Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Самойлов, О нильиндексе радикала относительно свободной ассоциативной алгебры, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 4, 583–592

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3827>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 16:19:20

УДК 512.552.4

О нильиндексе радикала относительно свободной ассоциативной алгебры

Л. М. Самойлов

В работе доказывается, что радикал относительно свободной ассоциативной алгебры счетного ранга над бесконечным полем характеристики $p > 0$ является нильидеалом ограниченного индекса, если сложность многообразия $< p$. Кроме того, в работе получено описание базиса тождеств со следом алгебры матриц M_n над бесконечным полем характеристики $p > 0$, $n < p$.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. В работе рассматриваются ассоциативные алгебры над полем, не обязательно с единицей.

В работе [1] Кемер сформулировал следующую проблему.

ПРОБЛЕМА 1. Верно ли, что над бесконечным полем положительной характеристики радикал Джекобсона относительно свободной алгебры счетного ранга будет нильидеалом ограниченного индекса?

Хорошо известная теорема Амицура утверждает, что радикал относительно свободной алгебры над произвольным бесконечным полем будет нильидеалом. В той же самой работе Кемер доказал следующую теорему, которая существенным образом будет использоваться ниже.

ТЕОРЕМА 1 [1]. *Любой конечно порожденный T -идеал из радикала относительно свободной алгебры является нильидеалом ограниченного индекса.*

В частности, для нематричных многообразий проблема 1 имеет положительное решение.

Пусть F – бесконечное поле характеристики $p > 0$. Рассмотрим свободную ассоциативную алгебру $F\langle X \rangle$, порожденную счетным множеством X . Пусть Γ – собственный T -идеал и $F\langle X \rangle/\Gamma$ – относительно свободная алгебра. Обозначим через n максимальный порядок матричной алгебры M_n такой, что $\Gamma \subseteq T[M_n]$ ($T[A]$ – идеал тождеств алгебры A). Это число n называется *сложностью T -идеала Γ* ; сложность собственного T -идеала конечна по теореме Амицура–Левицкого. Хорошо известно, что радикал алгебры $F\langle X \rangle/\Gamma$ совпадает с идеалом $T[M_n]/\Gamma$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00739).

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Если $n < p$, то проблема 1 имеет положительное решение.*

Из теоремы 1 вытекает, что проблема 1 имеет положительное решение, если идеалы тождеств матричных алгебр конечно базиремы. Поэтому решение проблемы 1 в той или иной степени должно опираться на некоторую ослабленную версию проблемы конечной базиремости идеала $T[M_n]$. В нашем случае это будет лемма 4. Отметим, что конечность базиса тождеств алгебры M_2 над бесконечным полем характеристики $p > 2$ была доказана Кошлуковым (см. [2]). Следовательно, для многообразий сложности 2 над полем характеристики $p > 2$ проблема 1 имеет положительное решение.

Кемер в работе [1] сформулировал еще одну проблему, которая является усилением проблемы 1.

ПРОБЛЕМА 2. Верно ли, что над бесконечным полем положительной характеристики каждое собственное многообразие порождается алгебраической алгеброй ограниченного индекса алгебраичности над некоторым расширением основного поля?

Над полями характеристики 0 также можно рассмотреть аналоги проблем 1 и 2. Используя структурную теорию многообразий алгебр над полями нулевой характеристики, построенную Кемером (см. [3]), можно показать, что в этом случае проблемы 1 и 2 имеют положительное решение для нетривиального многообразия V тогда и только тогда, когда V порождается некоторой конечномерной алгеброй. Этот результат был получен Свиридовой в работе [4].

При доказательстве основной теоремы важную роль будут играть тождества со следом алгебры M_n при $n < p$. Следующая теорема представляет самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 2. *Если $n < p$, то любое тождество со следом алгебры M_n над бесконечным полем характеристики $p > 0$ следует из тождества нулевой степени $\text{Tr}(1) = n$ и полной линеаризации тождества Кэли–Гамильтона $\chi_n(x_1, \dots, x_n) = 0$.*

2. Тождества со следом алгебры M_n . Напомним определение алгебр со следом и тождеств со следом.

Пусть A – произвольная ассоциативная алгебра с единицей над полем F , R – ассоциативная и коммутативная алгебра с единицей над F , $C(A)$ – центр A и $\pi: R \rightarrow C(A)$ – гомоморфизм F -алгебр. Положим $ar = a\pi(r)$ для $a \in A$, $r \in R$. Это определение превращает A в R -алгебру. Пусть $\text{Tr}: A \rightarrow R$ – произвольное R -линейное отображение, удовлетворяющее свойству $\text{Tr}(ab) = \text{Tr}(ba)$ для всех $a, b \in A$. Четверка (A, R, π, Tr) называется *алгеброй со следом*. Для простоты саму алгебру A будем называть алгеброй со следом, предполагая заданными алгебру R и отображения π , Tr .

