Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж.-м. Цай, Л.-ю. Жанг, Фундаментальная теорема о слабых относительных $[C, H]$ -модулях Хопфа, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 4, 530–537

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3819>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 12:54:12

Фундаментальная теорема о слабых относительных $[C, H]$ -модулях Хопфа

Жи-мин Цай, Лианг-юн Жанг

В статье вводится понятие слабого относительного $[C, H]$ -модуля Хопфа и доказывается фундаментальная теорема о слабых относительных правых $[C, H]$ -модулях Хопфа.

Библиография: 6 названий.

1. Введение и предварительные сведения. В 1983 г. Дой ввел понятие относительного модуля Хопфа [1], обобщающее понятие модуля Хопфа. Он также доказал следующие две фундаментальные теоремы об относительных модулях Хопфа.

ТЕОРЕМА А. Пусть H – алгебра Хопфа и A – правая H -комодульная алгебра. Если существует гомоморфизм правых H -комодулей $\phi: H \rightarrow A$, являющийся гомоморфизмом алгебр, то для любого относительного правого (H, A) -модуля Хопфа M отображение

$$\alpha: M_0 \otimes_{A_0} A \rightarrow M, \quad m \otimes a \mapsto m \cdot a,$$

где $M_0 = \{m \in M \mid \rho_M(m) = m \otimes 1_H\}$ – множество коинвариантов модуля M , является изоморфизмом относительных правых (H, A) -модулей Хопфа.

ТЕОРЕМА В. Пусть H – алгебра Хопфа и C – правая H -модульная коалгебра. Если существует гомоморфизм правых H -модулей $\psi: C \rightarrow H$, являющийся гомоморфизмом алгебр, то для любого относительного правого $[C, H]$ -модуля Хопфа N отображение

$$\alpha: N \rightarrow \bar{N} \square_{\bar{C}} C, \quad n \mapsto \Sigma \overline{n_{(0)}} \square_{\bar{C}} n_{(1)},$$

где $\bar{C} = C/C \cdot H^+$, $\bar{N} = N/N \cdot H^+$ и $H^+ = \text{Ker } \varepsilon_H$, является изоморфизмом относительных правых $[C, H]$ -модулей Хопфа.

В 1999 г. Бём, Нилл и Шлачанный ввели понятие слабого модуля Хопфа и доказали следующую фундаментальную теорему о слабых модулях Хопфа (см. [2]).

ТЕОРЕМА С. Пусть H – слабая алгебра Хопфа, M – слабый правый H -модуль Хопфа и M_0 – множество коинвариантов модуля M . Тогда отображение

$$\alpha: M_0 \otimes H \rightarrow M, \quad m \otimes h \mapsto m \cdot h,$$

является изоморфизмом слабых правых H -модулей Хопфа.

Работа выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (проект 10571153), Фонда поддержки докторов наук Китая (проект 2005037713) и Фонда поддержки докторов наук Джиангсю (проект 0203003403).

В 2004 г. Жанг и Жу доказали фундаментальную теорему о слабых относительно правых (H, A) -модулях Хопфа (см. [3]). Она гласит, что если H – слабая алгебра Хопфа, A – слабая правая H -комодульная алгебра и существует гомоморфизм правых H -комодулей $\phi: H \rightarrow A$, являющийся гомоморфизмом алгебр, то для любого слабого относительно правого (H, A) -модуля Хопфа M отображение

$$\alpha: M_0 \otimes_{A_0} A \rightarrow M, \quad m \otimes a \mapsto m \cdot a,$$

где

$$M_0 = \{m \in M \mid \rho_M(m) = \Sigma m_{(0)} \otimes \Pi_H^L(m_{(1)})\}$$

– множество коинвариантов модуля M , является изоморфизмом слабых относительно правых (H, A) -модулей Хопфа.

Этот результат обобщает не только теорему А, но и теорему С.

В этой статье мы распространяем теорему В на случай слабых относительно $[C, H]$ -модулей Хопфа.

Все рассматриваемые объекты предполагаются заданными над одним и тем же полем k . Относящаяся к коалгебрам и комодулям терминология взята из книги Монтгомери [4].

