Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Прибегин, Об одном методе суммирования интегралов Фурье для функций из $H^p(E_{2n}^+)$, $0 < p < \infty$, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 5, 718–728

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3829>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 14:45:51

Об одном методе суммирования интегралов

Фурье для функций из $H^p(E_{2n}^+)$, $0 < p < \infty$

С. Г. Прибегин

Пусть $H^p(E_{2n}^+)$ – пространство Харди в первом октанте

$$E_{2n}^+ = \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Im} z_j > 0, j = 1, \dots, n\},$$

а $P_\varepsilon^l(f, x)$, $l > 0$, – обобщенные средние Абеля–Пуассона функции $f \in H^p(E_{2n}^+)$.

В работе доказано, что

$$C_1(l, p) \tilde{\omega}_l(\varepsilon, f)_p \leq \|f(x) - P_\varepsilon^l(f, x)\|_p \leq C_2(l, p) \omega_l(\varepsilon, f)_p,$$

где $\tilde{\omega}_l(\varepsilon, f)_p$ и $\omega_l(\varepsilon, f)_p$ – интегральные модули непрерывности l -го порядка. При $n = 1$ и натуральном l этот результат получен Соляником.

Библиография: 7 названий.

1. Основные результаты. В работе доказываются неравенства между нормами уклонений некоторых средних для суммирования интегралов Фурье и модулей гладкости для функций из классов Харди $H^p(E_{2n}^+)$. Эти средние определяются в терминах дробных разностей растяжений быстро убывающей функции класса $C^\infty[0, \infty)$. В некоторых частных случаях они являются обобщениями средних Абеля–Пуассона. В одномерном случае подобные оценки были доказаны Соляником [1].

Для формулировки основных результатов статьи приведем необходимые понятия. Пусть

$$E_{2n}^+ = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n : y_j > 0, j = 1, \dots, n\}.$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Говорят (см., например, [3; гл. 3, § 1, (1.5)]), что голоморфная в E_{2n}^+ функция $f(z)$ принадлежит классу Харди $H^p(E_{2n}^+)$, $0 < p < \infty$, если

$$\sup_{\substack{y_j > 0 \\ j=1, \dots, n}} \|f_y(x)\|_p = \|f\|_p < \infty,$$

где $f_y(x) = f(x + iy)$ и

$$\|f_y(x)\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f_y(x)|^p dx.$$

Функция $f \in H^p(E_{2n}^+)$ имеет почти всюду на границе E_{2n}^+ предельные (граничные) значения

$$f(x) = \lim_{\substack{y_j \rightarrow +0 \\ j=1, \dots, n}} f_y(x),$$

причем $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и $\|f_y(x)\|_p \leq \|f(x)\|_p = \|f\|_p$ (см., например, [1; гл. 3, § 5, теорема 5.1]).

Определим теперь разности порядка l для граничной функции $f(x)$ функции $f(z) \in H^p(E_{2n}^+)$ равенством

$$\Delta_h^l f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{l}{k} (-1)^k f(x + kh) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{l}{k} (-1)^k f(x_1 + kh_1, \dots, x_n + kh_n). \quad (1.1)$$

Здесь

$$\binom{l}{k} = \frac{\Gamma(l+1)}{k! \Gamma(l-k+1)}$$

– биномиальные коэффициенты.

При $l \in (0, \infty) \setminus \mathbb{N}$ и $l > (1/p - 1)_+ = \max(1/p - 1, 0)$ это выражение корректно определено для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $\Delta_h^l f(x) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ при фиксированном $h \in \mathbb{R}^n$.

Отметим, что при $l \in \mathbb{N}$ в (1.1) число слагаемых конечно и, следовательно, при $0 < p < 1$ и $l \in \mathbb{N}$ необходимость в условии $l > 1/p - 1$ отпадает.

В случае, когда $h_1 = \dots = h_n = h$, $h \in \mathbb{R}$, дробную разность (1.1) будем обозначать $\tilde{\Delta}_h^l f(x)$, т.е.

$$\tilde{\Delta}_h^l f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{l}{k} (-1)^k f(x_1 + kh, \dots, x_n + kh) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{l}{k} (-1)^k f(x + k\tilde{h}) = \Delta_{\tilde{h}}^l f(x), \quad (1.2)$$

где $\tilde{h} = (h, \dots, h) \in \mathbb{R}^n$.