Обозначим через X счетное множество $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, а через $F^\# \langle X \rangle$ – свободную ассоциативную алгебру с единицей, порожденную множеством X . Определим отношение эквивалентности на свободной полугруппе с единицей $\langle X \rangle$, порожденной множеством X , полагая $u_1 \sim u_2$ тогда и только тогда, когда существуют элементы $v, w \in \langle X \rangle$ такие, что $u_1 = vw$, $u_2 = wv$. Если $u \in \langle X \rangle$, то положим $\bar{u} = \{v \in \langle X \rangle \mid v \sim u\}$. Обозначим через $T \langle X \rangle$ свободную ассоциативную и коммутативную алгебру с единицей, порожденную всеми элементами $\text{Tr}(\bar{u})$, где $u \in \langle X \rangle$.

Алгебра $\tilde{F}\langle X \rangle = F^\sharp\langle X \rangle \otimes T\langle X \rangle$ называется *свободной алгеброй со следом*, порожденной множеством X . Если отождествить алгебры $F^\sharp\langle X \rangle \otimes 1$ и $F^\sharp\langle X \rangle$, то будут иметь место включения

$$X \subset F\langle X \rangle \subset F^\sharp\langle X \rangle \subset \tilde{F}\langle X \rangle.$$

Отождествим также алгебры $T\langle X \rangle$ и $1 \otimes T\langle X \rangle$. Произвольный элемент $f \in \tilde{F}\langle X \rangle$ можно записать в виде F -линейной комбинации элементов

$$\mathrm{Tr}(1)^s u_0 \mathrm{Tr}(u_1) \cdots \mathrm{Tr}(u_n), \quad \text{где } u_i \in \langle X \rangle, \quad n, s \geq 0.$$

Будем называть элементы такого вида *мономами со следом*, а элементы алгебры $\tilde{F}\langle X \rangle$ – *полиномами со следом*. Полиномы из $F\langle X \rangle$ будем называть обычными полиномами.

Пусть A – алгебра со следом, $f = f(x_1, \dots, x_m) \in \tilde{F}\langle X \rangle$. Будем говорить, что алгебра A удовлетворяет *тождеству со следом* $f = 0$, если для произвольных $a_1, \dots, a_n \in A$ в алгебре A выполнено $f(a_1, \dots, a_m) = 0$. Идеал

$$\tilde{T}[A] = \{f \in \tilde{F}\langle X \rangle \mid f = 0 \text{ – тождество со следом алгебры } A\}$$

называется *идеалом тождеств со следом* алгебры A . Очевидно, что идеал тождеств со следом произвольной алгебры содержит идеал обычных тождеств этой алгебры.

Начиная с этого момента будем рассматривать только алгебры со следом, удовлетворяющие тождеству нулевой степени $\mathrm{Tr}(1) = n$. Обозначим через $\tilde{P}_m$ множество всех полилинейных полиномов со следом степени m , зависящих от переменных $x_1, \dots, x_m$. Пусть FS_{m+1} есть групповая алгебра (над F) симметрической группы S_{m+1} , действующей на множестве $\{0, 1, \dots, m\}$. Определим F -линейное отображение $\tilde{\lambda}_m: \tilde{P}_m \rightarrow FS_{m+1}$, полагая

$$\tilde{\lambda}_m(x_{i_1} \cdots x_{i_s} \mathrm{Tr}(x_{j_1} \cdots x_{j_t}) \mathrm{Tr}(x_{k_1} \cdots x_{k_l}) \cdots) = \sigma \in S_{m+1},$$

где σ – перестановка, которая раскладывается на независимые циклы следующим образом:

$$\sigma = (0, i_1, \dots, i_s)(j_1, \dots, j_t)(k_1, \dots, k_l) \cdots$$

При этом символ 0 играет роль метки, отделяющей неследовую часть монома. Из определения свободной алгебры со следом вытекает, что $\tilde{\lambda}_m$ является изоморфизмом пространств. Если $\sigma \in FS_{m+1}$, $f \in \tilde{P}_m$, то положим

$$af = \tilde{\lambda}_m^{-1}(a\tilde{\lambda}_m(f)), \quad fa = \tilde{\lambda}_m^{-1}(\tilde{\lambda}_m(f)a).$$

Обозначим

$$\chi_n(x_1, \dots, x_n) = \tilde{\lambda}_n^{-1} \left(\sum_{\sigma \in S_{n+1}} (-1)^\sigma \sigma \right).$$

Можно показать, что полином $\chi_n(x_1, \dots, x_n)$ является полной линеаризацией полинома Кэли–Гамильтона. Отсюда следует, что алгебра M_n удовлетворяет тождеству $\chi_n(x_1, \dots, x_n) = 0$, а также тождеству $\mathrm{Tr}(1) = n$.

