Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Мамонтов, Существование глобальных решений
многомерных уравнений сжимаемой жидкости Бингама,
Матем. заметки, 2007, том 82, выпуск 4, 560–577

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3825>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:42:16

Существование глобальных решений многомерных уравнений сжимаемой жидкости Бингама

А. Е. Мамонтов

Рассматриваются уравнения, описывающие многомерные движения сжимаемых вязких (неньютоновских) жидкостей типа Бингама, т.е. с многозначной функцией, связывающей напряжения с тензором скоростей деформаций. Доказана теорема существования в целом по времени и начальным данным для первой начально-краевой задачи, соответствующей течениям в ограниченной области, в классе “слабых” обобщенных решений. При этом допускается анизотропная связь между тензорами напряжений и скоростей деформаций и подробно исследуются допустимые связи такого рода.

Библиография: 15 названий.

Введение. Будем рассматривать систему уравнений, описывающих течения вязких (в том числе неньютоновских) сжимаемых жидкостей

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (0.1)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \operatorname{div} \mathbb{P}_r + \rho \mathbf{f}, \quad (0.2)$$

где ρ – плотность жидкости (неотрицательная функция), $\mathbf{u}$ – вектор скорости, $\mathbf{f}$ – заданный вектор внешних массовых сил, $\mathbb{P}_r$ – тензор напряжений, div – оператор дивергенции по пространственным переменным $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, а t – время. Жидкость Бингама [1], [2] характеризуется тем, что в ней при малых напряжениях тензор скоростей деформаций $\mathbb{D}(\mathbf{u}) = \operatorname{Sym}(\nabla \otimes \mathbf{u})$ равен 0 (далее для поля $\mathbf{u}$ будем вместо $\mathbb{D}(\mathbf{u})$ писать просто $\mathbb{D}$), т.е. в областях с малыми $\mathbb{P}_r$ (за вычетом шаровой части) движение твердотельное (строго говоря, такие среды не являются жидкостями в смысле аксиом (постулатов) Стокса [3]). Модели жидкостей Бингама находят свое применение при изучении движений таких сред, как пасты, цементы, суспензии, некоторые виды нефтей и др. [4], [5].

Таким образом, жидкость Бингама описывается определяющим уравнением (закрывающим систему (0.1), (0.2)) вида

$$\mathbb{P}_r = \mathbb{P}_f + \mathbb{P}_b, \quad (0.3)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00550).

где $\mathbb{P}_f$ – тензор напряжений стоксовой (т.е. удовлетворяющей аксиомам Стокса) жидкости, а $\mathbb{P}_b$ есть многозначная функция от $\mathbb{D}$, задаваемая формулой

$$\mathbb{P}_b = p_* \begin{cases} \mathbb{T} \left(\frac{\mathbb{D}}{|\mathbb{D}|} \right), & \mathbb{D} \neq 0, \\ \text{любой из } \overline{\mathcal{P}}, & \mathbb{D} = 0. \end{cases} \quad (0.4)$$

Здесь $\mathcal{P}$ – некоторая ограниченная выпуклая область в пространстве $\mathbb{S}_n$ симметричных тензоров ранга 2, действующих в $\mathbb{R}^n$, причем $0 \in \mathcal{P}$, $\rho(0, \partial\mathcal{P}) = 1$; $p_* \geq 0$ – заданное (постоянное) пороговое напряжение, а $\mathbb{T}$ – тензорное поле, действующее из единичной сферы $S_1 \subset \mathbb{S}_n$ в $\partial\mathcal{P}$. Другими словами, $p_*\mathcal{P}$ есть область напряжений, соответствующих твердотельному движению (так как $\mathbb{P}_b \in p_*\mathcal{P}$, а $\mathbb{P}_f$ стоксов), а $\mathbb{T}$ определяет связь напряжений и скоростей деформаций при выходе напряжений в критическую зону $p_*\partial\mathcal{P}$. Подробнее связь (0.4) будет изучена в пп. 1, 2. В (0.4) и далее модуль тензора $|\mathbb{B}| = (\mathbb{B} : \mathbb{B})^{1/2}$. Отметим, что значение $p_* = 0$ соответствует $\mathbb{P}_b \equiv 0$, т.е. стоксовой жидкости.

В настоящей работе общий анизотропный случай (0.4) рассмотрен в связи с тем, что это не требует серьезных дополнительных усилий по сравнению с изотропным случаем (когда $\mathcal{P}$ есть единичный шар в $\mathbb{S}_n$, а $\mathbb{T}$ – тождественное отображение), обычно рассматриваемым в литературе. Вопрос о разрешимости в целом по времени задач для системы (0.1)–(0.4) до сих пор рассматривался (при $p_* > 0$) только для случая одномерных движений ($n = 1$) или для несжимаемой жидкости. За подробностями мы отсылаем читателя к работам [6]–[8] и библиографиям в них.

В настоящей статье будет доказано существование в целом решений первой начально-краевой задачи (задачи А) для системы (0.1)–(0.4) (см. постановку задачи А в п. 1). При этом мы будем опираться на результат [9], [10], полученный для этой задачи в случае $p_* = 0$. Указанный результат неприменим непосредственно к случаю $p_* > 0$, так как тогда (0.3) определяет многозначную функцию от $\mathbb{D}$ (см. также замечание 1.4). Таким образом, имеется два пути распространения результата [9], [10] на интересующий нас случай $p_* > 0$:

- 1) обосновать возможность повторения результатов [9], [10] в этом случае, проведя заново все доказательства в изменившейся ситуации;
- 2) регуляризовав бингамовский тензор $\mathbb{P}_b$ и сведя его к стоксовому, перейти к пределу в построенных на основе [9], [10] решениях регуляризованной задачи (аналогично тому, как это делалось в [6] для случая $n = 1$).

Второй путь предпочтительнее, поскольку на нем удобно отследить появление “твердотельных зон” (где $\mathbb{D} = 0$) и поведение в них напряжений. Этот путь мы и изберем в настоящей работе.

Основной результат статьи сформулирован в теореме 3.2. Его доказательству посвящен п. 3. В пп. 1, 2 приводятся постановка основной задачи, вспомогательные построения и примеры; в п. 4 собраны несколько технических утверждений о выпуклых функционалах.

1. Постановка задачи А. Будем рассматривать начально-краевую задачу для системы (0.1)–(0.4), описывающую движение в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей. Точнее, речь идет о первой начально-краевой задаче в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$ (с условиями прилипания на $\partial\Omega \times (0, T)$):

$$\rho|_{t=0} = \rho_0 \geq 0, \quad \rho \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{w}_0, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.1)$$

Начальные данные ставятся для импульса $\rho \mathbf{u}$, а не для скорости $\mathbf{u}$, так как вообще говоря, только импульс принимает свои начальные значения в рассматриваемом нами классе слабых решений, в котором возможно $\rho = 0$ на множестве ненулевой меры, в то время как ρ играет роль веса при $\partial \mathbf{u} / \partial t$ в (0.2). Налагая естественное с физической точки зрения ограничение $\text{mes}\{\mathbf{w}_0 \neq 0, \rho_0 = 0\} = 0$, под значением $\mathbf{u}|_{t=0}$ будем понимать отношение $\mathbf{w}_0 / \rho_0$, произвольным образом продолженное на множество $\{\rho_0 = 0\}$.

Следуя [9], [10], будем задавать stokсову часть $\mathbb{P}_f$ тензора $\mathbb{P}_r$ в виде

$$\mathbb{P}_f = -\rho \mathbb{I} + \mathbb{P}(\mathbf{u}) \quad (1.2)$$

(т.е. давление $p(\rho) = \rho$), где $\mathbb{P}$ является оператором произвольной природы (возможно, и нелокальным), удовлетворяющим лишь следующим аксиомам:

A1) $\mathbb{P}$ коэрцитивен, т.е.

$$L(\mathbf{u}) \equiv \int_{\Omega} \mathbb{P}(\mathbf{u}) : \mathbb{D}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} \geq \int_{\Omega} M(|\mathbb{D}(\mathbf{u})|) \, d\mathbf{x} \quad \text{при всех } \mathbf{u} \in X;$$

A2) $\mathbb{P}$ монотонен, т.е.

$$\int_{\Omega} (\mathbb{P}(\mathbf{u}) - \mathbb{P}(\mathbf{v})) : \mathbb{D}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \geq 0 \quad \text{при всех } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X;$$

A3) $\mathbb{P}(\cdot)$ действует в определенном смысле ограниченным образом:

$$\int_{\Omega} \overline{M}(|\mathbb{P}(\mathbf{u})|) \, d\mathbf{x} \leq C \left(1 + \int_{\Omega} M(|\mathbb{D}(\mathbf{u})|) \, d\mathbf{x} \right) \quad \text{для всех } \mathbf{u} \in X;$$

также $\mathbb{P}$ непрерывен в следующем смысле:

A4) $\mathbb{P}(\mathbf{u} - \varepsilon \mathbf{v}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbf{u})$ *-слабо в $L_{\overline{M}}(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для всех $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$;

A5) если $\mathbb{D}(\mathbf{u}_{\varepsilon}) \rightarrow \mathbb{D}(\mathbf{u})$ п.в. в Q_T и $\mathbb{D}(\mathbf{u}_{\varepsilon})$ ограничены в $K_M(Q_T)$, то $\mathbb{P}(\mathbf{u}_{\varepsilon}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbf{u})$ в $\mathcal{D}'(Q_T)$;

и, наконец, имеют место следующие свойства (типа выпуклости):

A6) интеграл $\int_0^t L(\mathbf{u}) \, ds$ задает функционал от $\mathbf{u}$, *-слабо полунепрерывный снизу, т.е. если $\mathbb{D}(\mathbf{u}_{\varepsilon}) \rightarrow \mathbb{D}(\mathbf{u})$ *-слабо в $L_M(Q_t)$, то

$$\int_0^t L(\mathbf{u}) \, ds \leq \varliminf \int_0^t L(\mathbf{u}_{\varepsilon}) \, ds;$$

A7) если $\mathbb{D}(\mathbf{u}_{\varepsilon}) \rightarrow \mathbb{D}(\mathbf{u})$ *-слабо в $L_M(Q_t)$, и

$$\int_0^t L(\mathbf{u}) \, ds \geq \overline{\lim} \int_0^t L(\mathbf{u}_{\varepsilon}) \, ds,$$

то для некоторой последовательности $\mathbb{D}(\mathbf{u}_{\varepsilon_k}) \rightarrow \mathbb{D}(\mathbf{u})$ п.в. в Q_t .