Пусть

$$((l \in \mathbb{N}) \wedge (p \in (0, \infty))) \vee ((l \in (0, \infty) \setminus \mathbb{N}) \wedge (p \in (0, \infty)) \wedge (l > 1/p - 1)_+)). \quad (1.3)$$

Тогда *модулем гладкости* порядка l функции $f \in H^p(E_{2n}^+)$ назовем

$$\begin{aligned} \omega_l(\delta, f)_p &= \sup_{\substack{|h_j| \leq \delta \\ j=1, \dots, n}} \|\Delta_h^l f(x)\|_p, \\ \tilde{\omega}_l(\delta, f)_p &= \sup_{|h| \leq \delta} \|\tilde{\Delta}_h^l f(x)\|_p. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Известно (см., например, [2; гл. 3, § 2, теорема 2.3]), что если $f \in H^2(E_{2n}^+)$, то для функции f имеет место представление интегралом Фурье

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \hat{f}(t) e^{i\langle z, t \rangle} dt, \quad (1.5)$$

где

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f_v(u) e^{-i\langle u + iv, t \rangle} du, \quad (1.6)$$

а $\mathbb{R}_+^n = [0, \infty)^n$, $u + iv \in E_{2n}^+$, $z \in E_{2n}^+$, $\langle z, t \rangle = \sum_{j=1}^n z_j t_j$. Представление (1.5) будет иметь место и для $f \in H^p(E_{2n}^+)$, $0 < p < \infty$.

Через E обозначим класс экспоненциально убывающих функций из $C^\infty[0, \infty)$, все производные которых также экспоненциально убывают, т.е. функция $\varphi(t) \in E$, если для любого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ найдутся константы $L_k > 0$ и $a_k > 0$ такие, что

$$|\varphi^{(k)}(t)| < L_k e^{-a_k t}, \quad t \in [0, \infty).$$

По аналогии с [1] определим средние

$$M_{\varepsilon, \varphi}(f, x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(\varepsilon|t|) \widehat{f}(t) e^{i\langle x, t \rangle} dt, \quad (1.7)$$

где $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $|t| = t_1 + \dots + t_n$. Если $\varphi(0) = 1$, то (1.7) называется φ -средним интеграла Фурье, а $\varphi(t)$ – сумматорной функцией. Если $\varphi \in E$ – сумматорная функция и $l > 0$, то

$$\varphi_l(t) = 1 - \Delta_t^l \varphi(0) = \sum_{m=1}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^{m+1} \varphi(mt)$$

– также сумматорная функция и

$$M_{\varepsilon, \varphi_l}(f, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^{m+1} \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(m\varepsilon|t|) \widehat{f}(t) e^{i\langle x, t \rangle} dt. \quad (1.8)$$

В данной статье для средних (1.8) доказывается следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in H^p(E_{2n}^+)$, а $\varphi(t) \in E$, и $\varphi(0) = 1$, p и l удовлетворяют (1.3). Тогда

$$\|f(x) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f, x)\|_p \leq C(l, p) \omega_l(\varepsilon, f)_p, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Основываясь на других идейных соображениях, эта теорема была доказана в [1; § 2, предложение 2] для $f \in H^p(E_2^+)$, $0 < p \leq 1$ и $l \in \mathbb{N}$. Отметим также, что в [3; § 3, теорема 1] доказан аналог теоремы 1 для $f \in H^p$, $0 < p \leq 1$ в круге.

В частном случае, когда $\varphi(t) = e^{-t}$, имеем $\varphi_l(t) = 1 - (1 - e^{-t})^l$ и

$$M_{\varepsilon, \varphi_l}(f, x) = P_\varepsilon^l(f, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^{m+1} f_{m\varepsilon}(x), \quad (1.9)$$

где $\widetilde{\varepsilon} = (\varepsilon, \dots, \varepsilon)$.