Описание базиса тождеств со следом алгебры M_n над полями характеристики 0 было получено Размысловым [5] в 1979 г. (теорема Размыслова–Прочези). В 1995 г. Кемер обобщил эту важнейшую теорему на поля произвольной характеристики.

ТЕОРЕМА 3 [6]. Пусть F – поле произвольной характеристики. Тогда каждое полилинейное тождество со следом алгебры M_n является следствием тождества $\chi_n(x_1, \dots, x_n) = 0$ и тождества $\text{Tr}(1) = n$.

Теорема 2 переносит эту теорему в случае $n < p$ на полиоднородный уровень. При ее доказательстве мы будем пользоваться результатами из работы [6].

ЛЕММА 1. Пусть алгебра M_n (n произвольно) над бесконечным полем удовлетворяет тождеству со следом $\tilde{f}(x) \cdot \tilde{g}(x) = 0$. Тогда или $\tilde{f}(x) = 0$, или $\tilde{g}(x) = 0$ является тождеством M_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы хорошо известно, если полиномы $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{g}(x)$ принадлежат $F\langle X \rangle$ (см., например, [7]). Сведем доказательство общего случая к случаю обычных полиномов.

В работе [5] показано, что для алгебры M_n существует полином-киллер. Это полином $h(y_1, \dots, y_m) \in F\langle X \rangle$ такой, что $h \notin T[M_n]$ и алгебра M_n удовлетворяет полиоднородному тождеству

$$h(y_1, \dots, y_m) \text{Tr}(y_{m+1}) = w(y_1, \dots, y_m, y_{m+1}),$$

где $w(y_1, \dots, y_m, y_{m+1}) \in F\langle X \rangle$.

Положим $h_i = h(y_1^{(i)}, \dots, y_m^{(i)})$, $i = 1, 2, \dots$, где все переменные $y_j^{(i)}$ попарно различны и полином $\tilde{f}(x) \cdot \tilde{g}(x)$ от них не зависит. Выберем положительные числа s и t так, чтобы полиномы $h_1 \cdots h_s \tilde{f}(x)$ и $\tilde{g}(x) h_{s+1} \cdots h_t$ были бы равны по модулю $\tilde{T}[M_n]$ обычным полиномам:

$$h_1 \cdots h_s \tilde{f}(x) \equiv f \pmod{\tilde{T}[M_n]}, \quad \tilde{g}(x) h_{s+1} \cdots h_t \equiv g \pmod{\tilde{T}[M_n]}, \quad (1)$$

где $f, g \in F\langle X \rangle$.

Умножим тождество $\tilde{f}(x) \cdot \tilde{g}(x) = 0$ слева на $h_1 \cdots h_s$ и справа на $h_{s+1} \cdots h_t$. Тогда $f \cdot g \in T[M_n]$, откуда или $f = 0$, или $g = 0$ является тождеством M_n . Без ограничения общности будем считать, что $f \in T[M_n]$. Из равенства (1) вытекает, что $h_1 \cdots h_s \tilde{f}(x) \in \tilde{T}[M_n]$. Так как $h_i \notin \tilde{T}[M_n]$ и идеал $\tilde{T}[M_n]$ является вербально-первичным, то $\tilde{f}(x) \in \tilde{T}[M_n]$. Лемма доказана.

Упорядочим множество S_{m+1} , полагая $\sigma > \tau$ тогда и только тогда, когда существует число $s \geq 0$ такое, что $\sigma(i) = \tau(i)$ для $i < s$ и $\sigma(s) > \tau(s)$. Перестановку $\sigma \in S_{m+1}$ будем называть $(n+1)$ -разбиваемой, если последовательность $(\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(m))$ содержит убывающую подпоследовательность длины $n+1$. В противном случае перестановку σ будем называть $(n+1)$ -неразбиваемой.

Рассмотрим теперь пространство $\tilde{P}_{r_1, \dots, r_k}$ полиоднородных полиномов со следом от переменных $x_1, \dots, x_k$ степени $r_i > 0$ по переменной x_i . Пусть $m = r_1 + \dots + r_k$. Для каждого монома со следом $\tilde{u} \in \tilde{P}_{r_1, \dots, r_k}$ определим множество перестановок $L(\tilde{u}) \subset S_{m+1}$ следующим образом: $L(\tilde{u})$ есть множество всех перестановок σ таких, что моном $\tilde{u}$ может быть получен из $\tilde{\lambda}_m^{-1}(\sigma)$ при подстановке

$$y_1 = y_2 = \dots = y_{r_1} = x_1, \quad y_{r_1+1} = \dots = y_{r_1+r_2} = x_2, \quad \dots, \\ y_{r_1+\dots+r_{k-1}+1} = \dots = y_m = x_k.$$

Например, $L(\text{Tr}(x)^m)$ состоит только из тождественной перестановки, а $L(\text{Tr}(x^m))$ состоит из всех циклов вида $(0)(i_1, i_2, \dots, i_m)$. Множество $L(\tilde{u})$ можно определить

