{1}{2}, & x \in \left(\frac{\lambda_k + \lambda_{k+1}}{2}, \lambda_{k+1} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Из (6) и (7) получаем

$$\widehat{\mathcal{L}}(x) \geq \frac{|\mathcal{L}_k(x)| |\lambda_{k+1} - \lambda_k|}{2\lambda_k \lambda_{k+1}}, \quad x \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}].$$

Продолжим это неравенство, подключая (5):

$$\begin{aligned} \ln \widehat{\mathcal{L}}(x) &\geq \ln |\mathcal{L}_k(x)| + \ln |\lambda_{k+1} - \lambda_k| - \ln 2\lambda_k \lambda_{k+1} \\ &> l(x) + a_k - \ln 2\lambda_k \lambda_{k+1} = -\gamma\omega(x) - \ln 12, \quad x \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]. \end{aligned}$$

Взяв $\gamma_k = \gamma + \ln 12/\omega(\lambda_k)$, получим в силу свойства а), что $\gamma_k \rightarrow \gamma$, $k \rightarrow \infty$, при этом

$$\begin{aligned} \ln \widehat{\mathcal{L}}(x) &> -\left(\gamma_k - \frac{\ln 12}{\omega(\lambda_k)} \right) \omega(x) - \ln 12 \\ &= -\gamma_k \omega(x) + \ln 12 \left(\frac{\omega(x)}{\omega(\lambda_k)} - 1 \right) \geq -\gamma_k \omega(x), \quad \forall x \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]. \end{aligned}$$

Итак, неравенство (3) в случае I) установлено.

Теперь рассмотрим случай II. Пусть $\lambda_{k+1} > 2\lambda_k$.

Из неравенств

$$\ln \left| 1 - \frac{\lambda_k^2}{\lambda_{k+1}^2} \right| < 0, \quad \ln \left| 1 - \frac{\lambda_{k+1}^2}{\lambda_k^2} \right| < \ln \lambda_{k+1}^2$$

и (4) при всех достаточно больших k находим

$$\begin{aligned} \ln |\mathcal{L}_k(\lambda_k)| &> -\gamma\omega(\lambda_k) + \ln \frac{\lambda_k}{2} > -\gamma\omega(\lambda_k), \\ \ln |\mathcal{L}_k(\lambda_{k+1})| &> -\gamma\omega(\lambda_{k+1}) + \ln \frac{\lambda_{k+1}}{2} - \ln \lambda_{k+1}^2 = -\gamma\omega(\lambda_{k+1}) - \ln 2\lambda_{k+1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Свойство б) функции $\omega(x)$ позволяет утверждать, что

$$\gamma'_k := \gamma + \frac{\ln 2\lambda_{k+1}}{\omega(\lambda_{k+1})} \rightarrow \gamma \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Далее, неравенства (8) дают

$$\begin{aligned} \ln |\mathcal{L}_k(\lambda_k)| &> -\left(\gamma'_k - \frac{\ln 2\lambda_{k+1}}{\omega(\lambda_{k+1})} \right) \omega(\lambda_k) > -\gamma'_k \omega(\lambda_k), \\ \ln |\mathcal{L}_k(\lambda_{k+1})| &> -\left(\gamma'_k - \frac{\ln 2\lambda_{k+1}}{\omega(\lambda_{k+1})} \right) \omega(\lambda_{k+1}) - \ln 2\lambda_{k+1} = -\gamma'_k \omega(\lambda_{k+1}). \end{aligned}$$

Отсюда и из выпуклости вверх на $(\lambda_{k-1}, \lambda_{k+2})$ функции $\ln |\mathcal{L}_k(x)|$ получаем оценку

$$\ln |\mathcal{L}_k(x)| > -\gamma'_k \omega(x) \quad \forall x \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]. \quad (9)$$