Средние (1.9) назовем *обобщенными средними Абеля–Пуассона*. Обобщенные средние Абеля–Пуассона для функций из H^p в единичном круге были введены Стороженко в [4] и [5]. Там же была получена оценка сверху скорости приближения граничной функции $f(e^{i\theta})$ обобщенными средними Абеля–Пуассона через модуль гладкости l -го порядка при $l \in \mathbb{N}$. Оценка снизу доказана в [5; § 5, теорема 6] при $l = 1$. Для $f \in H^p(E_2^+)$ при $l \in \mathbb{N}$ обобщенные средние Абеля–Пуассона были введены Соляником в [1]. Там же была получена двусторонняя оценка скорости приближения граничной функции $f(x)$ средними (1.9) через модуль гладкости l -го порядка при натуральном l и $0 < p \leq 1$. В данной статье результат Соляника обобщается на случай произвольного показателя $l > 0$ для нескольких переменных, а именно, доказана следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in H^p(E_{2n}^+)$, l и p удовлетворяют (1.3). Тогда

$$\|f(x) - P_\varepsilon^l(f, x)\|_p \leq C(l, p) \omega_l(\varepsilon, f)_p, \quad (1.10)$$

$$\tilde{\omega}_l(\varepsilon, f)_p \leq C(l, p) \|f(x) - P_\varepsilon^l(f, x)\|_p. \quad (1.11)$$

Аналогичные вопросы для $f \in H^p$, $0 < p \leq 1$, в единичном круге рассмотрены в [3].

2. Вспомогательные утверждения. В этом разделе мы приведем некоторые вспомогательные факты, необходимые для доказательства теоремы 1.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in H^p(E_{2n}^+)$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}$, l и p удовлетворяют (1.3). Тогда

$$\|\Delta_{\lambda h}^l f(x)\|_p^p \leq M(l, p) \left(\prod_{j=1}^n (|\lambda_j| + 1) \right)^{N(l, p)} \omega_l^p(|h|, f)_p, \quad (2.1)$$

где

$$M(l, p) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{l}{k} \right|^p, & 0 < p < 1, \\ 2^{([l]+1)p}, & p \geq 1, \end{cases} \quad N(l, p) = \begin{cases} [\log_2 M(l, p)] + 1, & 0 < p < 1, \\ ([l] + 1)p, & p \geq 1, \end{cases}$$

($[\cdot]$ – целая часть числа).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на формуле (9) из [3]. Она справедлива и для функций многих переменных в следующей форме:

$$\Delta_h^l f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{(1/2)h}^l f\left(x + \frac{1}{2} kh\right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad h \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2)$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $k = \max_{j=1, \dots, n} (|\lambda_j| + 1)$. Выберем $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы $2^{m-1} < k \leq 2^m$. Применяя (2.2) к разности $\Delta_{\lambda h}^l f(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, а затем рекуррентно к разностям во внутренней сумме $m - 1$ раз, получим

$$\Delta_{\lambda h}^l f(x) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \binom{l}{k_1} \sum_{k_2=0}^{\infty} \binom{l}{k_2} \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} \binom{l}{k_m} \Delta_{(1/2^m)\lambda h}^l f(x + k(k_1, \dots, k_m)\lambda h),$$

где

$$k(k_1, \dots, k_m) = \frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2^2} k_2 + \cdots + \frac{1}{2^m} k_m.$$

Отсюда, учитывая инвариантность $\|\cdot\|_p$ относительно сдвига и неравенство треугольника, имеем

$$\|\Delta_{\lambda h}^l f(x)\|_p^p \leq M(l, p)^m \|\Delta_{(1/2^m)\lambda h}^l f(x)\|_p^p, \quad 0 < p < 1, \quad (2.3)$$

$$\|\Delta_{\lambda h}^l f(x)\|_p \leq 2^{([l]+1)m} \|\Delta_{(1/2^m)\lambda h}^l f(x)\|_p, \quad p \geq 1. \quad (2.4)$$

Так как $(1/2^m)|\lambda_j h| \leq |h|$, $j = 1, \dots, n$, и

$$M(l, p)^m \leq M(l, p) \cdot 2^{(m-1)N(l, p)} \leq M(l, p) k^{N(l, p)} \leq M(l, p) \left(\prod_{j=1}^n (|\lambda_j| + 1) \right)^{N(l, p)},$$

$$2^{([l]+1)m} \leq 2^{[l]+1} 2^{(m-1)([l]+1)} \leq 2^{[l]+1} k^{[l]+1} \leq 2^{[l]+1} \left(\prod_{j=1}^n (|\lambda_j| + 1) \right)^{[l]+1},$$

из (2.3) и (2.4) следует (2.1). Таким образом, лемма 1 доказана.