другим эквивалентным образом: $L(\tilde{u})$ есть множество всех перестановок $\sigma \in S_{m+1}$ таких, что $\tilde{\lambda}_m^{-1}(\sigma)$ входит в полную линейаризацию монома $\tilde{u}$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ с ненулевым коэффициентом. При этом мы рассматриваем полную линейаризацию, “расклеивающую” переменную x_i в переменные $y_{r_1+\dots+r_{i-1}+1}, \dots, y_{r_1+\dots+r_{i-1}+r_i}$. Важно подчеркнуть, что мономом $\tilde{u}$ рассматривается именно над $\mathbb{Z}$, а не над полем F , так как линейаризации некоторых мономов, например $\text{Tr}(x^p)$ или $\text{Tr}(x)^p$, могут быть тождественно равны нулю над F , но не над $\mathbb{Z}$.

Определим линейный порядок на мономах из $\tilde{P}_{r_1, \dots, r_k}$ следующим образом. Положим $\tilde{u} > \tilde{v}$, если наибольшая перестановка в $L(\tilde{u})$ больше, чем наибольшая перестановка в $L(\tilde{v})$. Тем самым определяется *старший моном* для каждого ненулевого элемента $f \in \tilde{P}_{r_1, \dots, r_k}$.

Моном $\tilde{u}$ будем называть *отмеченным*, если множество $L(\tilde{u})$ содержит $(n+1)$ -разбиваемую перестановку; в противном случае моном $\tilde{u}$ будем называть *неотмеченным*.

Отметим элементарное свойство множества $L(\tilde{u})$: если моном $\tilde{v}$ входит в частичную линейаризацию монома $\tilde{u}$ с ненулевым коэффициентом, то $L(\tilde{v}) \subseteq L(\tilde{u})$. Следовательно, если моном $\tilde{u}$ является неотмеченным и $\tilde{v}$ входит в частичную линейаризацию монома $\tilde{u}$ с ненулевым коэффициентом, то $\tilde{u}$ является неотмеченным мономом.

ЛЕММА 2. *Если $n < p$, то для любого отмеченного монома $\tilde{u}$ существует следствие тождества $\chi_n(x_1, \dots, x_n) = 0$, для которого $\tilde{u}$ является старшим мономом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть моном $\tilde{u}$ имеет степень m и множество $L(\tilde{u})$ содержит $(n+1)$ -разбиваемую перестановку $\sigma \in S_{m+1}$. При доказательстве теоремы 3 [6] было показано, что для любой $(n+1)$ -разбиваемой перестановки $\sigma \in S_{m+1}$ существует полилинейное следствие тождества $\chi_n(x_1, \dots, x_n) = 0$ со старшим мономом $\tilde{\lambda}_m^{-1}(\sigma)$ специального вида. А именно, это следствие имеет вид

$$u_0 \chi_n(u_1, \dots, u_n) u'_0 \text{Tr}(u_{n+1}) \cdots \text{Tr}(u_s) \quad (2)$$

или

$$\text{Tr}(u_0 \chi_n(u_1, \dots, u_n) u'_0 \text{Tr}(u_{n+1}) \cdots \text{Tr}(u_s)), \quad (3)$$

где u_i – обычные мономы, причем в (2) только u_0 и u'_0 могут равняться единице; в (3) только u'_0 может равняться единице.

Легко видеть, что в случае $n < p$ при любом отождествлении переменных в (2) и (3) получается ненулевой полином и что старший моном этого полинома получается при отождествлении переменных в $\tilde{\lambda}_m^{-1}(\sigma)$. Поэтому искомое следствие $\chi_n(x_1, \dots, x_n) = 0$ со старшим мономом $\tilde{u}$ может быть получено из (2) или (3) как результат отождествления некоторых переменных. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Пусть $n < p$ и ненулевой полином $\tilde{f} \in \tilde{P}_{r_1, \dots, r_k}$ есть линейная комбинация неотмеченных мономов. Тогда $\tilde{f}$ не является тождеством M_n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное, т.е. пусть $\tilde{f}$ является тождеством M_n . В работе [6] Кемер показал, что если старший моном полилинейного полинома $\tilde{g}$ равен $\tilde{\lambda}_m^{-1}(\sigma)$ для некоторой $(n+1)$ -неразбиваемой перестановки σ , то $\tilde{g}$ не является тождеством M_n . Отсюда вытекает, что лемма 3 справедлива для всех полилинейных полиномов. Если полином является линейной комбинацией неотмеченных мономов, то любая частичная линейаризация этого полинома или равна нулю, или снова является линейной комбинацией неотмеченных мономов. При этом если некоторая

собственная частичная линейаризация не равна нулю, то из индуктивных соображений по глубине линейаризации утверждение леммы можно считать справедливым. Базой индукции является случай полилинейных полиномов.