Напомним некоторые понятия и результаты, которые используются в этой статье.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Предположим, что H является одновременно алгеброй и коалгеброй. Если H удовлетворяет указанным ниже условиям (1.1)–(1.3), то она называется *слабой биалгеброй* [2]. Если она удовлетворяет условиям (1.1)–(1.4), то она называется *слабой алгеброй Хопфа* со слабым антиподом S_H . Упомянутые выше условия таковы:

$$\Delta_H(xy) = \Delta_H(x)\Delta_H(y) \quad (1.1)$$

для любых $x, y \in H$;

$$\Delta_H^2(1_H) = (\Delta_H(1_H) \otimes 1_H)(1_H \otimes \Delta_H(1_H)) = (1_H \otimes \Delta_H(1_H))(\Delta_H(1_H) \otimes 1_H), \quad (1.2)$$

где $\Delta_H^2 = (\Delta_H \otimes \text{id}_H) \circ \Delta_H$;

$$\begin{aligned} (1) \quad \varepsilon_H(xyz) &= \Sigma \varepsilon_H(xy_1) \varepsilon_H(y_2z), \\ (2) \quad \varepsilon_H(xyz) &= \Sigma \varepsilon_H(xy_2) \varepsilon_H(y_1z) \end{aligned} \quad (1.3)$$

для любых $x, y, z \in H$;

$$\begin{aligned} (1) \quad \Sigma x_1 S_H(x_2) &= \Sigma \varepsilon_H(1_1 x) 1_2, \\ (2) \quad \Sigma S_H(x_1) x_2 &= \Sigma 1_1 \varepsilon_H(x 1_2), \\ (3) \quad \Sigma S_H(x_1) x_2 S_H(x_3) &= S_H(x) \end{aligned} \quad (1.4)$$

для любого $x \in H$, где $\Delta_H(1_H) = \Sigma 1_1 \otimes 1_2$.

Для произвольной слабой биалгебры H определим отображения $\Pi_H^L, \Pi_H^R: H \rightarrow H$, формулами

$$\Pi_H^L(x) = \Sigma \varepsilon_H(1_1 x) 1_2, \quad \Pi_H^R(x) = \Sigma 1_1 \varepsilon_H(x 1_2).$$

Обозначим образ $\Pi_H^L(H)$ через H^L и образ $\Pi_H^R(H)$ через H^R .

Заметим, что H является биалгеброй в обычном смысле тогда и только тогда, когда $\Delta_H(1_H) = 1_H \otimes 1_H$, что равносильно мультипликативности отображения ε_H .

Согласно [2] имеют место следующие равенства:

$$\sqcap_H^L \circ \sqcap_H^L = \sqcap_H^L, \quad \sqcap_H^R \circ \sqcap_H^R = \sqcap_H^R; \quad (W1)$$

для любых $h, g \in H$

$$\begin{aligned} S_H(hg) &= S_H(g)S_H(h), & S_H(1_H) &= 1_H, \\ \Delta_H(S_H(h)) &= \Sigma S_H(h_2) \otimes S_H(h_1), & \varepsilon_H S_H &= \varepsilon_H; \end{aligned} \quad (W2)$$

$$\Sigma \sqcap_H^L(h_1) \otimes h_2 = \Sigma S_H(1_1) \otimes 1_2 h. \quad (W3)$$

Кроме того, формула (W12') из [5] влечет

$$\Sigma \sqcap_H^L(h_1) \otimes h_2 = \Sigma \sqcap_H^L(1_1) \otimes 1_2 h \quad \text{для } h \in H. \quad (W4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. k -коалгебра C называется *слабой правой H -модульной коалгеброй* [6], если существует правое слабое действие $\cdot$ алгебры H на C , которое является гомоморфизмом коалгебр. Это означает, что существует слабое действие $\cdot : C \otimes H \rightarrow C$ такое, что для любых $c \in C$ и $g, h \in H$ выполнены следующие условия:

$$(c \cdot g) \cdot h = c \cdot (gh); \quad (1.5)$$

$$c \cdot \sqcap_H^L(h) = \Sigma \varepsilon_C(c_1 \cdot h) c_2; \quad (1.6)$$

$$\Delta_C(c \cdot h) = \Delta_C(c) \Delta_H(h). \quad (1.7)$$

Для невырожденного слабого действия $\cdot$ условие (1.6) равносильно условию

$$\varepsilon_C(c \cdot h) = \varepsilon_C(c \cdot \sqcap_H^L(h)). \quad (1.6')$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть H – слабая алгебра Хопфа и C – слабая правая H -модульная коалгебра. k -пространство N называется *слабым относительно правым $[C, H]$ -модулем Хопфа*, если существуют действие правого H -модуля $\varphi_N : N \otimes H \rightarrow N$, $n \otimes c \mapsto n \cdot c$, и кодействие правого C -комодуля $\rho_N : N \rightarrow N \otimes C$ такие, что для любых $n \in N$ и $h \in H$ выполнено равенство