Здесь M означает N-функцию, обладающую свойством

$$M(s) \geq \exp(s), \quad s \gg 1; \quad (1.3)$$

$\overline{M}$ – функция, дополнительная к ней;

$$X = \{\mathbf{u} \mid \mathbb{D}(\mathbf{u}) \in L_M(\Omega), \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0\}; \quad \|\mathbf{u}\|_X = \|\mathbb{D}(\mathbf{u})\|_{L_M(\Omega)}.$$

Теория N-функций, пространств L_M и классов K_M Орлича изложена в [11] (с той оговоркой, что там вместо L_M , K_M обозначено соответственно L_M^* , L_M). Свойства пространства X описаны в [9].

Теорема существования в целом для задачи (0.1)–(0.4), (1.1), (1.2) в случае $p_* = 0$ получена в [9], [10] в рамках аксиом A1–A4 и ограничения (1.3). При этом было показано, что что в рамках принятого подхода к оценкам решения задачи требование (1.3) не может быть существенно ослаблено. В настоящей работе мы не займемся об оптимальности требований на связь $\mathbb{P}_r$ и $\mathbb{D}$ при больших $|\mathbb{D}|$ (т.е. на рост функции M), так же как и об общности $p(\rho)$, поскольку наша основная цель – отследить специфику бингамовской жидкости (т.е. малые $|\mathbb{D}|$).

В качестве примера тензоров $\mathbb{P}$, удовлетворяющих аксиомам A1–A7, можно указать следующий класс.

ПРИМЕР 1.1. Рассмотрим потенциальные тензоры – градиенты $\mathbb{P} = \partial V / \partial \mathbb{D}$ потенциалов вида

$$V = \Lambda((\text{tr } \mathbb{D})^2) + \sum_{s=1}^N \Gamma_s(|\mathbb{D}^s|^2) \quad (1.4)$$

с произвольным $N \in \mathbb{N}$. Такого рода тензоры $\mathbb{P}$ подробно изучены в [12]. Аксиомы A1–A4 выполнены, если Λ и все Γ_s – неубывающие выпуклые функции класса C^1 , причем Γ_1 растет существенно быстрее всех остальных функций, а $M(\xi) = 2\Gamma'_1(\xi^2)\xi^2$ удовлетворяет Δ_3 -условию (фактически достаточно (1.3)). Аксиома A6 обеспечивается выпуклостью функций $\Lambda'(\xi^2)\xi^2$ и $\Gamma'_s(\xi^2)\xi^2$. В самом деле, (1.4) означает, что (см. [12])

$$\mathbb{P}(\mathbf{u}) = 2\Lambda'((\text{tr } \mathbb{D})^2)(\text{tr } \mathbb{D}) \cdot \mathbf{I} + \sum_{s=1}^N 2s\Gamma'_s(|\mathbb{D}^s|^2)\mathbb{D}^{2s-1}, \quad (1.5)$$

и обоснование аксиомы A6 опирается на следствие 4.3. Для выполнения аксиомы A7 (см. пример 4.11) следует потребовать $\Lambda, \Gamma_s \in C^3$, а выпуклость функций $\Lambda'(\xi^2)\xi^2$ и $\Gamma'_s(\xi^2)\xi^2$ следует обеспечить строгую (точнее, удовлетворить оценки вида (4.3)). Наконец, аксиома A5 обеспечена в силу следующих соображений: если $\mathbb{D}(\mathbf{u}_\varepsilon)$ ограничены в $K_M(Q_T)$, то по аксиоме A3 это дает ограниченность $\mathbb{P}(\mathbf{u}_\varepsilon)$ в $K_{\overline{M}}(Q_T)$, а тогда [11; с. 117, 135] $\mathbb{P}(\mathbf{u}_\varepsilon)$ имеют равномерно непрерывные нормы в любом $K_N(Q_T)$ с $N \prec \overline{M}$, но тогда из $\mathbb{D}(\mathbf{u}_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{D}(\mathbf{u})$ п.в. (а значит, и $\mathbb{P}(\mathbf{u}_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbf{u})$ п.в.) следует $\mathbb{P}(\mathbf{u}_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbf{u})$ сильно в $K_N(Q_T)$, что и требовалось.

Опишем теперь рассматриваемый нами класс бингамовских тензоров $\mathbb{P}_b$. Как сказано во введении, $\mathbb{P}_b$ будем брать в виде (0.4). При этом будем предполагать выполнение следующих аксиом:

- B1) $\mathbb{T}$ – непрерывное отображение;
- B2) $\mu(\mathbb{B}) \equiv \mathbb{T}(\mathbb{B}) : \mathbb{B} > 0$ при всех $\mathbb{B} \in S_1$;
- B3) $\mathbb{T}(\mathbb{B}_2) : \mathbb{B}_1 \leq \mathbb{T}(\mathbb{B}_1) : \mathbb{B}_1 = \mu(\mathbb{B}_1)$ при всех $\mathbb{B}_{1,2} \in S_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Из выписанных аксиом следует, что μ – непрерывная функция со значениями из интервала вида $[\mu_0, 1]$, где $\mu_0 = \text{const} > 0$.

Из аксиомы B3 вытекает свойство

- B4) функционал

$$\varkappa(\mathbb{D}) \equiv \mu\left(\frac{\mathbb{D}}{|\mathbb{D}|}\right)|\mathbb{D}|$$

(доопределенный нулем при $\mathbb{D} = 0$) выпуклый.

В самом деле, для $\mathbb{D}_\theta = \theta\mathbb{D}_1 + (1 - \theta)\mathbb{D}_2$ имеем ввиду В3:

$$\mathbb{T}\left(\frac{\mathbb{D}_\theta}{|\mathbb{D}_\theta|}\right) : \mathbb{D}_k \leq \varkappa(\mathbb{D}_k), \quad k = 1, 2,$$

откуда

$$\varkappa(\mathbb{D}_\theta) = \mathbb{T}\left(\frac{\mathbb{D}_\theta}{|\mathbb{D}_\theta|}\right) : \mathbb{D}_\theta \leq \theta\varkappa(\mathbb{D}_1) + (1 - \theta)\varkappa(\mathbb{D}_2),$$

что и требовалось. Отметим, что $\varkappa$ – непрерывный функционал.

Тривиальный пример описанного класса тензоров $\mathbb{P}_b$ дается упомянутым во введении случаем изотропной жидкости Бингама, когда $\mu \equiv 1$, $\varkappa(\mathbb{D}) = |\mathbb{D}|$ и выполнение аксиом В1–В3 очевидно. При этом тензор $\mathbb{P}_b$ будет потенциальным, причем его потенциал $V_b(\mathbb{D}) = p_*|\mathbb{D}|$ с той оговоркой, что при таком представлении при $\mathbb{D} \rightarrow 0$ $\mathbb{P}_b$ будет принимать значения только на сфере $p_*\partial\mathcal{P} = p_*S_1$ (однако при переходе к слабому пределу, как в п. 3, значения будут приниматься во всем шаре $p_*\overline{\mathcal{P}}$). Кроме того, описанные тензор и потенциал имеют вид (1.4), (1.5) с $\tilde{\Gamma}_1(\xi) = p_*\sqrt{\xi}$ (остальные члены нулевые), так что если $\mathbb{P}$ также задается формулами (1.4), (1.5), то это представление имеет место и для результирующих потенциала $V_r = V_b + V$ и тензора $\mathbb{P}_b + \mathbb{P}$, но тогда $\tilde{\Gamma}_1 + \Gamma_1$ не может быть выпуклой в окрестности 0, поскольку $\Gamma'_1 \geq 0$, откуда $(\tilde{\Gamma}_1 + \Gamma_1)'(+0) = +\infty$. Поэтому $\mathbb{P}_b$ все же удобнее рассматривать как отдельное слагаемое.

Нетривиальные примеры пар $(\mathcal{P}, \mathbb{T})$ (т.е. анизотропных $\mathbb{P}_b$), удовлетворяющих аксиомам В1–В3, построены в п. 2.

Теперь мы готовы окончательно сформулировать основную задачу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Задачей А назовем задачу (0.1)–(0.4), (1.1), (1.2), в которой тензор $\mathbb{P}$ обладает свойствами А1–А7 с ограничением (1.3), а поле $\mathbb{T}$ – свойствами В1–В3 (а значит, и В4).

Как сказано во введении, задача А будет решаться при помощи построения специальных аппроксимирующих задач. При этом нам потребуется обозначение

$$\mathbb{P}_{b0} = p_* \begin{cases} \mathbb{T}\left(\frac{\mathbb{D}}{|\mathbb{D}|}\right), & \mathbb{D} \neq 0, \\ 0, & \mathbb{D} = 0, \end{cases}$$

а также семейство регуляризованных тензоров $\mathbb{P}_{b\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, обладающее следующими свойствами:

- С1) $\mathbb{P}_{b\varepsilon} \in p_*\overline{\mathcal{P}}$ всюду;
- С2) при $\mathbb{D} = 0$ верно $\mathbb{P}_{b\varepsilon} = 0$ (т.е. это стоксов тензор);
- С3) $\mathbb{P}_{b\varepsilon}(\mathbf{v}) \rightarrow \mathbb{P}_b(\mathbf{v})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $|\mathbb{D}(\mathbf{v})| \in [\delta, d_0]$ при всех $\delta > 0$ с фиксированным $d_0 > 0$;
- С4) $\mathbb{P}_{b\varepsilon} = \mathbb{P}_b$ при $|\mathbb{D}| \geq d_0$;
- С5) сумма $(\mathbb{P} + \mathbb{P}_{b\varepsilon})$ удовлетворяет аксиомам А1–А3, а $\mathbb{P}_{b\varepsilon}$ – аксиомам А2–А4 (значит, А4 верно и для суммы).