Итак, при доказательстве леммы можно считать, что каждая собственная частичная линейаризация тождества $\tilde{f}(x_1, \dots, x_k) = 0$ равна нулю. Отсюда следует, что степень тождества $\tilde{f}(x_1, \dots, x_k) = 0$ по переменной x_1 равна p^s , $s > 0$. В самом деле, иначе у полинома $\tilde{f}$ есть частичная линейаризация, удовлетворяющая следующим свойствам: степень этой линейаризации по любой из переменных равна p^t (число t свое для каждой переменной) и полином $\tilde{f}$ получается из этой линейаризации путем отождествления некоторых переменных. Докажем, что полином $\tilde{f}(x_1, \dots, x_k)$ может быть представлен в алгебре $\tilde{F}\langle X \rangle$ в виде

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_k) = \text{Tr}(x_1)^{p^s} \cdot \tilde{g}(x_2, \dots, x_k), \quad (4)$$

где $\tilde{g}(x_2, \dots, x_k) \in \tilde{F}\langle X \rangle$.

В самом деле, обозначим через $\text{lin}(\tilde{h}(x_1, \dots))$ частичную линейаризацию полинома $\tilde{h}(x_1, \dots)$ по переменной x_1 такую, что $\text{lin}(\tilde{h}(x_1, \dots))$ есть полином степени 1 по переменной y и степени $\deg_{x_1}(\tilde{h}) - 1$ по переменной z . Очевидно, что если $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$ — различные мономы со следом, то $\text{lin}(\tilde{u}_1)$ и $\text{lin}(\tilde{u}_2)$ не могут содержать одни и те же мономы с ненулевыми коэффициентами. Следовательно, так как $\text{lin}(\tilde{f}) = 0$, то $\text{lin}(\tilde{u}_i) = 0$ для любого монома $\tilde{u}_i$, входящего в $\tilde{f}$ с ненулевым коэффициентом. Осталось показать, что если $\text{lin}(\tilde{u}) = 0$ для некоторого неотмеченного монома $\tilde{u}$, то $\tilde{u}$ может быть представлен в форме $\tilde{u} = \text{Tr}(x_1)^{p^s} \cdot \tilde{u}_1$.

Рассмотрим моном $\tilde{u} = u_0 \text{Tr}(u_1)^{\alpha_1} \dots \text{Tr}(u_s)^{\alpha_s} \prod \text{Tr}(u'_j)$, где $u_0, u_1, \dots, u_s, u'_j$ — обычные мономы и $u_1, \dots, u_s$ попарно различны с точностью до циклического сдвига. Будем считать, что $u_1, \dots, u_s$ зависят от переменной x_1 , u'_j не зависят от переменной x_1 , u_0 может как зависеть, так и не зависеть от x_1 . Очевидно, что $\text{lin}(\tilde{u}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\text{lin}(u_0 \text{Tr}(u_1)^{\alpha_1} \dots \text{Tr}(u_s)^{\alpha_s}) = 0$. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $\prod \text{Tr}(u_j) = 1$. Имеет место равенство

$$\begin{aligned} \text{lin}(\tilde{u}) &= \text{lin}(u_0) \text{Tr}(u_1)^{\alpha_1} \dots \text{Tr}(u_s)^{\alpha_s} \\ &+ \sum_{i=1}^s \alpha_i u_0 \text{Tr}(u_1)^{\alpha_1} \dots \text{Tr}(u_i)^{\alpha_i-1} \text{Tr}(\text{lin}(u_i)) \dots \text{Tr}(u_s)^{\alpha_s}. \end{aligned}$$

Если моном u_0 зависит от x_1 , то $\text{lin}(\tilde{u}) \neq 0$. Следовательно, можно считать, что $u_0 = 1$. Тем самым, $\text{lin}(\tilde{u}) = 0$ тогда и только тогда, когда для каждого $i = 1, 2, \dots, s$ или α_i делится на p , или $\text{Tr}(\text{lin}(u_i)) = 0$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Допустим, что для фиксированного i α_i делится на p и длина слова u_i больше 1. Докажем, что тогда моном $\tilde{u}$ является отмеченным.

Так как переменные внутри следов можно переставлять по циклу, то можно считать, что $u_i = vx$. Обозначим для краткости $\alpha = \alpha_i$. Запишем моном $\tilde{u}$ в виде

$$\tilde{u} = (\text{Tr}(vx) \text{Tr}(vx) \dots \text{Tr}(vx)) \cdot \tilde{u}'.$$

Рассмотрим такую частичную линейаризацию монома $\tilde{u}$ над $\mathbb{Z}$, которая содержит с ненулевым коэффициентом моном

$$\tilde{w} = (\text{Tr}(v_1x) \text{Tr}(v_2x) \dots \text{Tr}(v_\alpha x)) \cdot \tilde{w}',$$