Согласно теореме [6; гл. 6, п. 2], если $F \in H^p(E_2^+)$, $1 \leq p < \infty$ и $\text{Im } z > 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t)}{t - \bar{z}} dt = 0.$$

Поскольку $L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ при $0 < p \leq 1$, то для функции $f \in H^p(E_{2n}^+)$, $0 < p < \infty$, функция

$$F(x_j) = \frac{f(x + iy)}{(x_j + iy_j)^{k-1}},$$

$j = 1, \dots, n$, $k \in \mathbb{N}$, $x + iy \in E_{2n}^+$, является граничной функцией функции класса $H^q(E_2^+)$, $q = \max(1, p)$. На основании вышесказанного имеет место

ЛЕММА 2. Пусть $f \in H^p(E_{2n}^+)$, $0 < p < \infty$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x_j)}{x_j + iy_j} dx_j = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x + iy)}{(x_j + iy_j)^k} dx_j = 0,$$

$j = 1, \dots, n$, $k \in \mathbb{N}$, $x + iy \in E_{2n}^+$.

ЛЕММА 3. Пусть $f(z) \in H^p(E_{2n}^+)$, $\varphi \in E$, $\varphi(0) = 1$, $l > 0$. Тогда имеет место следующее интегральное представление:

$$f(x) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f, x) = \frac{\varepsilon^{nk} (-i)^{nk}}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(u + i\tilde{y}, x)}{\prod_{j=1}^n (u_j + iy_j)^k} \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi^{(nk)}(\varepsilon|t|) e^{-i\langle u + i\tilde{y}, t \rangle} dt du, \quad (2.5)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^n$, $y > 0$, $\tilde{y} = (y, \dots, y) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\Phi(u + i\tilde{y}, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^m f_{m\tilde{y}}(mu + x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как (см. (1.6))

$$\begin{aligned} \widehat{f}(t) e^{i\langle x, t \rangle} &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f_{m\tilde{y}}(u) e^{-i\langle u - x + im\tilde{y}, t \rangle} du \\ &= \frac{m^n}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f_{m\tilde{y}}(mw + x) e^{-im\langle w + i\tilde{y}, t \rangle} dw, \end{aligned}$$

$m \in \mathbb{N}$, $y > 0$, $\tilde{y} = (y, \dots, y)$, то

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(m\varepsilon|\tau|) \widehat{f}(\tau) e^{i\langle x, \tau \rangle} d\tau = \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(\varepsilon|t|) \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f_{m\tilde{y}}(mu + x) e^{-i\langle u + i\tilde{y}, t \rangle} du dt.$$

Отсюда (см. (1.8))

$$f(x) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(u + i\tilde{y}, x) \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(\varepsilon|t|) e^{-i\langle u + i\tilde{y}, t \rangle} dt du. \quad (2.6)$$

Далее, интегрированием по частям k раз получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \varphi^{((j-1)k)}(\varepsilon|t|)e^{-(u_j+iy)t_j} dt_j \\ &= \sum_{\beta=1}^k \frac{(-1)^\beta \varepsilon^{\beta-1}}{(u_j+iy)^\beta} + \frac{\varepsilon^k (-i)^k}{(u_j+iy)^k} \int_0^\infty \varphi^{(jk)}(\varepsilon|t|)e^{-i(u_j+iy)t_j} dt_j, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$j = 1, \dots, n$.

На основании леммы 2 имеем

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\Phi(u+i\tilde{y}, x)}{(u_j+iy)^\beta} du_j = 0. \quad (2.8)$$

Подставляя последовательно (2.7) в (2.6) и учитывая (2.8), получим (2.5).

При возведении интегралов в степень $p > 1$, мы будем использовать неравенство Гёльдера в следующей форме: если $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$ и $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, то

$$\|f(u)g(u)\|_1^p \leq \|g(u)\|_1^{p-1} \|f(u)|g(u)|\|_1, \quad (2.9)$$

$u \in \mathbb{R}^n$.