Такое семейство, как показано в п. 2, всегда может быть построено (т.е. С1–С5 не являются дополнительными ограничениями), если только выполнены свойства В1–В3.

Из свойств С1–С5 следуют также следующие свойства:

- С6) $\mathbb{P}_{b\varepsilon} \rightarrow \mathbb{P}_{b0}$ при всех $\mathbb{D}$ поточечно, и равномерно по $|\mathbb{D}| \in [\delta, +\infty)$ при всех $\delta > 0$;
- С7) если $\mathbb{D}(\mathbf{v}) \neq 0$, то из $\mathbb{D}(\mathbf{v}_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{D}(\mathbf{v})$ следует $\mathbb{P}_{b\varepsilon}(\mathbf{v}_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{P}_b(\mathbf{v})$;

С8) для любого семейства $\{\mathbf{v}_\varepsilon\}$ верна оценка

$$|(\mathbb{P}_{b\varepsilon}(\mathbf{v}_\varepsilon) - \mathbb{P}_{b0}(\mathbf{v}_\varepsilon)) : \mathbb{D}(\mathbf{v}_\varepsilon)| \leq n(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.6)$$

где $n(\varepsilon)$ не зависит от $\{\mathbf{v}_\varepsilon\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство С6 очевидно. Далее, имеем оценку

$$|\mathbb{P}_{b\varepsilon}(\mathbf{v}_\varepsilon) - \mathbb{P}_b(\mathbf{v})| \leq |\mathbb{P}_{b\varepsilon}(\mathbf{v}_\varepsilon) - \mathbb{P}_b(\mathbf{v}_\varepsilon)| + |\mathbb{P}_b(\mathbf{v}_\varepsilon) - \mathbb{P}_b(\mathbf{v})|,$$

из которой очевидно следует С7 в силу свойства С6 и тривиальной оценки $|\mathbb{D}(\mathbf{v}_\varepsilon)| \geq \delta > 0$. Наконец, на основании свойств С1, С4 левая часть (1.6) оценивается сверху величиной (с любым $\varepsilon_1 > 0$)

$$2p_*\varepsilon_1 + d_0 \sup_{|\mathbb{D}(\mathbf{v})| \in [\varepsilon_1, d_0]} |\mathbb{P}_{b\varepsilon}(\mathbf{v}) - \mathbb{P}_{b0}(\mathbf{v})|,$$

которая не зависит от $\{\mathbf{v}_\varepsilon\}$ и может быть в силу свойства С3 сделана сколь угодно малой при $\varepsilon \rightarrow 0$ при подходящем подборе ε_1 .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Функционал $\mathbb{P}_b : \mathbb{D} = \mathbb{P}_{b0} : \mathbb{D} = p_* \kappa(\mathbb{D})$, заданный в $\mathbb{S}_n$, является функционалом класса (4.2), поэтому по следствию 4.3 функционал

$$N(\mathbf{u}) \equiv \int_0^t \int_\Omega (\mathbb{P}(\mathbf{u}) + \mathbb{P}_{b0}(\mathbf{u})) : \mathbb{D}(\mathbf{u}) d\mathbf{x} ds = \int_0^t L(\mathbf{u}) ds + p_* \int_0^t \int_\Omega \kappa(\mathbb{D}(\mathbf{u})) d\mathbf{x} ds \quad (1.7)$$

также удовлетворяет аксиоме А6. Как будет показано в п. 2 (для более общего тензора $\mathbb{P} + \mathbb{P}_{b\varepsilon}$), тензор $\mathbb{P} + \mathbb{P}_b$ удовлетворяет всем аксиомам А1–А4, т.е. он попадает в условия [9], [10], и лишь его неоднозначность, как сказано во введении, препятствует непосредственному применению результатов упомянутых работ.

2. Построение $\mathbb{P}_{b\varepsilon}$ и нетривиальных пар $(\mathcal{P}, \mathbb{T})$. Как было анонсировано в п. 1, построим пример семейства $\mathbb{P}_{b\varepsilon}$, обладающего свойствами С1–С5, опираясь лишь на аксиомы В1–В3 для поля $\mathbb{T}$ и А1–А4 для $\mathbb{P}$. Таким примером является

$$\mathbb{P}_{b\varepsilon} = \varphi_\varepsilon(\kappa(\mathbb{D}))\mathbb{P}_b, \quad (2.1)$$

где φ_ε – произвольное семейство функций, заданных на $\mathbb{R}^+$ и обладающих следующими свойствами:

- D1) $\varphi_\varepsilon(0) = 0$, $\varphi_\varepsilon \equiv 1$ на $[\mu_0 d_0, +\infty)$, где $d_0 = \text{const} > 0$;
- D2) $\varphi_\varepsilon(\cdot)$ непрерывны и не убывают;
- D3) $\varphi_\varepsilon \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно на $[\delta, d_0]$ при всех $\delta > 0$.

В частности, из D1–D3 следует $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$ и непрерывность $\mathbb{P}_{b\varepsilon}$ как функции от $\mathbb{D}$. В качестве φ_ε можно взять, например, функции

$$\varphi_\varepsilon(z) = \begin{cases} \frac{z}{\varepsilon}, & z \leq \varepsilon, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Если поле $\mathbb{T}$ обладает свойствами В1–В3, функции φ_ε – свойствами D1–D3, а тензор $\mathbb{P}$ – свойствами А1–А4, то формула (2.1) дает тензоры $\mathbb{P}_{b\varepsilon}$, удовлетворяющие С1–С5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства C1, C2 и C4 очевидны, поскольку $\varkappa(\mathbb{D}) \geq \mu_0 |\mathbb{D}|$. Далее, при $|\mathbb{D}(\mathbf{v})| \in [\delta/\mu_0, d_0]$ получаем $\varkappa(\mathbb{D}(\mathbf{v})) \in [\delta, d_0]$, что в силу D3 и оценки $|\mathbb{P}_b| \leq p_*$ дает C3. Остается проверить аксиомы A1–A3 для $\mathbb{P} + \mathbb{P}_{b\varepsilon}$ и A2–A4 для $\mathbb{P}_{b\varepsilon}$. Заметим, что

$$\mathbb{P}_{b\varepsilon} : \mathbb{D} = p_* \varphi_\varepsilon(\varkappa(\mathbb{D})) \varkappa(\mathbb{D}) \geq 0, \quad (2.2)$$

откуда следует A1. Далее, выбрав произвольно поля $\mathbf{u}_{1,2} \in X$ и обозначив $\mathbb{D}_i = \mathbb{D}(\mathbf{u}_i)$, будем иметь (ввиду B3) в случае $\mathbb{D}_{1,2} \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{b\varepsilon}(\mathbf{u}_i) : \mathbb{D}_j &= \varphi_\varepsilon(\varkappa(\mathbb{D}_i)) p_* \mathbb{T} \left(\frac{\mathbb{D}_i}{|\mathbb{D}_i|} \right) : \frac{\mathbb{D}_j}{|\mathbb{D}_j|} |\mathbb{D}_j| \\ &\leq \varphi_\varepsilon(\varkappa(\mathbb{D}_i)) p_* \mathbb{T} \left(\frac{\mathbb{D}_j}{|\mathbb{D}_j|} \right) : \frac{\mathbb{D}_j}{|\mathbb{D}_j|} |\mathbb{D}_j| \\ &= p_* \varphi_\varepsilon(\varkappa(\mathbb{D}_i)) \mu \left(\frac{\mathbb{D}_j}{|\mathbb{D}_j|} \right) |\mathbb{D}_j| = p_* \varphi_\varepsilon(\varkappa(\mathbb{D}_i)) \varkappa(\mathbb{D}_j), \end{aligned}$$

причем в силу D1 и C2 полученное неравенство сохраняется (в виде равенства) и в случае $\mathbb{D}_1 = 0$ или $\mathbb{D}_2 = 0$. Но теперь ввиду D2 и (2.2) монотонность $\mathbb{P}_{b\varepsilon}$, а значит, и $\mathbb{P} + \mathbb{P}_{b\varepsilon}$, очевидна.

В силу тривиальной оценки $|\mathbb{P} + \mathbb{P}_{b\varepsilon}| \leq 2((|\mathbb{P}| + p_*)/2)$ и Δ_2 -условия для $\overline{M}$ мы можем написать

$$\overline{M}(|\mathbb{P} + \mathbb{P}_{b\varepsilon}|) \leq C_1 \frac{\overline{M}(|\mathbb{P}|) + \overline{M}(p_*)}{2},$$

что после интегрирования по Ω даст A3.

Наконец, A4 для $\mathbb{P}_{b\varepsilon}$ следует из теоремы Лебега: $\mathbb{D}(\mathbf{u} - \varepsilon_1 \mathbf{v}) \rightarrow \mathbb{D}(\mathbf{u})$ п.в. при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, откуда $\mathbb{P}_{b\varepsilon}(\mathbf{u} - \varepsilon_1 \mathbf{v}) \rightarrow \mathbb{P}_{b\varepsilon}(\mathbf{u})$ п.в., и имеется оценка $|\mathbb{P}_{b\varepsilon}| \leq p_*$, так что сходимость сильная в любом L_p .