где $v_1 \cdot v_2 \cdots v_\alpha \cdot \tilde{w}'$ – полилинейный моном, не зависящий от x_1 . Ясно, что такая частичная линейаризация существует. Так как длина слова u_i больше 1, то каждое v_j можно представить в виде $v_j = v'_j y_j$, v'_j может быть пустым словом. Поэтому полная линейаризация $\tilde{w}$ над $\mathbb{Z}$ содержит с ненулевыми коэффициентами все полилинейные мономы

$$w_\sigma = (\text{Tr}(v'_1 y_1 z_{\sigma(1)}) \text{Tr}(v'_2 y_2 z_{\sigma(2)}) \cdots \text{Tr}(v'_\alpha y_\alpha z_{\sigma(\alpha)})) \cdot \tilde{w}',$$

где $\sigma \in S_\alpha$. Если $y_{\tau(1)} < y_{\tau(2)} < \cdots < y_{\tau(\alpha)}$, то перестановка $\tilde{\lambda}_m(w_\sigma)$ может быть представлена в виде

$$\begin{pmatrix} \cdots & y_{\tau(1)} & \cdots & y_{\tau(2)} & \cdots & y_{\tau(\alpha)} & \cdots \\ \cdots & z_{\sigma(\tau(1))} & \cdots & z_{\sigma(\tau(2))} & \cdots & z_{\sigma(\tau(\alpha))} & \cdots \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для перестановки σ , определяемой условием $\sigma(\tau(i)) = \alpha + 1 - i$, перестановка $\tilde{\lambda}_m(w_\sigma)$ является α -разбиваемой, следовательно, и n -разбиваемой. Осталось заметить, что все мономы w_σ содержатся в полной линейаризации $\tilde{w}$ над $\mathbb{Z}$ с ненулевыми коэффициентами.

Случай 2. Допустим, что $\text{Tr}(\text{lin}(u_i)) = 0$. Несложно видеть, что в этом случае моном u_i имеет вид $u_i = v^{pt}$ для некоторого $t > 0$. Докажем, что моном $\tilde{u}$ является отмеченным. Если $v = x$, то это очевидно. Пусть теперь $v = wx$ для некоторого непустого слова w . Рассмотрим такую частичную линейаризацию монома $\tilde{u}$ над $\mathbb{Z}$, которая содержит с ненулевым коэффициентом моном

$$\tilde{w} = \text{Tr}(w_1 x w_2 x \cdots w_{pt} x) \cdot \tilde{w}',$$

где $w_1 \cdot w_2 \cdots w_{pt} \cdot \tilde{w}'$ – полилинейный моном, не зависящий от x_1 . Существование такой линейаризации очевидно. Полная линейаризация $\tilde{w}$ над $\mathbb{Z}$ содержит все мономы вида

$$w_\sigma = \text{Tr}(w_1 z_{\sigma(1)} w_2 z_{\sigma(2)} \cdots w_{pt} z_{\sigma(pt)}) \cdot \tilde{w}',$$

где $\sigma \in S_{pt}$. Аналогично предыдущему случаю, для некоторой перестановки σ перестановка $\tilde{\lambda}_m(w_\sigma)$ является pt -разбиваемой, следовательно, является n -разбиваемой.

Из рассмотренных двух случаев вытекает, что если $\text{lin}(\tilde{u}) = 0$ и моном $\tilde{u}$ является неотмеченным, то $\tilde{u}$ может быть записан в виде $\tilde{u} = \text{Tr}(x_1)^{p^s} \cdot \tilde{u}_1$, что доказывает (4).

Итак, полином $\tilde{f}$ может быть представлен в виде (4). По лемме 1 ненулевой полином $\tilde{g}(x_2, \dots, x_k)$ является тождеством M_n . Ясно, что $\tilde{g}(x_1, \dots, x_{k-1})$ является линейной комбинацией неотмеченных мономов. В силу индукционных соображений по степени полинома $\tilde{f}$ это невозможно. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть полиоднородный полином $\tilde{f}(x_1, \dots, x_k)$ является тождеством M_n . По лемме 2 полином $\tilde{f}$ по модулю $\tilde{T}$ -идеала $\{\text{Tr}(1) = n, \chi_n(x_1, \dots, x_n) = 0\}^{\tilde{T}}$ можно представить как линейную комбинацию неотмеченных мономов. По лемме 3 эта линейная комбинация должна быть нулевой. Теорема доказана.

3. Доказательство основной теоремы. Зафиксируем число $n < p$. Несложно проверить, что алгебра M_n удовлетворяет тождеству

$$\sum_{i=1}^{n^2} \text{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, y_1, \dots, y_{n^2+1})|_{x_i = ax_i} = n \text{Tr}(a) \text{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, y_1, \dots, y_{n^2+1}), \quad (5)$$

где $\text{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, y_1, \dots, y_{n^2+1})$ – полилинейный полином Капелли, кососимметричный по переменным $x_1, \dots, x_{n^2}$. Следующая лемма является основным техническим утверждением работы.