$$\rho_N(n \cdot h) = \Sigma n_{(0)} \cdot h_1 \otimes n_{(1)} \cdot h_2.$$

ПРИМЕР 1.4. (1) Пусть H – слабая алгебра Хопфа и N – слабый правый H -модуль Хопфа. Тогда H является слабой правой H -модульной коалгеброй, и, следовательно, N является слабым относительно правым $[H, H]$ -модулем Хопфа.

(2) Пусть H – слабая алгебра Хопфа и C – слабая правая H -модульная коалгебра с модульным действием $\cdot$. Тогда C является слабым относительно правым $[C, H]$ -модулем Хопфа с модульным структурным отображением $\cdot$ и комодульным структурным отображением Δ_C .

ПРИМЕР 1.5. Пусть H – слабая алгебра Хопфа, C – слабая правая H -модульная алгебра и M – правый H -модуль. Тогда

$$M \boxtimes C = (M \otimes C) \Delta_H(1_H)$$

является слабым относительно правым $[C, H]$ -модулем Хопфа с модульным структурным отображением

$$\varphi_{M \boxtimes C}: M \boxtimes C \otimes H \rightarrow M \boxtimes C, \quad (m \boxtimes c) \otimes h \mapsto (m \boxtimes c) \Delta_H(h),$$

и комодульным структурным отображением

$$\rho_{M \boxtimes C}: M \boxtimes C \rightarrow M \boxtimes C \otimes C, \quad m \boxtimes c \mapsto \Sigma m \boxtimes c_1 \otimes c_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $M \boxtimes C$ является одновременно правым H -модулем и правым C -комодулем, так что достаточно показать, что

$$\rho_{M \boxtimes C}((m \boxtimes c) \cdot h) = \Sigma(m \boxtimes c)_{(0)} \cdot h_1 \otimes (m \boxtimes c)_{(1)} \cdot h_2.$$

Для любых $m \in M$, $c \in C$ и $h \in H$ имеем

$$\begin{aligned} \rho_{M \boxtimes C}((m \boxtimes c) \cdot h) &= \Sigma \rho_{M \boxtimes C}(m \cdot 1_1 h_1 \otimes c \cdot 1_2 h_2) = \Sigma \rho_{M \boxtimes C}(m \cdot h_1 \otimes c \cdot h_2) \\ &= \Sigma m \cdot h_1 \otimes c_1 \cdot h_2 \otimes c_2 \cdot h_3 = \Sigma(m \boxtimes c)_{(0)} \cdot h_1 \otimes (m \boxtimes c)_{(1)} \cdot h_2. \end{aligned}$$

Утверждение примера доказано.

2. Фундаментальная теорема о слабых относительно $[C, H]$ -модулях Хопфа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть H – слабая алгебра Хопфа, C – слабая правая H -модульная коалгебра и N – слабый относительно правый $[C, H]$ -модуль Хопфа. Тогда если существует гомоморфизм правых H -модулей $\psi: C \rightarrow H$, для которого $\varepsilon_H \psi = \varepsilon_C$, то N является проективным правым H -модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что на $N \otimes H$ есть структура правого H -модуля, которая задана отображением

$$\varphi_{N \otimes H} = \text{id}_N \otimes m_H: (N \otimes H) \otimes H \rightarrow N \otimes H.$$

Определим отображение $\lambda: N \rightarrow N \otimes H$ правилом

$$\lambda(n) = \Sigma n_{(0)} \cdot S_H(\psi(n_{(1)})_1) \otimes \psi(n_{(1)})_2.$$

Покажем сначала, что $\varphi_N \lambda = \text{id}_N$, где φ_N – естественный гомоморфизм правых H -модулей:

$$\begin{aligned} \varphi_N \lambda(n) &= \Sigma \varphi_N(n_{(0)} \cdot S_H(\psi(n_{(1)})_1) \otimes \psi(n_{(1)})_2) = \Sigma n_{(0)} \cdot S_H(\psi(n_{(1)})_1) \psi(n_{(1)})_2 \\ &\stackrel{(1.4)}{=} \Sigma n_{(0)} \cdot 1_1 \varepsilon_H(\psi(n_{(1)})_2) = \Sigma n_{(0)} \cdot 1_1 \varepsilon_H(\psi(n_{(1)} \cdot 1_2)) \\ &= \Sigma n_{(0)} \varepsilon_H(\psi(n_{(1)})) = \Sigma n_{(0)} \varepsilon_C(n_{(1)}) = n. \end{aligned}$$