Теперь рассмотрим вопрос о нетривиальных парах $(\mathcal{P}, \mathbb{T})$, удовлетворяющих аксиомам B1–B3, что эквивалентно построению векторного поля $\mathbf{t}$ на единичной сфере в $\mathbb{R}^m$ (где $m = n(n+1)/2$), обеспечивающего B1–B3 и такого, что множество его значений $\partial \mathcal{P}$ определяет область $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^m$ со свойствами, оговоренными во введении. Удобно сперва проанализировать эту задачу на модельном случае $m = 2$ (хотя он и не соответствует никаким $\mathbb{S}_n$), а затем уже обобщить на произвольные $m > 2$.

Итак, ищем поле $\mathbf{t}$, заданное на единичной окружности $\{(\cos \varphi, \sin \varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi]\}$, в виде

$$\mathbf{t}(\varphi) = r(\varphi) \begin{bmatrix} \cos(\beta(\varphi) + \varphi) \\ \sin(\beta(\varphi) + \varphi) \end{bmatrix}.$$

Для того, чтобы с ростом φ вектор $\mathbf{t}(\varphi)$ пробегал границу выпуклой области $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^2$, необходимо условие

E1) функция $(\beta(\varphi) + \varphi)$ возрастает по φ .

Определив монотонную функцию α формулой $\alpha^{-1}(\varphi) = \beta(\varphi) + \varphi$, получаем, что

$$\mathbf{t}(\alpha(\varphi)) = r(\alpha(\varphi)) \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix},$$

т.е.

$$\partial \mathcal{P} = \{r = r_1(\varphi) \equiv r(\alpha(\varphi)) \mid \varphi \in [0, 2\pi]\}. \quad (2.3)$$

Аксиома В1 и свойства $0 \in \mathcal{P}$, $\rho(0, \partial\mathcal{P}) = 1$ приводят к требованиям

Е2) $r \in C$; $r(2\pi) = r(0)$; $\beta \in C$; $0 < r \leq 1$; $\max r = 1$.

Кроме того, В1 дает $\beta(2\pi) - \beta(0) = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, но поскольку

$$\mu(\varphi) = r(\varphi) \cos \beta(\varphi), \quad (2.4)$$

то (ввиду непрерывности β) В2 дает $\beta \in (-\pi/2 + 2\pi q, \pi/2 + 2\pi q)$, $q \in \mathbb{Z}$, так что обязательно $k = 0$. Итак (полагая без ограничения общности $q = 0$),

Е3) $\beta(2\pi) = \beta(0)$, $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Если считать β и r достаточно гладкими, то условие выпуклости $\mathcal{P}$ записывается в виде $r_1 r''_1 \leq r_1^2 + 2r_1'^2$, что после элементарного пересчета принимает форму неравенства

$$r r'' \leq r^2(\beta' + 1)^2 + 2r'^2 + r r' \frac{\beta''}{\beta' + 1}. \quad (2.5)$$

Свойство В3 принимает вид $r(\varphi_2) \cos(\beta(\varphi_2) + \varphi_2 - \varphi_1) \leq r(\varphi_1) \cos \beta(\varphi_1)$, или, после замены $\varphi_2 = \varphi$, $\varphi_1 = \varphi + \lambda$, без ограничения общности считая, что $(\varphi_1 - \varphi_2) \in [-\pi, \pi]$, получаем окончательную форму

Е4) $r(\varphi) \cos(\beta(\varphi) - \lambda) \leq r(\varphi + \lambda) \cos \beta(\varphi + \lambda)$, $\forall \varphi \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Рассматривая свойство Е4 при малых λ , легко получить необходимое условие

$$\frac{r'}{r} = (\operatorname{tg} \beta)(\beta' + 1), \quad (2.6)$$

из которого легко следует (2.5) (причем строго), т.е. $\mathcal{P}$ всегда строго выпукла в описанных условиях.

Таким образом, наша задача (т.е. Е1–Е4) переформулируется следующим эквивалентным образом. Мы произвольно задаем функцию γ со свойствами

Ф1) γ непрерывна на $\mathbb{R}$ и периодична с периодом 2π ;

Ф2) $\gamma' + \gamma^2 + 1 \geq 0$;

Ф3) $\int_0^{2\pi} \gamma(\varphi) d\varphi = 0$;

и вычисляем

$$\beta = \operatorname{arctg} \gamma, \quad r(\varphi) = C \sqrt{\gamma^2(\varphi) + 1} \cdot \exp\left(\int_0^\varphi \gamma(\eta) d\eta\right) \quad (2.7)$$

(т.е. решаем (2.6)), что при подходящем выборе $C > 0$ гарантирует выполнение условий Е1–Е3 и (2.5), так что остается лишь обеспечить Е4. При этом

$$\mu(\varphi) = C \exp\left(\int_0^\varphi \gamma(\eta) d\eta\right),$$

а условие Е4 принимает вид

Ф4) $\exp\left(\int_\varphi^{\varphi+\lambda} \gamma(\eta) d\eta\right) \geq \cos \lambda + \gamma(\varphi) \sin \lambda$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$.

Множество функций γ со свойствами Ф1–Ф4 включает “почти все” функции со свойствами Ф1 и Ф3, как показывает следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Пусть функция γ удовлетворяет Ф1, Ф3 и, кроме того, Ф2') $\gamma' \geq -1$.

Тогда γ удовлетворяет также Ф2 и Ф4.

ЛЕММА 2.3. *Функция*

$$F(\lambda, \gamma) = \exp\left(\lambda\gamma - \frac{\lambda^2}{2}\right) - \cos \lambda - \gamma \sin \lambda$$

неотрицательна при всех $(\lambda, \gamma) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.3 не приводим ввиду его элементарности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2.2. Из F2' очевидно следует F2, а также оценки

$$\begin{aligned} \gamma(\eta) - \gamma(\varphi) &\geq -(\eta - \varphi) && \text{при } \eta \geq \varphi, \\ \gamma(\eta) - \gamma(\varphi) &\leq -(\eta - \varphi) && \text{при } \eta \leq \varphi. \end{aligned}$$

Отсюда, очевидно,

$$\int_{\varphi}^{\varphi+\lambda} (\gamma(\eta) - \gamma(\varphi)) d\eta \geq - \int_{\varphi}^{\varphi+\lambda} (\eta - \varphi) d\eta = -\frac{\lambda^2}{2},$$

т.е.

$$\exp\left(\int_{\varphi}^{\varphi+\lambda} \gamma(\eta) d\eta\right) - \cos \lambda - \gamma(\varphi) \sin \lambda \geq F(\lambda, \gamma(\varphi)),$$

что завершает доказательство ввиду леммы 2.3.

Итак, модельная задача о плоских полях $\mathbf{t}$ допускает богатое семейство решений (и достаточно точное описание всех возможных решений), на основе которых мы можем предъявить класс осесимметрических (т.е. специальных, не претендуя на полное решение задачи о всех возможных $(\mathcal{P}, \mathbb{T})$ пар $(\mathcal{P}, \mathbb{T})$ в любом $\mathbb{R}^m$ (в том числе в $\mathbb{S}_n$). Для этого зафиксируем произвольно элемент $\mathbb{B}_0 \in S_1$ (полюс) и соответствующий ему экватор $\{\mathbb{C} \in S_1 \mid \mathbb{C} : \mathbb{B}_0 = 0\}$. Любой элемент $\mathbb{B}_1 \in S_1$, не совпадающий с $\pm\mathbb{B}_0$, имеет единственный соответствующий ему экваториальный элемент

$$\mathbb{E}(\mathbb{B}_1) = \frac{\mathbb{B}_1 - (\mathbb{B}_1 : \mathbb{B}_0)\mathbb{B}_0}{|\mathbb{B}_1 - (\mathbb{B}_1 : \mathbb{B}_0)\mathbb{B}_0|}$$

и определяет свой меридиан как совокупность всех $\mathbb{B} \in S_1$ с тем же $\mathbb{E}(\mathbb{B})$. Введя широту любого тензора $\mathbb{B} \in S_1$ как угол $\varphi(\mathbb{B}) = \arccos(\mathbb{B} : \mathbb{B}_0)$ из интервала $[0, \pi]$ (широта экватора тогда равна $\pi/2$, полюса $\mathbb{B}_0$ — нулю, а полюса $(-\mathbb{B}_0)$ равна π), мы легко убеждаемся в геометрически очевидных равенствах

$$\sin \varphi = \mathbb{E}(\mathbb{B}) : \mathbb{B}, \quad \mathbb{B} = (\cos \varphi)\mathbb{B}_0 + (\sin \varphi)\mathbb{E}(\mathbb{B}),$$

откуда $\sin \varphi = |\mathbb{B} - (\cos \varphi)\mathbb{B}_0|$. Теперь мы готовы предъявить анонсированный класс пар $(\mathcal{P}, \mathbb{T})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4. Пусть функции r и β обладают свойствами E1–E4 и, кроме того,

$$\text{E5) } \beta(2\pi - \varphi) = -\beta(\varphi), \quad r(2\pi - \varphi) = r(\varphi), \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Тогда осесимметрическое поле

$$\mathbb{T}(\mathbb{B}) = r(\varphi) \cos(\beta(\varphi) + \varphi)\mathbb{B}_0 + r(\varphi) \sin(\beta(\varphi) + \varphi)\mathbb{E}(\mathbb{B})$$

обладает свойствами B1–B3, а определяемое им $\mathcal{P}$ есть ограниченная выпуклая область в $\mathbb{S}_n$, содержащая 0, причем $\rho(0, \partial\mathcal{P}) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из E3 и E5 следует $\beta(0) = \beta(\pi) = 0$, откуда вытекает непрерывность $\mathbb{T}$ на полюсах, в то время как в остальных точках S_1 непрерывность $\mathbb{T}$ очевидна из E2. Свойства $\mathcal{P}$ получаются из соответствующих (обеспеченных в силу E1–E4) свойств сечений $\mathcal{P}$ меридианами (т.е. имеет место (2.3)). Нетрудно проверить, что (2.4) снова верно, что обеспечивает B2 в силу E2 и E3. Ввиду E1 имеем $0 \leq \beta(\varphi) + \varphi \leq \pi$ при $\varphi \in [0, \pi]$, поэтому на основании E4 можно написать

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(\mathbb{B}_2) : \mathbb{B}_1 &= r(\varphi_2) \cos(\beta(\varphi_2) + \varphi_2) \cos \varphi_1 \\ &\quad + r(\varphi_2) \cos(\beta(\varphi_2) + \varphi_2) (\sin \varphi_1) \mathbb{E}(\mathbb{B}_2) : \mathbb{E}(\mathbb{B}_1) \\ &\leq r(\varphi_2) \cos(\beta(\varphi_2) + \varphi_2 - \varphi_1) \leq r(\varphi_1) \cos \beta(\varphi_1) = \mathbb{T}(\mathbb{B}_1) : \mathbb{B}_1. \end{aligned}$$

Чтобы описать множество функций (β, r) со свойствами E1–E5, воспользуемся снова представлением (2.7).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.5. Пусть функция γ удовлетворяет F1, F2' и

F5) $\gamma(2\pi - \varphi) = -\gamma(\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$.