ЛЕММА 4. *Для $n < p$ существует конечно порожденный T -идеал $\Gamma_n \subseteq T[M_n]$, удовлетворяющий свойству: если $f(z_1, \dots, z_k)$ является тождеством M_n , то*

$$f(z_1, \dots, z_k) \cdot \text{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, y_1, \dots, y_{n^2+1}) \in \Gamma_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g = g(x_1, \dots, x_{n^2}, \dots)$ – произвольный полином, полилинейный и кососимметричный по переменным $x_1, \dots, x_{n^2}$, зависящий, быть может, от других переменных. Если полином g не зависит от переменной z , то положим

$$\sigma_z g(x_1, \dots, x_{n^2}, \dots) = \sum_{i=1}^{n^2} g(x_1, \dots, x_{n^2}, y_1, \dots, y_{n^2+1})|_{x_i=z x_i}.$$

Заметим, что $\sigma_z g(x_1, \dots, x_{n^2}, \dots)$ снова представляет собой полином, полилинейный и кососимметричный по переменным $x_1, \dots, x_{n^2}$, поэтому та же самая конструкция применима к $\sigma_z g(x_1, \dots, x_{n^2}, \dots)$, и можно определить полином $\sigma_{z_1} \cdots \sigma_{z_s} g(x_1, \dots, x_{n^2}, \dots)$. Для произвольных непустых мономов $u_1, \dots, u_s$ положим

$$\sigma_{u_1} \cdots \sigma_{u_s} g(x_1, \dots, x_{n^2}, \dots) = (\sigma_{z_1} \cdots \sigma_{z_s} g(x_1, \dots, x_{n^2}, \dots))_{z_1 \rightarrow u_1, \dots, z_s \rightarrow u_s},$$

где полином g не зависит от $z_1, \dots, z_s$.

Алгебра M_n удовлетворяет двум тривиальным тождествам $\text{Tr}(z) \text{Tr}(w) = \text{Tr}(w) \times \text{Tr}(z)$ и $\text{Tr}(zw) = \text{Tr}(wz)$. Из этих тождеств и (5) вытекает, что M_n удовлетворяет следующему обычному тождеству:

$$\begin{aligned} \sigma_z \sigma_w \text{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, \dots) &= \sigma_w \sigma_z \text{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, \dots), \\ \sigma_{zw} \text{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, \dots) &= \sigma_{wz} \text{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, \dots). \end{aligned}$$

Включим эти два тождества в T -идеал Γ_n .

Пусть теперь $f(z_1, \dots, z_k)$ является тождеством M_n . По теореме 2 тождество со следом $f = 0$ является следствием тождества Кэли–Гамильтона $\chi_n(x_1, \dots, x_n) = 0$ и тождества $\text{Tr}(1) = n$. Из этого вытекает, что в свободной алгебре со следом $\tilde{F}\langle X \rangle$ полином f может быть представлен в виде линейной комбинации полиномов со следом вида

$$u_0 \chi_n(u_1, \dots, u_n) u'_0 \text{Tr}(u_{n+1}) \cdots \text{Tr}(u_s) \quad (6)$$

или

$$\text{Tr}(u_0 \chi_n(u_1, \dots, u_n)) u'_0 \text{Tr}(u_{n+1}) \cdots \text{Tr}(u_s), \quad (7)$$

где u_i – обычные мономы, причем в (6) только u_0 и u'_0 могут равняться единице; в (7) только u'_0 может равняться единице. Для доказательства достаточно воспользоваться хорошо известным фактом, что полиномы $\text{Tr}(\chi_n(x_1, \dots, x_n))$ и $\chi_n(\cdot)|_{x_i=1}$ равны нулю по модулю тождества $\text{Tr}(1) = n$.

Полином $\text{Tr}(z_0 \chi_n(z_1, \dots, z_n))$ однозначно представляется в виде линейной комбинации мономов со следом вида $\text{Tr}(m_1) \cdots \text{Tr}(m_s)$, где все слова $m_1, \dots, m_s$ не равны пустому слову. Через $t_n(z_0, z_1, \dots, z_n)$ обозначим полином $\text{Tr}(z_0 \chi_n(z_1, \dots, z_n))$, записанный в таком виде.

Тогда полином $f(z_1, \dots, z_k) \cdot \text{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, y_1, \dots, y_{n^2+1})$ является (в свободной алгебре со следом) линейной комбинацией полиномов двух типов:

$$u_0 \chi_n(u_1, \dots, u_n) u'_0 \text{Tr}(u_{n+1}) \cdots \text{Tr}(u_s) \text{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, y_1, \dots, y_{n^2+1}) \quad (8)$$

и

$$t_n(u_0, u_1, \dots, u_n) u'_0 \text{Tr}(u_{n+1}) \cdots \text{Tr}(u_s) \text{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, y_1, \dots, y_{n^2+1}). \quad (9)$$

Пусть

$$f(z_1, \dots, z_k) \cdot \text{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, y_1, \dots, y_{n^2+1}) = \sum_i \tilde{f}_i + \sum_j \tilde{g}_j, \quad (10)$$

где $\tilde{f}_i$ и $\tilde{g}_j$ – полиномы вида (8) и (9).