В случае $0 < p \leq 1$ роль неравенства Гёльдера будет выполнять следующая

ЛЕММА 4. Пусть $f(z) \in H^p(E_{2n}^+)$, $0 < p \leq 1$. Тогда для любого $y > 0$

$$\|f_{\tilde{y}}(x)\|_1^p \leq \left(\frac{1}{n!} \left(\frac{\pi}{2} y \right)^n \right)^{p-1} \|f(x)\|_p^p,$$

$\tilde{y} = (y, \dots, y)$.

При $n = 1$ эта лемма приводится в [1; § 2, лемма 1]. Используя с соответствующими изменениями рассуждения из [1; § 1; лемма 2], можно доказать лемму 4 для $n \geq 2$.

При доказательстве теоремы 1 мы будем использовать следующее равенство: если $\beta \geq 0$, $\gamma > 0$ и $\gamma - \beta > 1$, то

$$\int_0^\infty \frac{u^\beta du}{|u+iy|^\gamma} = C(\beta, \gamma) y^{1+\beta-\gamma}, \quad (2.10)$$

которое получается заменой $u = yt$.

3. Доказательства теорем 1 и 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Так как $\varphi \in E$, то при

$$\tilde{y} = \frac{1}{2} a_{nk} \tilde{\varepsilon} = \left(\frac{1}{2} a_{nk} \varepsilon, \dots, \frac{1}{2} a_{nk} \varepsilon \right)$$

имеем

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^n |u_j + i(1/2)a_{nk}\varepsilon|^k} \int_{\mathbb{R}_+^n} |\varphi^{(nk)}(\varepsilon|t|)e^{-i\langle u+i\tilde{y}, t \rangle}| dt \leq \frac{2^{kn}}{\prod_{j=1}^n |u_j + i a_{nk}\varepsilon|^k} \left(\frac{2L_{nk}}{a_{nk}\varepsilon} \right)^n. \quad (3.1)$$

Из (2.5) с учетом (3.1) следует, что

$$|f(x) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f, x)| \leq C(l, p) \varepsilon^{nk-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Phi(u + i\tilde{y}, x)|}{\prod_{j=1}^n |u_j + ia_{nk}\varepsilon|^k} du. \quad (3.2)$$

Далее, будем рассматривать два случая

- а) $0 < p \leq 1$;
- б) $1 < p < \infty$.

а) Чтобы обеспечить применение равенства (2.10), считаем, что

$$k = \left(\left[\frac{1}{p} \right] + 1 \right) (N(l, p) + 1).$$

Возведем обе части неравенства (3.2) в степень p , воспользовавшись при этом леммой 4. В результате получим

$$|f(x) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f, x)|^p \leq C(l, p) \varepsilon^{nkp-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Delta_u^l f(x)|^p}{\prod_{j=1}^n |u_j + i(1/2)a_{nk}\varepsilon|^{kp}} du.$$

Проинтегрируем обе части полученного неравенства по x . Далее применим лемму 1 и равенство (2.10). В результате получим

$$\begin{aligned} \|f(x) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f, x)\|_p^p &\leq C(l, p) \varepsilon^{nkp-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|\Delta_u^l f(x)\|_p^p}{\prod_{j=1}^n |u_j + i(1/2)a_{nk}\varepsilon|^{kp}} du \\ &\leq C(l, p) \varepsilon^{nkp-n} \omega_l^p(\varepsilon, f)_p \\ &\quad \times \left(\int_0^\infty \left(\frac{u}{\varepsilon} + 1 \right)^{N(l, p)} \frac{du}{|u + i(1/2)a_{nk}\varepsilon|^{kp}} \right)^n \\ &= C(l, p) \varepsilon^{nkp-n} \omega_l^p(\varepsilon, f)_p \\ &\quad \times \left(\sum_{\beta=0}^{N(l, p)} \binom{N(l, p)}{\beta} \varepsilon^{-\beta} \int_0^\infty \frac{u^\beta du}{|u + i(1/2)a_{nk}\varepsilon|^{kp}} \right) \\ &\leq C(l, p) \omega_l^p(\varepsilon, f)_p. \end{aligned}$$

б) Введем обозначение

$$m = ([l] + 1)([p] + 1).$$

Чтобы обеспечить применение равенства (2.10), будем считать, что $k = m + 2$.