Тогда β и r , вычисленные из (2.7) с подходящей $C > 0$, удовлетворяют E1–E5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из F5 следует F3, так что можно применить утверждение 2.2, после чего построить β и r из (2.7), удовлетворяющие E1–E4. Теперь E5 легко проверяется непосредственно в (2.7) на основании F5 и F3.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Из F5 и F1 следует $\gamma(0) = \gamma(\pi) = \gamma(2\pi) = 0$, причем на самом деле F2' означает $|\gamma'| \leq 1$. В утверждении (2.5) описан частный случай. Вообще говоря, следует требовать вместо F2' оценку $|\gamma'| \leq 1 + \gamma^2$ (в которую превращается F2 ввиду F5) и отдельно проверять F4.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. Упомянутый во введении изотропный случай соответствует $\beta \equiv \gamma \equiv 0$, $r \equiv 1$.

3. Разрешимость задачи А. Прежде чем формулировать основную теорему, определим необходимые вспомогательные понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Задачей A_ε назовем задачу (0.1), (0.2), (1.1), (1.2), замыкаемую соотношением $\mathbb{P}_r = \mathbb{P}_f + \mathbb{P}_{b\varepsilon}$, где $\mathbb{P}_{b\varepsilon}$ – аппроксимирующее семейство стоксовых тензоров со свойствами C1–C5 (а значит, и C6–C8).

Как показано в п. 2, требуемое в определении 3.1 семейство $\mathbb{P}_{b\varepsilon}$ всегда может быть построено – например, по формуле (2.1) с φ_ε из D1–D3.

Определим пространство

$$Y = \{\mathbf{v} \mid \mathbb{D}(\mathbf{v}) \in L_M(Q_T), \mathbf{v}|_{\partial\Omega \times (0, T)} = 0\}$$

с нормой $\|\mathbf{v}\|_Y = \|\mathbb{D}(\mathbf{v})\|_{L_M(Q_T)}$ и N-функции

$$\Phi_\gamma(s) = (1 + s) \ln^\gamma(1 + s), \quad \Psi_\gamma = \overline{\Phi}_\gamma.$$

Свойства пространства Y изучались в [9], [10], где, в частности, показано, что оно не обязано совпадать с $L_M(0, T, X)$. Будем налагать следующие ограничения на входные данные задачи А:

$$\mathbf{f} \in K_{\Psi_{\beta/2}}(Q_T), \quad \rho_0 \in L_{\Phi_\beta}(\Omega), \quad \frac{\mathbf{w}_0}{\rho_0} \in L_{\Psi_{\beta/2}}(\text{supp } \rho_0), \quad \beta > \frac{7}{2}. \quad (3.1)$$

В этих условиях благодаря С5 задача A_ε удовлетворяет условиям теоремы 3.5 из [10], что дает существование ее решения $(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)$ при любом $T > 0$ в классе

$$\rho_\varepsilon \in L_\infty(0, T, L_{\Phi_\beta}(\Omega)), \quad \rho_\varepsilon \geq 0, \quad \mathbf{u}_\varepsilon \in Y, \quad (3.2)$$

а также энергетическое равенство

$$\int_\Omega \left(\frac{\rho_\varepsilon |\mathbf{u}_\varepsilon|^2}{2} + \rho_\varepsilon \ln \rho_\varepsilon \right) d\mathbf{x} \Big|_0^t + \int_0^t \int_\Omega [(\mathbb{P}(\mathbf{u}_\varepsilon) + \mathbb{P}_{b\varepsilon}(\mathbf{u}_\varepsilon)) : \mathbb{D}(\mathbf{u}_\varepsilon) - \rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{f}] d\mathbf{x} ds = 0. \quad (3.3)$$

Теперь мы готовы сформулировать основной результат.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть заданы тензорная функция $\mathbb{P}(\cdot)$ со свойствами А1–А7 с ограничением (1.3) (например, в виде, описанном в примере 1.1) и поле $\mathbb{T}$ со свойствами В1–В3 (например, в виде, описанном в п. 2, сюда входит и тривиальный изотропный случай тождественного поля $\mathbb{T}$). Пусть произвольно заданы число $T > 0$ и входные данные класса (3.1). Тогда выполнены следующие утверждения.

1. Задача А (см. определение 1.3) имеет в Q_T решение класса

$$\rho \in L_\infty(0, T, L_{\Phi_\beta}(\Omega)), \quad \rho \geq 0, \quad \mathbf{u} \in Y,$$

удовлетворяющее энергетическому равенству

$$\int_\Omega \left(\frac{\rho |\mathbf{u}|^2}{2} + \rho \ln \rho \right) d\mathbf{x} \Big|_0^t + \int_0^t \int_\Omega [(\mathbb{P}(\mathbf{u}) + \mathbb{P}_b(\mathbf{u})) : \mathbb{D}(\mathbf{u}) - \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}] d\mathbf{x} ds = 0. \quad (3.4)$$

2. Уравнение (0.2) (с (0.3), (0.4) и (1.2)) удовлетворяется этим решением в том смысле, что $\mathbb{P}_b(\mathbf{u}) = p_* \mathbb{T}(\mathbb{D}/|\mathbb{D}|)$ при $\mathbb{D} \neq 0$, а на множестве $\{\mathbb{D} = 0\}$ величина $\mathbb{P}_b(\mathbf{u})$ есть вполне определенный тензор $\overline{\mathbb{P}}_b$ со значениями из множества $p_* \overline{\mathcal{P}}$.

3. Решение $(\rho, \mathbf{u})$ есть предел решений $(\rho_{\varepsilon_k}, \mathbf{u}_{\varepsilon_k})$ некоторой последовательности задач A_{ε_k} , сходящихся к нему в смысле (3.9) и сильно в $L_p(0, T, L_{\Phi_*}(\Omega)) \times L_p(Q_T)$ с любыми $p < +\infty$, $\Phi_* \prec \prec \Phi_\beta$, причем $\rho_{\varepsilon_k} \rightarrow \rho$, $\mathbb{D}(\mathbf{u}_{\varepsilon_k}) \rightarrow \mathbb{D}(\mathbf{u})$ п.в. в Q_T .

4. Уравнение (0.1) выполнено для рассматриваемого решения в пространстве $L_M(0, T, W^{-1}L_{\Phi_\beta}(\Omega))$, а (0.2) – в Y^* , начальные данные (1.1)_{1,2} принимаются по сильной непрерывности в пространстве $W^{-1}L_{\Phi_\beta}(\Omega) \times X^*$, а краевое условие (1.1)₃ понимается в смысле значений непрерывной по Гёльдеру (по $\mathbf{x}$ при всех t) функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Пункт 4 теоремы 3.2 не нуждается в отдельном доказательстве, так как требуемые свойства решения показываются аналогично тому, как это делалось в [10].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Как сказано выше, условия (3.1) обеспечивают существование решения $(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)$ задачи A_ε со свойствами (3.2), (3.3). Обоснование предельного перехода по $\varepsilon \rightarrow 0$ для удобства представим в виде нескольких этапов.

Этап I: равномерные по ε оценки, слабые пределы. Применяя к задаче (0.1), (1.1)₁ для $(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon)$ результаты [13], получим оценку

$$\|\rho_\varepsilon\|_{L_\infty(0, t, L_{\Phi_\beta}(\Omega))} \leq C_1 \left(1 + \int_0^t \int_\Omega M(\operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon) d\mathbf{x} ds \right) \quad (3.5)$$

(здесь и далее символами C_k , $k \in \mathbb{N}$, обозначены постоянные, зависящие лишь от T , $\operatorname{mes} \Omega$ и норм (3.1)). При этом следует оговориться, что в целом работа [13] посвящена периодической по $\mathbf{x}$ задаче Коши (с параллелепипедом Ω вместо произвольной Ω

и условий (1.1)₃), но, как нетрудно проследить, нужный нам результат (3.5) сохраняется и в нашей ситуации. Используя теперь очевидные неравенства

$$-e^{-1} \leq \xi \ln \xi \leq \Phi_\beta(\xi) + 1 \quad \forall \xi \geq 0, \quad \rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \mathbf{f} \leq \varepsilon_1 \frac{\rho_\varepsilon |\mathbf{f}|^2}{2} + \frac{\rho_\varepsilon |\mathbf{u}_\varepsilon|^2}{2\varepsilon_1} \quad \forall \varepsilon_1 > 0,$$