Кроме того, λ является гомоморфизмом правых H -модулей. Действительно, для любого $h \in H$ имеем

$$\begin{aligned}
 \lambda(n \cdot h) &= \Sigma_{n(0)} \cdot h_1 S_H(\psi(n_{(1)} \cdot h_2)_1) \otimes \psi(n_{(1)} \cdot h_2)_2 \\
 &= \Sigma_{n(0)} \cdot h_1 S_H(\psi(n_{(1)})_1 h_2) \otimes \psi(n_{(1)})_2 h_3 \\
 &\stackrel{(W2)}{=} \Sigma_{n(0)} \cdot \underbrace{h_1 S_H(h_2)}_{S_H(\psi(n_{(1)})_1)} \otimes \psi(n_{(1)})_2 h_3 \\
 &= \Sigma_{n(0)} \cdot \square_H^L(h_1) S_H(\psi(n_{(1)})_1) \otimes \psi(n_{(1)})_2 h_2 \\
 &\stackrel{(W3)}{=} \Sigma_{n(0)} \cdot S_H(1_1) S_H(\psi(n_{(1)})_1) \otimes \psi(n_{(1)})_2 1_2 h \\
 &\stackrel{(1.1)}{=} \Sigma_{n(0)} \cdot S_H(\psi(n_{(1)})_1) \otimes \psi(n_{(1)})_2 h \\
 &= \lambda(n) \cdot h.
 \end{aligned}$$

Очевидно, $N \otimes H$ является свободным H -модулем. Из того, что модуль N изоморфен прямому слагаемому суммы $N \otimes H$, вытекает, что N является проективным правым H -модулем.

Предложение доказано.

Предложение 2.1 обобщает теорему 4 из [1].

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть H – слабая алгебра Хопфа и C – слабая правая H -модульная коалгебра. Тогда сформулированные ниже условия связаны импликациями $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$:

- (1) существует гомоморфизм правых H -модулей $\psi: C \rightarrow H$, для которого $\varepsilon_H \psi = \varepsilon_C$;
- (2) любой слабый относительный правый $[C, H]$ -модуль Хопфа является проективным правым H -модулем;
- (3) C является проективным H -модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 2.1 из (1) вытекает (2). Пример 1.4 показывает, что (2) $\Rightarrow$ (3).

Пусть H – слабая алгебра Хопфа и C – слабая правая H -модульная коалгебра. Обозначим ядро отображения $\square_H^L$ через $H^+ = \text{Ker } \square_H^L$. Согласно [2] H^+ является коидеалом в H . Поскольку

$$\begin{aligned}
 \Delta_C(C \cdot H^+) &= \Delta_C(C) \Delta_H(H^+) \subseteq C \otimes C \cdot H^+ + C \cdot H^+ \otimes C, \\
 \varepsilon_C(C \cdot H^+) &\stackrel{(1.6')}{=} \varepsilon_C(C \cdot \square_H^L(H^+)) = \varepsilon_C(C \cdot \square_H^L(\text{Ker } \square_H^L)) = 0,
 \end{aligned}$$

то $C \cdot H^+$ является коидеалом в C .

Таким образом, на $\bar{C} = C/C \cdot H^+$ есть единственная структура коалгебры, для которой проекция $P_C: C \rightarrow \bar{C}$ является гомоморфизмом коалгебр.