Поскольку при $x \in [\lambda_k, (\lambda_k + \lambda_{k+1})/2]$ имеем оценку $|1 - x^2/\lambda_{k+1}^2| \geq 7/16$ (напомним, что $\lambda_{k+1} > 2\lambda_k$), то

$$\widehat{\mathcal{L}}(x) = |\mathcal{L}(x)|x - \lambda_k = |\mathcal{L}_k(x)| \cdot \frac{|1 - x^2/\lambda_k^2|}{x - \lambda_k} \cdot \left|1 - \frac{x^2}{\lambda_{k+1}^2}\right| > \frac{7}{16} \cdot \frac{|\mathcal{L}_k(x)|}{\lambda_k} \geq \frac{|\mathcal{L}_k(x)|}{(16/7)x}$$

для тех же x . Если же $x \in ((\lambda_k + \lambda_{k+1})/2, \lambda_{k+1}]$, то

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}}(x) &= \frac{|\mathcal{L}(x)|}{|x - \lambda_{k+1}|} = |\mathcal{L}_k(x)| \cdot \frac{|1 - x^2/\lambda_{k+1}^2|}{\lambda_{k+1} - x} \cdot \left|1 - \frac{x^2}{\lambda_k^2}\right| \\ &> |\mathcal{L}_k(x)| \cdot \frac{x + \lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}^2} > \frac{|\mathcal{L}_k(x)|}{\lambda_{k+1}} > \frac{|\mathcal{L}_k(x)|}{2x}. \end{aligned}$$

Окончательно,

$$\widehat{\mathcal{L}}(x) > \frac{|\mathcal{L}_k(x)|}{3x} \quad \forall x \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]. \quad (10)$$

Соединяя оценки (9) и (10), имеем при $x \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]$

$$\ln \widehat{\mathcal{L}}(x) > \ln |\mathcal{L}_k(x)| - \ln 3x > -\gamma'_k \omega(x) - \ln 3x.$$

Положим

$$\gamma''_k = \sup_{x \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]} \frac{\ln 3x}{\omega(x)} \quad \text{и} \quad \gamma_k = \gamma + \frac{\ln 2\lambda_{k+1}}{\omega(\lambda_{k+1})} + \gamma''_k = \gamma'_k + \gamma''_k.$$

Тогда по определению γ'_k и свойству b) веса $\omega(x)$

$$\gamma_k \rightarrow \gamma \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Продолжим оценку снизу функции $\ln \widehat{\mathcal{L}}(x)$ при $x \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]$

$$\ln \widehat{\mathcal{L}}(x) > -\omega(x) \cdot \left(\gamma'_k + \frac{\ln 3x}{\omega(x)}\right) \geq -\omega(x)(\gamma'_k + \gamma''_k) = -\gamma_k \omega(x).$$

Таким образом, условие (3) во всех случаях установлено.

Теперь мы легко получим неравенство $\widehat{\delta}(\omega, \Lambda) \leq \delta(\omega, \Lambda)$ переходом к верхнему пределу при $k \rightarrow \infty$ в неравенстве

$$\frac{\ln(1/\widehat{\mathcal{L}}(x))}{\omega(x)} \leq \gamma_k,$$

поскольку $\gamma > \delta(\omega, \Lambda)$ можно взять сколь угодно близким к $\delta(\omega, \Lambda)$. Теорема 1 доказана.

2. Доказательство основного результата. Проведем доказательство теоремы 2 в несколько шагов. Во-первых, в силу условий а)–с) на функцию $\omega(x)$ и неотрицательности величины $\delta(\omega, \Lambda)$ по теореме 1 справедливо равенство $\delta(\omega, \Lambda) = \widehat{\delta}(\omega, \Lambda)$. Следовательно, из конечности индекса ω -конденсации последовательности Λ и предыдущего равенства выводим следующую оценку модуля функции $\mathcal{L}(x)$ снизу на $\mathbb{R}$ при всех $\varepsilon > 0$ и $|x| > x_0(\varepsilon)$ (ср. с (2)):

$$|\mathcal{L}(x)| > \rho(x) \cdot \exp(-\omega(|x|)(\delta(\omega, \Lambda) + \varepsilon)). \quad (11)$$