аксиому A1 для $\mathbb{P} + \mathbb{P}_{b\varepsilon}$ и подбирая ε_1 достаточно малым в соответствии с C_1 и нормой $\mathbf{f}$, легко выводим из (3.3) оценку

$$\int_0^T \int_\Omega M(|\mathbb{D}(\mathbf{u}_\varepsilon)|) d\mathbf{x} dt \leq C_2, \quad (3.6)$$

а тогда (3.5) дает

$$\|\rho_\varepsilon\|_{L_\infty(0,T,L_{\Phi_\beta}(\Omega))} \leq C_3. \quad (3.7)$$

Применяя теперь свойства A3 для $\mathbb{P}$ и C1 для $\mathbb{P}_{b\varepsilon}$, мы можем написать

$$\int_0^T \int_\Omega \overline{M}(|\mathbb{P}(\mathbf{u}_\varepsilon)|) d\mathbf{x} dt \leq C_4, \quad |\mathbb{P}_{b\varepsilon}(\mathbf{u}_\varepsilon)| \leq C_5. \quad (3.8)$$

Оценки (3.6)–(3.8) позволяют выделить последовательности (сохраним для них тот же индекс ε) такие, что

$$(\rho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon, \mathbb{P}(\mathbf{u}_\varepsilon), \mathbb{P}_{b\varepsilon}(\mathbf{u}_\varepsilon)) \rightarrow (\rho, \mathbf{u}, \overline{\mathbb{P}}, \overline{\mathbb{P}}_b) \quad (3.9)$$

*-слабо в $L_\infty(0,T,L_{\Phi_\beta}(\Omega)) \times Y \times L_{\overline{M}}(Q_T) \times L_\infty(Q_T)$,

где

$$\rho \in L_\infty(0,T,L_{\Phi_\beta}(\Omega)), \quad \mathbf{u} \in Y, \quad \overline{\mathbb{P}} \in L_{\overline{M}}(Q_T), \quad \overline{\mathbb{P}}_b \in L_\infty(Q_T), \quad (3.10)$$

– некоторые функции. Кроме того, аналогично [10] строятся *-слабые пределы $\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{a}$, $\rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \otimes \mathbf{u}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{B}$ и доказывается, что $\mathbf{a} = \rho \mathbf{u}$, $\mathbb{B} = \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$, причем

$$\rho_\varepsilon \rightarrow \rho, \quad \rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \rightarrow \rho \mathbf{u}, \quad \rho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \otimes \mathbf{u}_\varepsilon \rightarrow \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \quad (3.11)$$

*-слабо в $L_{\Phi_\beta}(\Omega)$ при п.в. $t \in [0, T]$.

Благодаря (3.9) и (3.11) в задаче A_ε можно перейти к пределу и получить уравнение (0.1) и вместо (0.2) уравнение

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla \rho + \operatorname{div} \overline{\mathbb{P}} + \operatorname{div} \overline{\mathbb{P}}_b + \rho \mathbf{f}, \quad (3.12)$$

понимаемые в соответствующем обобщенном смысле. Таким образом, для того, чтобы доказать, что пара $(\rho, \mathbf{u})$ есть решение задачи A, остается обосновать равенства

$$\operatorname{div} \overline{\mathbb{P}} = \operatorname{div} \mathbb{P}(\mathbf{u}), \quad \operatorname{div} \overline{\mathbb{P}}_b = \operatorname{div} \mathbb{P}_b(\mathbf{u}).$$

Этап II: сравнение энергетических равенств. Переходя в (3.3) к пределу на основании (3.9) и (3.11), мы можем написать

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \frac{\rho |\mathbf{u}|^2}{2} d\mathbf{x} \Big|_0^t + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^t \int_\Omega (\mathbb{P}(\mathbf{u}_\varepsilon) + \mathbb{P}_{b\varepsilon}(\mathbf{u}_\varepsilon)) : \mathbb{D}(\mathbf{u}_\varepsilon) d\mathbf{x} ds + K(\rho_\varepsilon) \right) \\ &= \int_0^t \int_\Omega \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} d\mathbf{x} ds + K(\rho_0), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $K(\rho) = \int_{\Omega} \rho \ln \rho \, d\mathbf{x}$. С другой стороны, по лемме 3.3 из [10] решение задачи (0.1), (3.12), (1.1) класса (3.10) обязано удовлетворять равенству

$$\int_{\Omega} \frac{\rho |\mathbf{u}|^2}{2} \, d\mathbf{x} \Big|_0^t + \int_0^t \int_{\Omega} (\bar{\mathbb{P}} + \bar{\mathbb{P}}_b) : \mathbb{D}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} \, ds + K(\rho) = \int_0^t \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \, d\mathbf{x} \, ds + K(\rho_0). \quad (3.14)$$

Используя вытекающее из свойства C8 соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \int_{\Omega} (\mathbb{P}_{b\varepsilon}(\mathbf{u}_{\varepsilon}) - \mathbb{P}_{b0}(\mathbf{u}_{\varepsilon})) : \mathbb{D}(\mathbf{u}_{\varepsilon}) \, d\mathbf{x} \, ds = 0, \quad (3.15)$$

мы можем заключить из (3.13) и (3.14), что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (N(\mathbf{u}_{\varepsilon}) + K(\rho_{\varepsilon})) = \int_0^t \int_{\Omega} (\bar{\mathbb{P}} + \bar{\mathbb{P}}_b) : \mathbb{D}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} \, ds + K(\rho). \quad (3.16)$$

Как указано в примере 4.4, функционал K *-слабо полунепрерывен снизу, и ввиду (3.11)₁ мы можем утверждать, что $K(\rho) \leq \varliminf K(\rho_{\varepsilon})$, так что (3.16), в частности, дает

$$\varliminf_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\mathbf{u}_{\varepsilon}) \leq \int_0^t \int_{\Omega} (\bar{\mathbb{P}} + \bar{\mathbb{P}}_b) : \mathbb{D}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} \, ds. \quad (3.17)$$

Этап III: соображения монотонности. В силу аксиомы A2 для $\mathbb{P} + \mathbb{P}_{b\varepsilon}$ при всех $\mathbf{v} \in Y$ можно написать неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} (\mathbb{P} + \mathbb{P}_{b\varepsilon})(\mathbf{u}_{\varepsilon}) : \mathbb{D}(\mathbf{u}_{\varepsilon}) \, d\mathbf{x} \, ds \\ & \geq \int_0^t \int_{\Omega} (\mathbb{P} + \mathbb{P}_{b\varepsilon})(\mathbf{v}) : (\mathbb{D}(\mathbf{u}_{\varepsilon}) - \mathbb{D}(\mathbf{v})) \, d\mathbf{x} \, ds + \int_0^t \int_{\Omega} (\mathbb{P} + \mathbb{P}_{b\varepsilon})(\mathbf{u}_{\varepsilon}) : \mathbb{D}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \, ds, \end{aligned}$$

в котором можно перейти к пределу:

$$\varliminf N(\mathbf{u}_{\varepsilon}) \geq \int_0^t \int_{\Omega} (\mathbb{P} + \mathbb{P}_{b0})(\mathbf{v}) : (\mathbb{D}(\mathbf{u}) - \mathbb{D}(\mathbf{v})) \, d\mathbf{x} \, ds + \int_0^t \int_{\Omega} (\bar{\mathbb{P}} + \bar{\mathbb{P}}_b) : \mathbb{D}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \, ds. \quad (3.18)$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (3.9) и (3.15), а также сильной сходимостью (в любом $L_p(Q_T)$) $\mathbb{P}_{b\varepsilon}(\mathbf{v}) \rightarrow \mathbb{P}_{b0}(\mathbf{v})$, следующей из C1 и C6. Теперь (3.17) и (3.18) позволяют записать неравенство

$$\int_0^t \int_{\Omega} [(\bar{\mathbb{P}} + \bar{\mathbb{P}}_b) - (\mathbb{P} + \mathbb{P}_{b0})(\mathbf{v})] : (\mathbb{D}(\mathbf{u}) - \mathbb{D}(\mathbf{v})) \, d\mathbf{x} \, ds \geq 0, \quad (3.19)$$

которое, однако, не допускает применения стандартных аргументов метода монотонности ($\mathbf{v} = \mathbf{u} - \varepsilon_1 \mathbf{w}$, и т.д. [14; с.172]) в силу разрывности тензора $\mathbb{P}_{b0}$ (т.е. поточечный $\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \mathbb{P}_{b0}(\mathbf{u} + \varepsilon_1 \mathbf{w})$ зависит от $\mathbf{w}$ и, вообще говоря, не равен $\mathbb{P}_{b0}(\mathbf{u})$), так что следует действовать несколько иначе, используя непрерывность тензора $\mathbb{P}_{b0}$ на лучах

$$\mathbb{P}_{b0}(\mathbf{v} \pm \varepsilon_1 \mathbf{v}) \rightarrow \mathbb{P}_{b0}(\mathbf{v}) \quad \text{при всех } \mathbf{v} \text{ (поточечно).}$$

Этап IV: частичное использование (3.19) и “снятие черт” в (3.14) и (3.16); сильная сходимость. Положим в (3.19) $\mathbf{v} = (1 \pm \varepsilon_1)\mathbf{u}$, $\varepsilon_1 > 0$, и перейдем к пределу при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$:

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\bar{\mathbb{P}} + \bar{\mathbb{P}}_b) : \mathbb{D}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} \, ds = N(\mathbf{u}). \quad (3.20)$$

Такой предельный переход основан на аксиоме A4 для $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(\mathbf{u} \pm \varepsilon_1 \mathbf{u}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbf{u}) \quad * \text{-слабо в } L_{\overline{M}}(Q_T),$$

и непрерывности тензора $\mathbb{P}_{b0}$ на лучах

$$\mathbb{P}_{b0}(\mathbf{u} \pm \varepsilon_1 \mathbf{u}) \rightarrow \mathbb{P}_{b0}(\mathbf{u}) \quad \text{п.в.}$$