Если N – слабый относительный правый $[C, H]$ -модуль Хопфа, то мы получаем правую $\bar{C}$ -комодульную структуру

$$\rho'_N: N \xrightarrow{\rho_N} N \otimes C \xrightarrow{\text{id}_N \otimes P_C} N \otimes \bar{C}. \quad (\text{A})$$

Значит, $N \cdot H^+$ является правым $\bar{C}$ -подмодулем модуля N , потому что

$$\rho'_N(N \cdot H^+) = (\text{id}_N \otimes P_C) \rho_N(N \cdot H^+) \subseteq (\text{id}_N \otimes P_C)(N \otimes C \cdot H^+ + N \cdot H^+ \otimes C) = N \cdot H^+ \otimes \bar{C}.$$

Таким образом, $\bar{N} = N/N \cdot H^+$ имеет единственную комодульную структуру $\rho_{\bar{N}}: \bar{N} \rightarrow \bar{N} \otimes \bar{C}$, для которой отображение $\pi_N: N \rightarrow \bar{N}$, $n \mapsto \bar{n}$, является гомоморфизмом правых $\bar{C}$ -комодулей, т.е.

$$\rho_{\bar{N}}\pi_N = (\pi_N \otimes P_C)\rho_N. \quad (\text{B})$$

Для любых $n \in N$ и $h \in H$ имеем

$$\pi_N(n \cdot h) = \pi_N(n) \cdot \sqcap_H^L(h). \quad (\text{C})$$

Действительно, на $\bar{N}$ определена естественная структура правого H -модуля, и для любого $h \in H$ выполнены равенства

$$\sqcap_H^L(h - \sqcap_H^L(h)) = \sqcap_H^L(h) - \sqcap_H^L \sqcap_H^L(h) \stackrel{(W1)}{=} \sqcap_H^L(h) - \sqcap_H^L(h) = 0;$$

следовательно,

$$n \cdot h - n \cdot \sqcap_H^L(h) = n \cdot (h - \sqcap_H^L(h)) \in N \cdot H^+$$

для любого $n \in N$, откуда вытекает (C).

Очевидно, (C) имеет структуру левого $\bar{C}$ -комодуля, определенную отображением

$$\rho_C: C \xrightarrow{\Delta_C} C \otimes C \xrightarrow{P_C \otimes \text{id}_C} \bar{C} \otimes C. \quad (\text{D})$$

Для любого правого $\bar{C}$ -комодуля W с комодульной структурой ρ_W определим котензорное произведение

$$W \sqcap_{\bar{C}} C = \{w \otimes c \in W \otimes C \mid \rho_W(w) \otimes c = w \otimes \rho_C(c) \text{ для любых } w \in W, c \in C\};$$

оно является слабым относительным правым $[C, H]$ -модулем Хопфа со структурными отображениями

$$\begin{aligned} \rho_{W \sqcap_{\bar{C}} C}: W \sqcap_{\bar{C}} C &\rightarrow (W \sqcap_{\bar{C}} C) \otimes C, & w \sqcap_{\bar{C}} c &\mapsto \Sigma(w \sqcap_{\bar{C}} c_1) \otimes c_2, \\ \varphi_{W \sqcap_{\bar{C}} C}: (W \sqcap_{\bar{C}} C) \otimes H &\rightarrow W \sqcap_{\bar{C}} C, & (w \sqcap_{\bar{C}} c) \otimes h &\mapsto w \sqcap_{\bar{C}} c \cdot h. \end{aligned}$$

Для любого слабого относительного правого $[C, H]$ -модуля Хопфа N рассмотрим отображение

$$\alpha: N \xrightarrow{\rho_N} N \otimes C \xrightarrow{\pi_N \otimes \text{id}_C} \bar{N} \otimes C. \quad (\text{E})$$

Легко видеть, что $\alpha(N) \subseteq \bar{N} \sqcap_{\bar{C}} C$, поскольку $(\rho_{\bar{N}} \otimes \text{id}_C)\alpha(n) = (\text{id}_{\bar{N}} \otimes \rho_C)\alpha(n)$ для любого $n \in N$.

Из вышесказанного вытекает, что отображение $\alpha: N \rightarrow \bar{N} \sqcap_{\bar{C}} C$ является гомоморфизмом слабых относительных правых $[C, H]$ -модулей Хопфа.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть H – слабая алгебра Хопфа и C – слабая правая H -модульная коалгебра. Если существует гомоморфизм правых H -модулей $\psi: C \rightarrow H$, являющийся гомоморфизмом коалгебр, то для любого слабого относительного правого $[C, H]$ -модуля Хопфа отображение N

$$\alpha: N \rightarrow \bar{N} \sqcap_{\bar{C}} C, \quad n \mapsto \Sigma \overline{n_{(0)}} \sqcap_{\bar{C}} n_{(1)},$$