Зафиксируем ε : $0 < \varepsilon < d$, где $2d$ – длина индикаторной диаграммы функции $\mathcal{L}(\lambda)$. Положим $\omega_1(|x|) = (\delta(\omega, \Lambda) + 2\varepsilon)\omega(|x|)$. Согласно теореме В (см. введение) найдем четную ц.ф.э.т. $F(\lambda)$, имеющую в.р.р. и индикаторную диаграмму, совпадающую с отрезком $[-i(d - \varepsilon), i(d - \varepsilon)]$, причем

$$|F(x)| \leq \exp(-\omega_1(|x|)), \quad |x| > x_1. \quad (12)$$

Введем, далее, в рассмотрение ц.ф.э.т. $\varphi(\lambda)$ с помощью построенного по $F(\lambda)$ интерполяционного ряда Лагранжа с узлами в точках $\pm\Lambda$:

$$\varphi(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{\mathcal{L}(\lambda)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda_k F(\lambda_k)}{\mathcal{L}'(\lambda_k)(\lambda^2 - \lambda_k^2)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Очередной шаг состоит в оценке модуля $\varphi(\lambda)$ сверху на множестве

$$S := \mathbb{R} \setminus \pm U, \quad \text{где} \quad U = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_k| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Известно [4], что S является относительно плотным по мере на вещественной прямой и

$$\frac{1}{\rho(x)} = O(|x|), \quad x \rightarrow \infty, \quad x \in S. \quad (13)$$

Для всех достаточно больших по модулю $x \in S$ из (11)–(13) и определения индекса ω -конденсации получаем

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\leq \frac{|F(x)|}{|\mathcal{L}(x)|} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot \exp(-\omega_1(\lambda_k))}{|\mathcal{L}'(\lambda_k)|} \\ &\leq \frac{1}{\rho(x)} \cdot \exp(-\omega_1(|x|) + \omega(|x|)(\delta(\omega, \Lambda) + \varepsilon)) \\ &\quad + B \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \exp(-\omega_1(\lambda_k) + \omega(\lambda_k)(\delta(\omega, \Lambda) + \varepsilon)) \\ &= A \cdot |x| \exp(-\varepsilon\omega(|x|)) + B \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \exp(-\varepsilon\omega(\lambda_k)), \end{aligned}$$

где A и B – некоторые положительные постоянные.

Сходимость последнего ряда следует из свойства б) весовой функции $\omega(x)$ и того, что Λ имеет конечную верхнюю плотность. Из того же свойства б) следует, что $|x| \exp(-\varepsilon\omega(|x|)) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Итак, $|\varphi(x)|$ ограничен на S . Поэтому по известной теореме Левина [13] $\varphi(x)$ является ограниченной на $\mathbb{R}$. Тогда, как известно, $\varphi(\lambda)$ принадлежит классу А и является функцией в.р.р.

Покажем, что $\varphi(\lambda) \equiv 0$. С этой целью положим для удобства изложения

$$\psi(\lambda) = \mathcal{L}(\lambda) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda_k F(\lambda_k)}{\mathcal{L}'(\lambda_k)(\lambda^2 - \lambda_k^2)},$$

получая равенство $F(\lambda) = \varphi(\lambda)\mathcal{L}(\lambda) + \psi(\lambda)$. Поскольку $\varphi(\lambda)$ имеет в.р.р., а $\psi(\lambda)$ – ц.ф.э.т. с индикатором, не превосходящим индикатора $h(\mathcal{L}; \theta)$ функции $\mathcal{L}(\lambda)$, то по свойству индикаторов

$$h(F; \theta) \leq \max\{h(\varphi; \theta) + h(\mathcal{L}; \theta), h(\mathcal{L}; \theta)\}.$$