При возведении обеих частей неравенства (3.2) в степень p следует воспользоваться неравенством типа Гёльдера (2.9) и затем равенством (2.10). Тогда

$$\begin{aligned} |f(x) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f, x)|^p &\leq C(l, p) \varepsilon^{nkp-np} \left(\int_0^\infty \frac{du}{|u + ia_{nk}\varepsilon|^k} du \right)^{n(p-1)} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Phi(u + i\tilde{y}, x)|^p}{\prod_{j=1}^n |u_j + ia_{nk}\varepsilon|^k} du \\ &\leq C(l, p) \varepsilon^{nk-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Phi(u + i\tilde{y}, x)|^p}{\prod_{j=1}^n |u_j + ia_{nk}\varepsilon|^k} du. \end{aligned}$$

Аналогично случаю а) проинтегрируем обе части полученного неравенства по x , учитывая при этом, что

$$\|\Phi(u + i\tilde{y}, x)\|_p^p \leq \|\Phi(u, x)\|_p^p = \|\Delta_u^l f(x)\|_p^p,$$

затем применим лемму 1 и равенство (2.10). Получим

$$\begin{aligned} \|f(x) - M_{\varepsilon, \varphi_l}(f, x)\|_p^p &\leq C(l, p) \varepsilon^{kn-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|\Delta_u^l f(x)\|_p^p}{\prod_{j=1}^n |u_j + ia_{nk}\varepsilon|^k} du \\ &\leq C(l, p) \varepsilon^{kn-n} \omega_l^p(\varepsilon, f)_p \left(\int_0^\infty \left(\frac{u}{\varepsilon} + 1 \right)^m \frac{du}{|u + ia_{nk}\varepsilon|^k} \right)^n \\ &\leq C(l, p) \varepsilon^{kn-n} \omega_l^p(\varepsilon, f)_p \left(\sum_{\beta=0}^m \binom{m}{\beta} \varepsilon^{-\beta} \int_0^\infty \frac{u^\beta du}{|u + ia_{nk}\varepsilon|^k} \right)^n \\ &\leq C(l, p) \omega_l^p(\varepsilon, f)_p. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Оценка (1.10) является непосредственным следствием теоремы 1. Для доказательства обратного неравенства (1.11) нам понадобится еще ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 5. Для любой функции $f \in H^p(E_{2n}^+)$, $0 < p < \infty$, выполнено

$$\|M_{\varepsilon, \varphi}(f, x)\|_p \leq C(p) \|f\|_p,$$

где $\varphi \in E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.6) и (1.7) вытекает следующее интегральное представление:

$$M_{\varepsilon, \varphi}(f, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f_{\tilde{y}}(u + x) \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi(\varepsilon|t|) e^{-i\langle u + i\tilde{y}, t \rangle} dt du,$$

где

$$\tilde{y} = \frac{1}{2} a_{nk} \tilde{\varepsilon} = \left(\frac{1}{2} a_{nk} \varepsilon, \dots, \frac{1}{2} a_{nk} \varepsilon \right).$$

Дальнейшие рассуждения проводятся как в доказательстве теоремы 1, выкладки при этом упрощаются. Лемма доказана.

Для функции $f \in H^p(E_{2n}^+)$ введем следующий дифференциальный оператор:

$$\tilde{D}^l f(x + iy) = i^l \int_{\mathbb{R}_+^n} |t|^l \hat{f}(t) e^{i\langle x + iy, t \rangle} dt;$$

тогда

$$(\tilde{D}^l f)^\wedge(t) = (i|t|)^l \hat{f}(t). \quad (3.3)$$

Отсюда на основании (1.5)

$$f_y(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{1}{(i|t|)^l} (\tilde{D}^l f)^\wedge(t) e^{i\langle x + iy, t \rangle} dt. \quad (3.4)$$

ЛЕММА 6. Пусть $f \in H^p(E_{2n}^+)$, $0 < p < \infty$, $l > 0$, $0 < h \leq \varepsilon$. Тогда

$$\|\tilde{\Delta}_{\pm h}^l f_{\tilde{\varepsilon}}(x)\|_p \leq C(l, p) \varepsilon^l \|\tilde{D}^l f_{(1/4)\tilde{\varepsilon}}(x)\|_p,$$