где $\bar{N} = N/N \cdot H^+$, является изоморфизмом слабых относительных правых $[C, H]$ -модулей Хопфа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $Q: N \rightarrow N$, определенное правилом $Q(n) = \Sigma n_{(0)} \cdot S_H(\psi(n_{(1)}))$. Для любых $n \in N$ и $h \in H$ имеем

$$\begin{aligned} Q(n \cdot \sqcap_H^L(h)) &= \Sigma Q(n \cdot 1_2 \varepsilon_H(1_1 h)) = \Sigma n_{(0)} \cdot 1_2 S_H(\psi(n_{(1)}) 1_3) \varepsilon_H(1_1 h) \\ &= \Sigma n_{(0)} \cdot \underbrace{1_2 S_H(1_3)} S_H(\psi(n_{(1)})) \varepsilon_H(1_1 h) \\ &= \Sigma n_{(0)} \cdot \sqcap_H^L(1_2) S_H(\psi(n_{(1)})) \varepsilon_H(1_1 h) \stackrel{(W1)}{=} \Sigma n_{(0)} \cdot \sqcap_H^L(h) S_H(\psi(n_{(1)})) \\ &= \Sigma n_{(0)} \cdot h_1 S_H(h_2) S_H(\psi(n_{(1)})) = \Sigma n_{(0)} \cdot h_1 S_H(\psi(n_{(1)}) h_2) \\ &= \Sigma n_{(0)} \cdot h_1 S_H(\psi(n_{(1)} \cdot h_2)) = Q(n \cdot h). \end{aligned}$$

Таким образом, Q обращается в нуль на $N \cdot H^+$. Значит, существует отображение $\bar{Q}: \bar{N} \rightarrow N$, для которого

$$\bar{Q} \pi_N = Q. \quad (F)$$

Пусть отображение $Q_0: C \rightarrow C$ определено правилом $c \mapsto \Sigma c_1 \cdot S_H(\psi(c_2))$. Тогда существует такое отображение $\bar{Q}_1: \bar{C} \rightarrow C$, что $Q_0 = \bar{Q}_1 P_C$ и

$$\varphi_C(Q_0 \otimes \psi) \Delta_C = \text{id}_C. \quad (G)$$

Рассмотрим отображение $\beta: \bar{N} \square_{\bar{C}} C \hookrightarrow \bar{N} \otimes C \xrightarrow{\bar{Q} \otimes \psi} N \otimes H \xrightarrow{\varphi_N} N$, определенное правилом $\bar{n} \square_{\bar{C}} c \mapsto \bar{Q}(\bar{n}) \cdot \psi(c)$. Для него выполнено равенство $\beta \alpha = \text{id}_N$.

Действительно, для любого $n \in N$ имеем

$$\begin{aligned} \beta \alpha(n) &= \Sigma \beta(\pi(n_{(0)}) \square_{\bar{C}} n_{(1)}) = \Sigma \bar{Q} \pi_N(n_{(0)}) \cdot \psi(n_{(1)}) \\ &\stackrel{(F)}{=} \Sigma Q(n_{(0)}) \cdot \psi(n_{(1)}) = \Sigma n_{(0)(0)} \cdot S_H(\psi(n_{(0)(1)})) \psi(n_{(1)}) \\ &= \Sigma n_{(0)} \cdot S_H(\psi(n_{(1)})_1) \psi(n_{(1)})_2 \stackrel{(1.4)}{=} \Sigma n_{(0)} \cdot 1_1 \varepsilon_H(\psi(n_{(1)}) 1_2) \\ &= \Sigma n_{(0)} \cdot 1_1 \varepsilon_H(\psi(n_{(1)} \cdot 1_2)) = \Sigma n_{(0)} \varepsilon_H(\psi(n_{(1)})) \\ &= \Sigma n_{(0)} \varepsilon_C(n_{(1)}) = n. \end{aligned}$$