(и потому сильно в любом $L_p(Q_T)$). Сравнивая (3.17) и (3.20), используя представление (1.7) и $*$ -слабую полунепрерывность снизу функционала $\int_{\Omega} \varkappa(\mathbb{D}) d\mathbf{x}$ (см. замечание 1.4), мы можем заключить $\int_0^t L(\mathbf{u}) ds \geq \overline{\lim} \int_0^t L(\mathbf{u}_{\varepsilon}) ds$, что ввиду (3.9) и аксиомы A7 влечет сходимость $\mathbb{D}(\mathbf{u}_{\varepsilon_k}) \rightarrow \mathbb{D}(\mathbf{u})$ п.в. в Q_T , а потому (ввиду компактности по мере и равностепенной непрерывности норм в L_p [11; с. 117, 135]) и сильно в любом $L_p(Q_T)$ с $p < +\infty$. Сравнивая теперь (3.16) и (3.20) и используя $*$ -слабую полунепрерывность снизу функционала N (см. замечание 1.4), получаем $K(\rho) \geq \overline{\lim} K(\rho_{\varepsilon_k})$, что ввиду (3.11)₁ и примера 4.10 влечет сходимость $\rho_{\varepsilon_k} \rightarrow \rho$ п.в. в Q_T и потому сильную в любом пространстве вида $L_p(0, T, L_{\Phi_*}(\Omega))$ с $\Phi_* \prec \Phi_{\beta}$ и $p < +\infty$ (аналогично). Кроме того, ввиду (3.20) соотношение (3.14) превращается в (3.4).

Этап V: “снятие черт” в (3.12). В силу аксиомы A5 для $\mathbb{P}$, оценки (3.6), сходимостей $\mathbb{D}(\mathbf{u}_{\varepsilon_k}) \rightarrow \mathbb{D}(\mathbf{u})$ п.в. в Q_T и (3.9) получаем $\mathbb{P}(\mathbf{u}) = \overline{\mathbb{P}}$.

На множестве $F = \{\mathbb{D}(\mathbf{u}) \neq 0\}$ в силу свойства C7 имеем $\mathbb{P}_{b\varepsilon_k}(\mathbf{u}_{\varepsilon_k}) \rightarrow \mathbb{P}_b(\mathbf{u})$ п.в., а значит, и в норме $L_p(F)$ при всех $p < +\infty$ (благодаря C1). Значит, $\mathbb{P}_b(\mathbf{u}) = \overline{\mathbb{P}}_b$ на F .

На $Q_T \setminus F$ мы можем лишь сказать, что (в силу C1) $\mathbb{P}_{b\varepsilon}(\mathbf{u}_{\varepsilon}) \in p_* \overline{\mathcal{P}}$, а потому ввиду (3.9) и примера 4.5 с $K = p_* \overline{\mathcal{P}}$ также и

$$\overline{\mathbb{P}}_b = * - w \lim_{L_{\infty}(Q_T \setminus F) \varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}_{b\varepsilon}(\mathbf{u}_{\varepsilon}) \in p_* \overline{\mathcal{P}}.$$

Таким образом, на всем Q_T имеем $\overline{\mathbb{P}}_b = \mathbb{P}_b(\mathbf{u})$ в смысле многозначной функции (0.4) и, следовательно, (3.12) превращается в (0.2), что доказывает пп. 1–3 теоремы. Учитывая замечание 3.3, мы можем завершить доказательство.

4. Вспомогательные утверждения. В отличие от случая слабой сходимости, $*$ -слабая полунепрерывность снизу для выпуклых функционалов требует отдельных комментариев; кроме того, нас интересует обратное свойство (вывод более сильной сходимости из сходимости значений функционала). При этом для нас важны прежде всего пространства функций (в том числе векторнозначных) и интегральные функционалы на них. Тензоры из $\mathbb{S}_n$ в данном контексте можно рассматривать как векторы размерности n^2 .

Начнем с простого утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть F – произвольный функционал в банаховом пространстве X со значениями в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, а N – сопряженный к нему функционал в X^* , т.е.

$$N(\mathbf{u}) = \sup_{\mathbf{v} \in X} ((\mathbf{u}, \mathbf{v}) - F(\mathbf{v})) \quad \forall \mathbf{u} \in X^*.$$

Тогда N $*$ -слабо полунепрерывен снизу в X^* :

$$N(\mathbf{u}) \leq \underline{\lim} N(\mathbf{u}_k) \quad \forall \mathbf{u}_k \rightarrow \mathbf{u} \quad * \text{-слабо в } X^*.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО тривиально.

Для интегральных функционалов N в пространствах функций применение предложения 4.1 требует изучения операции сопряжения для функций в конечномерном пространстве:

$$f^*(\mathbf{u}) = \sup_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} ((\mathbf{u}, \mathbf{v}) - f(\mathbf{v})), \quad (4.1)$$

где

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad f \not\equiv +\infty, \quad f \text{ полунепрерывна снизу и выпукла.} \quad (4.2)$$

Класс (4.2) совпадает с множеством собственных замкнутых выпуклых функций [15; с. 41, 68], на этом классе операция (4.1) взаимно однозначна и инволютивна: $f^{**} = f$ [15; с. 120]. Для гладких строго выпуклых f (4.1) есть преобразование Лежандра [15; с. 272], а для N -функций (4.1) дает обычную двойственность $(\cdot)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. Пусть f — функция класса (4.2). Рассмотрим функционал

$$F(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{v}(\mathbf{x})) d\Omega$$

как функционал из $X \subset \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, где $X = L_1$ или $X = E_{\Phi}$ с некоторой N -функцией Φ (функции из X векторнозначные). Тогда $F^* = N$, где

$$N(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} f^*(\mathbf{u}(\mathbf{x})) d\Omega$$

(функционал из $X^* \subset \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению (4.1) неравенство $F^* \leq N$ тривиально. Покажем обратное неравенство. Из (4.1) следует

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathbf{w}_{\varepsilon}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^n: \quad (\mathbf{u}, \mathbf{w}_{\varepsilon}(\mathbf{u})) - f(\mathbf{w}_{\varepsilon}(\mathbf{u})) \geq f^*(\mathbf{u}) - \varepsilon.$$

Пусть $\mathbf{u} \in X^*$ таково, что $N(\mathbf{u}) < +\infty$. Положим $\mathbf{v}_{\varepsilon} = T_{a(\varepsilon)}(\mathbf{w}_{\varepsilon}(\mathbf{u}))$, где $T_N: \mathbf{b} \mapsto \mathbf{b}\chi_{\{|\mathbf{b}| \leq N\}}$ — оператор срезки, а числа $a(\varepsilon)$ будут уточнены далее. Тогда $\mathbf{v}_{\varepsilon} \in L_{\infty} \subset X$, так что

$$\begin{aligned} F^*(\mathbf{u}) &\geq (\mathbf{u}, \mathbf{v}_{\varepsilon}) - F(\mathbf{v}_{\varepsilon}) \\ &= \int_{\{|\mathbf{w}_{\varepsilon}(\mathbf{u})| \leq a(\varepsilon)\}} [(\mathbf{u}, \mathbf{w}_{\varepsilon}(\mathbf{u})) - f(\mathbf{w}_{\varepsilon}(\mathbf{u}))] d\Omega - f(0) \text{mes}\{|\mathbf{w}_{\varepsilon}(\mathbf{u})| > a(\varepsilon)\} \\ &\geq N(\mathbf{u}) - \varepsilon \text{mes } \Omega - \int_{\{|\mathbf{w}_{\varepsilon}(\mathbf{u})| > a(\varepsilon)\}} [f^*(\mathbf{u}) + f(0)] d\Omega, \end{aligned}$$

и требуемое получается, если $\text{mes}\{|\mathbf{w}_{\varepsilon}(\mathbf{u})| > a(\varepsilon)\} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, чего можно добиться выбором $a(\varepsilon)$. В случае $N(\mathbf{u}) = +\infty$ доказательство проводится аналогично.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть g — функция класса (4.2). Тогда $f = g^*$ удовлетворяет условиям утверждения 4.2, а, значит, по предложению 4.1 функционал

$$N(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} g(\mathbf{u}(\mathbf{x})) d\Omega$$

*-слабо полунепрерывен снизу во всех пространствах Орлича и в L_{∞} .

ПРИМЕР 4.4. Пусть $n = 1$,

$$g(v) = \begin{cases} +\infty, & v < 0, \\ v \ln v, & v \geq 0. \end{cases}$$

Ввиду следствия 4.3 получаем, что функционал $K(u) = \int_{\Omega} u \ln u \, d\Omega$, рассматриваемый на функциях $u \geq 0$, *-слабо полунепрерывен снизу во всех пространствах Орлича и в L_{∞} .

ПРИМЕР 4.5. Пусть K – выпуклое замкнутое множество. Его индикаторная функция [15; с. 45]

$$\delta(\mathbf{v} \mid K) = \begin{cases} 0, & \mathbf{v} \in K, \\ +\infty & \text{иначе} \end{cases}$$

класса (4.2), поэтому функционал

$$N(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \delta(\mathbf{u} \mid K) \, d\Omega$$

*-слабо полунепрерывен снизу на L_{∞} . Это, в частности, означает, что если последовательность функций $\mathbf{u}_k$ принимает значения только в K и сходится *-слабо в L_{∞} , то предел также принимает значения только в K .