Предположим, что в некоторой точке $\theta_0 \in [0; 2\pi)$ выполнена оценка $h(\varphi; \theta_0) > 0$. Тогда, с одной стороны, в силу выбора функции $F(\lambda)$ справедливо неравенство $h(F; \theta_0) \leq h(\mathcal{L}; \theta_0)$. С другой же стороны, так как индикаторы функций $\varphi(\lambda)\mathcal{L}(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ в точке θ_0 не равны, то имеется равенство

$$h(F; \theta_0) = \max\{h(\varphi; \theta_0) + h(\mathcal{L}; \theta_0), h(\psi; \theta_0)\} = h(\varphi; \theta_0) + h(\mathcal{L}; \theta_0) > h(\mathcal{L}; \theta_0).$$

Полученное противоречие означает, что при всех θ выполнена оценка $h(\varphi; \theta) \leq 0$. Таким образом, $\varphi(\lambda) \in [1; 0]$. Будучи ограниченной на действительной оси, эта функция, стало быть, является постоянной. Выше отмечалось, что

$$\frac{F(x)}{\mathcal{L}(x)} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad x \in S.$$

Ясно, что этим свойством обладает и функция $\psi(x)/\mathcal{L}(x)$. Поэтому $\varphi(\lambda) \equiv 0$.

Итак, приходим к следующему представлению мероморфной функции $F(\lambda)/\mathcal{L}(\lambda)$ рядом простейших дробей:

$$\frac{F(\lambda)}{\mathcal{L}(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\lambda_k F(\lambda_k)}{\mathcal{L}'(\lambda_k)(\lambda^2 - \lambda_k^2)}, \quad \lambda \notin \pm\Lambda. \quad (14)$$

Поскольку вне множества $\pm U$ правая часть разложения (14) ограничена, то ограничена и его левая часть:

$$\exists C > 0: \quad \left| \frac{F(\lambda)}{\mathcal{L}(\lambda)} \right| \leq \frac{1}{C} \quad \forall \lambda \notin \pm U.$$

Иначе говоря, для тех же λ выполняется $|\mathcal{L}(\lambda)| \geq C \cdot |F(\lambda)|$. Остается отметить, что U является множеством кружков нулевой линейной плотности, а число $\varepsilon > 0$, определяющее индикатор функции $F(\lambda)$, может быть выбрано сколь угодно малым. Следовательно, последнее неравенство вкупе с вполне регулярным ростом вспомогательной функции $F(\lambda)$ влекут наличие такового у канонического произведения $\mathcal{L}(\lambda)$. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Мандельбройт, *Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Приложения*, ИЛ, М., 1955.
- [2] А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976.
- [3] А. Ю. Попов, *Экстремальные задачи в теории целых функций*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, МГУ, М., 2005.
- [4] В. Б. Шерстюков, “О некоторых признаках полной регулярности роста целых функций экспоненциального типа”, *Матем. заметки*, **80:1** (2006), 119–130.
- [5] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956.

- [6] А. В. Братищев, “К одной задаче А. Ф. Леонтьева”, *Докл. АН СССР*, **270**:2 (1983), 265–267.
- [7] В. Б. Шерстюков, “Об одной задаче Леонтьева и представляющих системах экспонент”, *Матем. заметки*, **74**:2 (2003), 301–313.
- [8] А. Ю. Попов, “Экстремальные задачи в теории аналитического продолжения”, *Матем. сб.*, **190**:5 (1999), 113–138.
- [9] R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor, “Ultradifferentiable functions and Fourier analysis”, *Results Math.*, **17**:3–4 (1990), 206–237.
- [10] А. М. Седлецкий, “Аналитические преобразования Фурье и экспоненциальные аппроксимации, I”, *Современная математика. Фундаментальные направления*, **5** (2003), 3–152.
- [11] А. М. Седлецкий, *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации*, Физматлит, М., 2005.
- [12] A. Yu. Popov, “A sharp estimate for the condensation index”, *Math. Montisnigri*, **11** (1999), 67–103.
- [13] Б. Я. Левин, “Почти периодические функции с ограниченным спектром”, *Актуальные вопросы математического анализа*, Изд-во РГУ, Ростов-на-Дону, 1978, 112–124.

В. Б. Шерстюков

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет) – МИФИ
E-mail: shervb@nm.ru

Поступило

15.03.2006

Исправленный вариант

19.02.2007