Заменяем в каждом из $\tilde{f}_i$ и $\tilde{g}_j$ все выражения, имеющие вид

$$\text{Tr}(v_1) \cdots \text{Tr}(v_t) \text{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, y_1, \dots, y_{n^2+1}),$$

на обычные полиномы

$$\frac{1}{n^t} \sigma_{v_1} \cdots \sigma_{v_t} \text{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, y_1, \dots, y_{n^2+1}).$$

Поскольку f не зависит от переменных $x_1, \dots, x_{n^2}, y_1, \dots, y_{n^2+1}$, то эти полиномы в правых частях (8) и (9) определены корректно. Важно отметить, что если рассматриваемые замены определяются по модулю T -идеала Γ_n , то равенство (10) превращается в некоторое равенство в алгебре $F\langle X \rangle / \Gamma_n$. Именно с этой целью в Γ_n были включены два тождества, являющиеся аналогом тривиальных тождеств $\text{Tr}(uv) = \text{Tr}(vu)$ и $\text{Tr}(u) \text{Tr}(v) = \text{Tr}(v) \text{Tr}(u)$.

Рассмотрим три полинома со следом

$$\begin{aligned} \chi_n(z_1, \dots, z_n) z_{n+1} \cdot \text{Cap}_{n^2}(\cdots), \quad \chi_n(z_1, \dots, z_n) \cdot \text{Cap}_{n^2}(\cdots), \\ t_n(z_0, z_1, \dots, z_n) \cdot \text{Cap}_{n^2}(\cdots). \end{aligned}$$

Произведя в этих полиномах аналогичную замену следов, мы получим три обычных тождества M_n . Включим эти тождества в T -идеал Γ_n . Тогда из (8), (9) и (10) вытекает, что в алгебре $F\langle X \rangle / \Gamma_n$ полином в левой части (10) равен нулю. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ. Так как сложность T -идеала

$$C_n = \{\text{Cap}_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, y_1, \dots, y_{n^2+1})\}^T$$

равна $n-1$, то в силу индуктивных соображений по сложности многообразия (базис индукции $n=1$ вытекает из теоремы 1) можно считать, что $\text{Rad}(F\langle X \rangle / C_n)$ является нильидеалом ограниченного индекса s . Это означает, что для любого полинома $f \in T[M_{n-1}]$ выполнено $f^s \in C_n$. В частности, если $f(z_1, \dots, z_k) \in T[M_n]$, то полином f^s содержится C_n . Тогда из включения $f(z_1, \dots, z_k) \cdot C_n \subset \Gamma_n$ следует, что $f^{s+1} \in \Gamma_n$.

Рассмотрим теперь произвольную относительно свободную алгебру $B = F\langle X \rangle / U$, где T -идеал имеет сложность $n < p$. Радикал этой алгебры совпадает с $T[M_n] / U$. По построению идеал Γ_n является конечно порожденным T -идеалом, поэтому по теореме 1 идеал $\Gamma_n + U/U$ является нильидеалом ограниченного индекса m , m зависит от U . Следовательно, для каждого $f \in T[M_n]$ полином $f^{m(s+1)}$ содержится в U ; другими словами, радикал алгебры B является нильидеалом индекса $m(s+1)$. Основная теорема доказана.

Автор выражает благодарность А. Р. Кемеру за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. R. Kemer, “PI-algebras and nil algebras of bounded index”, *Trends in ring theory* (Miskolc, 1996), CMS Conf. Proc., **22**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 59–69.
- [2] P. Koshlukov, “Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic $p \neq 2$ ”, *J. Algebra*, **241**:1 (2001), 410–434.
- [3] A. R. Kemer, *Ideal of Identities of Associative Algebras*, Translations of Mathematical Monographs, **87**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [4] I. Yu. Sviridova, “Varieties and algebraic algebras of bounded degree”, *J. Pure Appl. Algebra*, **133**:1–2 (1998), 233–240.
- [5] Ю. П. Размыслов, “Тождества со следом полной матричной алгебры над полем характеристики нуль”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:4 (1974), 723–756.
- [6] A. R. Kemer, “Multilinear identities of the algebras over a field of characteristic p ”, *Internat. J. Algebra Comput.*, **5**:2 (1995), 189–197.
- [7] C. Procesi, *Rings with Polynomial Identities*, Pure and Applied Mathematics, **17**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

Л. М. Самойлов

Ульяновский государственный университет

E-mail: samoilov_l@rambler.ru

Поступило

04.09.2006

Исправленный вариант

25.01.2007