Для любых $\pi_N(n) \in \bar{N}$ и $c \in C$ имеем

$$\begin{aligned} \alpha \beta(\pi_N(n) \otimes c) &= \alpha(\varphi_N(\bar{Q} \otimes \psi)(\pi_N(n) \otimes c)) \stackrel{(E)}{=} (\pi_N \otimes \text{id}_C) \rho_N(\bar{Q} \pi_N(n) \cdot \psi(c)) \\ &\stackrel{(F)}{=} (\pi_N \otimes \text{id}_C) \rho_N(Q(n) \cdot \psi(c)) \\ &= \Sigma (\pi_N \otimes \text{id}_C)(Q(n)_{(0)} \cdot \psi(c)_1 \otimes Q(n)_{(1)} \cdot \psi(c)_2) \\ &= \Sigma (\pi_N \otimes \text{id}_C)(n_{(0)(0)} \cdot S_H(\psi(n_{(1)}))_1 \psi(c)_1 \otimes n_{(0)(1)} \cdot S_H(\psi(n_{(1)}))_2 \psi(c)_2) \\ &\stackrel{(C)}{=} \Sigma \pi_N(n_{(0)}) \cdot \sqcap_H^L S_H(\psi(n_{(1)2})_1 \psi(c)_1) \otimes n_{(1)1} \cdot S_H(\psi(n_{(1)2})_2) \psi(c)_2 \\ &\stackrel{(W4)}{=} \Sigma \pi_N(n_{(0)}) \cdot \sqcap_H^L(1_1) \otimes n_{(1)1} \cdot 1_2 S_H(\psi(n_{(1)2}) \psi(c)) \\ &\stackrel{(C)}{=} \Sigma \pi_N(n_{(0)(0)} \cdot 1_1) \otimes n_{(0)(1)} \cdot 1_2 S_H(\psi(n_{(1)})) \psi(c) \\ &= \Sigma \pi_N(n_{(0)}) \otimes n_{(1)1} \cdot S_H(\psi(n_{(1)2})) \psi(c) \\ &= \Sigma \pi_N(n_{(0)}) \otimes Q_0(n_{(1)}) \cdot \psi(c). \end{aligned}$$

Пусть $\pi_N(n) \otimes c \in \bar{N} \square_C C$. Тогда

$$(\rho_{\bar{N}} \otimes \text{id}_C)(\pi_N(n) \otimes c) = (\text{id}_{\bar{N}} \otimes \rho_C)(\pi_N(n) \otimes c).$$

Из (B) вытекает, что $\rho_{\bar{N}}\pi_N = (\pi_N \otimes P_C)\rho_N$, и из (D) следует, что $\rho_C = (P_C \otimes \text{id}_C)\Delta_C$. Легко показать, что

$$(\pi_N \otimes P_C \otimes \text{id}_C)(\rho_N \otimes \text{id}_C)(n \otimes c) = (\text{id}_{\bar{N}} \otimes P_C \otimes \text{id}_C)(\text{id}_{\bar{N}} \otimes \Delta_C)(\pi_N(n) \otimes c).$$

Применяя $(\text{id}_{\bar{N}} \otimes \varphi_C)(\text{id}_{\bar{N}} \otimes \bar{Q}_1 \otimes \psi)$ к этому равенству и учитывая (G), мы получаем

$$\Sigma \pi_N(n_{(0)}) \otimes Q_0(n_{(1)}) \cdot \psi(c) = \pi_N(n) \otimes c.$$

Таким образом, отображение $\alpha\beta$ тождественно на $\bar{N} \square_C C$, т.е. $\alpha\beta = \text{id}_{\bar{N} \square_C C}$. Теорема доказана.

Доказанная теорема обобщает теорему B.

Часть этой работы была выполнена во время визита профессора Сони Наталь в Нанджингский сельскохозяйственный университет. Авторы благодарят ее за помощь.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Y. Doi, “On the structure of relative Hopf modules”, *Comm. Algebra*, **11**:3 (1983), 243–255.
- [2] G. Böhm, F. Nill, K. Szlachányi, “Weak Hopf algebras I. Integral theory and C^* -structure”, *J. Algebra*, **221**:2 (1999), 385–438.
- [3] L. Zhang, S. Zhu, “Fundamental theorems of weak Doi–Hopf modules and semisimple weak smash product Hopf algebras”, *Comm. Algebra*, **32**:9 (2004), 3403–3415.
- [4] S. Montgomery, *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*, Regional Conference Series in Mathematics, **82**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [5] L. Y. Zhang, “Maschke-type theorem and Morita context over weak Hopf algebras”, *Sci. China Ser. A*, **49**:5 (2006), 587–598.
- [6] G. Böhm, “Doi–Hopf modules over weak Hopf algebras”, *Comm. Algebra*, **28**:10 (2000), 4687–4698.

Жи-мин Цай

Нанджингский сельскохозяйственный университет (КНР)

Поступило

08.06.2006

Лианг-юн Жанг

Нанджингский сельскохозяйственный университет

E-mail: zlyun8@jlonline.com