Перейдем к рассмотрению обратной ситуации, когда предел значений функционала равен его значению на *-слабом пределе, и мы пытаемся усилить сходимости. Как известно, для абстрактных пространств X такого рода рассуждения требуют равномерной выпуклости (и, как следствие, рефлексивности) X^* , что не годится в нашей ситуации (пространства Орлича и L_{∞} не рефлексивны). Поэтому мы сразу ограничимся интегральными функционалами.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.6. Пусть функция $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ класса $C^2(A)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ – область, причем тензор D^2f вторых производных положителен, а точнее

$$D^2f(\mathbf{s})\langle \xi, \xi \rangle \geq \frac{\gamma|\xi|^2}{1 + |\mathbf{s}|^2} \quad \forall \mathbf{s} \in A, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (4.3)$$

где $\gamma = \text{const} > 0$. Пусть $L_{\Phi}(\Omega)$ – пространство Орлича из функций со значениями в $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{z}_n \rightarrow \mathbf{z}$ *-слабо в $L_{\Phi}(\Omega)$, причем все $\mathbf{z}_n$ и $\mathbf{z}$ принимают значения в A , а

$$Df(\mathbf{z}) \in E_{\overline{\Phi}}(\Omega), \quad \lim_{\rightarrow} \int_{\Omega} f(\mathbf{z}_n) \, d\Omega \leq \int_{\Omega} f(\mathbf{z}) \, d\Omega. \quad (4.4)$$

Тогда из $\{\mathbf{z}_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $\mathbf{z}$ п.в. в Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n = 1$, $A = (\alpha, \beta)$, $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$, то для всех $x, y \in (\alpha, \beta)$, $x \neq y$, определена величина

$$g_f(x, y) = f'^{-1} \left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right), \quad (4.5)$$

которую мы доопределим как $g_f(x, x) = x$, тогда $g_f(x, y) = g_f(y, x)$. Величина g_f определена на $(\alpha, \beta)^2$ однозначно в силу строгой выпуклости f она есть промежуточная точка в формуле конечных приращений $f(x) - f(y) = f'(g_f(x, y))(x - y)$. Легко проверить (на основании строгой выпуклости f), что

- 1) $g_f(x, y)$ лежит строго внутри отрезка $\langle x, y \rangle$ с концами в точках x и y ;
- 2) $g_f(\cdot, y)$ строго возрастает при всех $y \in (\alpha, \beta)$.

При $n > 1$ функция f строго выпукла и класса C^2 на любом отрезке из A , так что снова можно ввести промежуточную точку $g_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ (но теперь в (4.5) следует понимать под f' производную по направлению $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, а в знаменателе поставить $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$), и она сохраняет свойства 1), 2) на отрезках. Формула конечных приращений принимает вид

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = Df(g_f(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A^2. \quad (4.6)$$

ЛЕММА 4.7. Если $\mathbf{x}_n, \mathbf{x} \in A$, то

$$g_f(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}. \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{x}_n \not\rightarrow \mathbf{x}$, так что можно считать $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| \geq \varepsilon_0 = \text{const} > 0$. Обозначим

$$\mathbf{x}'_n = \mathbf{x} + \varepsilon_0 \frac{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}|} \in \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{x} \rangle \cap S(\mathbf{x}, \varepsilon_0).$$

В силу свойства 2) имеем $|g_f(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) - g_f(\mathbf{x}, \mathbf{x})| \geq |g_f(\mathbf{x}'_n, \mathbf{x}) - g_f(\mathbf{x}, \mathbf{x})|$, т.е.

$$|g_f(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) - \mathbf{x}| \geq \inf_{\mathbf{y} \in S(\mathbf{x}, \varepsilon_0)} |g_f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - \mathbf{x}| = \text{const} > 0,$$

так как из $f \in C^2(B(\mathbf{x}, \varepsilon_0))$ очевидно следует $g_f(\cdot, \mathbf{x}) \in C(S(\mathbf{x}, \varepsilon_0))$, а $g_f(\cdot, \mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$ на $S(\mathbf{x}, \varepsilon_0)$ в силу свойства 2).

ЛЕММА 4.8. Для всех $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ верно

$$[Df(\mathbf{a}) - Df(\mathbf{b})] \cdot [\mathbf{a} - \mathbf{b}] \geq \varphi(\mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}) \geq 0, \quad (4.8)$$

где функция φ обладает свойством

$$[\exists \mathbf{y} \in A: \varphi(\mathbf{y}, \xi_k) \rightarrow 0] \quad \Rightarrow \quad [\xi_k \rightarrow 0]. \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ имеем

$$[Df(\mathbf{a}) - Df(\mathbf{b})] \cdot [\mathbf{a} - \mathbf{b}] = (D^2 f)(\mathbf{h}) \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle, \quad \mathbf{h} \in \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle. \quad (4.10)$$

В самом деле, поворотом системы координат можно добиться параллельности вектора $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ одной из координатных осей, а тогда (4.10) очевидно. Легко понять, что $|\mathbf{h}| \leq |\mathbf{b}| + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, поэтому (4.3) и (4.10) дают (4.8) с функцией

$$\varphi(\mathbf{y}, \xi) = \frac{\gamma |\xi|^2}{1 + (|\mathbf{y}| + |\xi|)^2},$$

которая удовлетворяет (4.9), так как $\varphi(\mathbf{y}, \cdot)$ непрерывна, равна 0 только в 0, а на ∞ стремится к $\gamma > 0$.

Теперь, используя (4.6), (4.8), свойство 2) и монотонность Df , мы можем написать цепочку неравенств для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$:

$$\begin{aligned} [f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})] - Df(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) &\geq [Df(g_f(\mathbf{x}, \mathbf{y})) - Df(\mathbf{y})] \cdot [g_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{y}] \\ &\geq \varphi(\mathbf{y}, g_f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathbf{y}) \geq 0. \end{aligned}$$

Полагая $\mathbf{x} = \mathbf{z}_n$, $\mathbf{y} = \mathbf{z}$ и интегрируя по Ω , получим $\varphi(\mathbf{z}, g_f(\mathbf{z}_n, \mathbf{z}) - \mathbf{z}) \rightarrow 0$ в $L_1(\Omega)$, значит, для некоторой подпоследовательности эта сходимость имеет место п.в. в Ω . Применяя теперь (4.9), а затем (4.7), получим требуемое. Утверждение 4.6 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.9. Рассмотрение случая $n = 1$ показывает, что ограничение (4.3) нельзя ослабить, если требуется (4.9).

ПРИМЕР 4.10. Пусть $n = 1$, $A = \mathbb{R}^+$, $f(s) = s \ln s$. Тогда (4.3) выполнено с $\gamma = 2$. Таким образом, мы попадаем в условия утверждения 4.6, если $z_n, z \in L_\Phi$, $\ln z \in E_{\overline{\Phi}}$, т.е. $\overline{\Phi}(C \ln z) \in L_1$ для всех $C > 0$. Легко проверить, что при $\Phi = \Phi_\beta$, $\beta > 1$, из $z \in L_\Phi$ вытекает $\ln z \in E_{\overline{\Phi}}$, т.е. (4.4)₁ выполнено автоматически.

ПРИМЕР 4.11. Пусть $A = \mathbb{S}_n$, $f_s(\mathbb{D}) = \Gamma'_s(|\mathbb{D}^s|^2)|\mathbb{D}^s|^2$ или $f_0(\mathbb{D}) = \Lambda'((\text{tr } \mathbb{D})^2)(\text{tr } \mathbb{D})^2 -$ из таких слагаемых составлен функционал L в примере 1.1; $\Phi = M$; $\mathbf{z} := \mathbb{D}(\mathbf{u})$, $\mathbf{z}_\varepsilon := \mathbb{D}(\mathbf{u}_\varepsilon)$. Условия утверждения 4.6 сводятся к требованиям строгой выпуклости функций f_s (а точнее, оценкам вида (4.3)) и достаточной гладкости.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. C. Bingham, *Fluidity and Plasticity*, McGraw–Hill Book Co., New York, 1922.
- [2] W. Prager, *Introduction to Mechanics of Continua*, Introductions to Higher Mathematics, Ginn and Co., New York, 1961.
- [3] Дж. Серрин, *Математические основы классической механики жидкости*, ИЛ, М., 1963.
- [4] D. Prasad, H. K. Kytomaa, “Particle stress and viscous compaction during shear of dense suspensions”, *Intern. J. of Multiphase Flow*, **21**:5 (1995), 775–785.
- [5] L. E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice–Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1969.
- [6] I. V. Basov, V. V. Shelukhin, “Generalized solutions to the equations of compressible Bingham flows”, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, **79**:3 (1999), 185–192.
- [7] V. V. Shelukhin, “Bingham viscoplastic as a limit of non-newtonian fluids”, *J. Math. Fluid Mech.*, **4**:2 (2002), 109–127.
- [8] J. Málek, M. Růžička, V. V. Shelukhin, “Hershel–Bulkley fluids: existence and regularity of steady flows”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **15**:12 (2005), 1845–1861.
- [9] А. Е. Мамонтов, “О глобальной разрешимости многомерных уравнений Навье–Стокса сжимаемой нелинейно вязкой жидкости. I”, *Сиб. матем. журн.*, **40**:2 (1999), 408–420.
- [10] А. Е. Мамонтов, “О глобальной разрешимости многомерных уравнений Навье–Стокса сжимаемой нелинейно вязкой жидкости. II”, *Сиб. матем. журн.*, **40**:3 (1999), 635–649.
- [11] М. А. Красносельский, Я. Б. Рунтцкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Современные проблемы математики, Физматгиз, М., 1958.
- [12] А. Е. Мамонтов, “Оценки глобальной регулярности для многомерных уравнений сжимаемой неньютоновской жидкости”, *Матем. заметки*, **68**:3 (2000), 360–376.
- [13] А. В. Кажихов, А. Е. Мамонтов, “Об одном классе выпуклых функций и точных классах корректности задачи Коши для уравнения переноса в пространствах Орлича”, *Сиб. матем. журн.*, **39**:4 (1998), 831–850.
- [14] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.
- [15] Р. Рокафеллар, *Выпуклый анализ*, Мир, М., 1973.

А. Е. Мамонтов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
г. Новосибирск
E-mail: relic@hydro.nsc.ru

Поступило

24.11.2006

Исправленный вариант

11.04.2007