где $\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon, \dots, \varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании (1.2) и (3.4)

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{\pm h}^l f_{\tilde{\varepsilon}}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{l}{k} (-1)^k f_{\tilde{\varepsilon}}(x \pm k\tilde{h}) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{1}{(i|t|)^l} (\tilde{D}^l f)^{\wedge}(t) e^{i\langle x+i\tilde{\varepsilon}, t \rangle} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{l}{k} (-1)^k e^{\pm i k h |t|} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\frac{1 - e^{\pm i h |t|}}{i|t|} \right)^l (\tilde{D}^l f)^{\wedge}(t) e^{i\langle x+i\tilde{\varepsilon}, t \rangle} dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Пусть $y = (5/4)\varepsilon - (3/4)h$, $\tilde{y} = (y, \dots, y)$. На основании (1.6)

$$(\tilde{D}^l f)^{\wedge}(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{D}^l f_{\tilde{y}}(u) e^{-i\langle u+i\tilde{y}, t \rangle} dt.$$

Подставляя это выражение в (3.5) и учитывая выбор y , получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{\pm h}^l f_{\tilde{\varepsilon}}(x) &= h^l \int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\frac{1 - e^{\pm i h |t|}}{i h |t|} \right)^l e^{-(3/4)h|t|} \frac{1}{(2\pi)^n} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{D}^l f_{\tilde{y}-(1/4)\tilde{\varepsilon}} \left(u + i \frac{1}{4} \tilde{\varepsilon} \right) e^{-i\langle u+i(1/4)\tilde{\varepsilon}, t \rangle} du e^{\langle x, t \rangle} dt. \end{aligned}$$

В силу (1.7) и (1.6) последнее равенство означает, что

$$\tilde{\Delta}_{\pm h}^l f_{\tilde{\varepsilon}}(x) = h^l M_{h, F}(\tilde{D}^l f_{\tilde{y}-(1/4)\tilde{\varepsilon}}(x)),$$

где

$$F(\tau) = \left(\frac{1 - e^{\pm i \tau}}{i \tau} \right)^l e^{-(3/4)\tau} \in E.$$

Так как $y - (1/4)\varepsilon = \varepsilon - (3/4)h > (1/4)\varepsilon$, то

$$\|\tilde{D}^l f_{\tilde{y}-(1/4)\tilde{\varepsilon}}(x)\|_p \leq \|\tilde{D}^l f_{(1/4)\tilde{\varepsilon}}(x)\|_p.$$

Применяя лемму 5, получаем утверждение леммы 6.

Аналоги леммы 6 для конечных разностей в одномерном случае доказаны в [1; § 3, (38)] и [7; § 3, лемма 3].

ЛЕММА 7. Пусть $f \in H^p(E_{2n}^+)$, $0 < p < \infty$, $l > 0$, $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\|\tilde{D}^l f_{\tilde{\varepsilon}}(x)\|_p \leq C(l, p) \varepsilon^{-nl} \|f(x) - P_{j_{\tilde{\varepsilon}}}^l(f, x)\|_p,$$

где $j \in \mathbb{N}$, а $P_{j_{\tilde{\varepsilon}}}^l(f, x)$ – обобщенные средние Абеля–Пуассона (1.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (3.3)

$$(\tilde{D}^l f_{\varepsilon})^{\wedge}(t) = (i|t|)^l e^{-\varepsilon|t|} \hat{f}(t) = i^l \varepsilon^{-l} \varphi(\varepsilon|t|)(1 - e^{-j\varepsilon|t|}) \hat{f}(t),$$

где

$$\varphi(\tau) = \frac{\tau^l}{(1 - e^{-j\tau})^l} e^{-\tau} \in E.$$

Далее, так как

$$(1 - e^{-j\varepsilon|t|})^l \hat{f}(t) = (f(t) - P_{j\varepsilon}^l(f, t))^{\wedge},$$

то

$$\tilde{D}^l f_{\varepsilon}(x) = i^l \varepsilon^{-l} M_{\varepsilon, \varphi}(f - P_{j\varepsilon}^l(f), x).$$

Отсюда, применяя лемму 5, получаем требуемое.

Докажем, наконец, оценку снизу (1.11) в теореме 2. Как и в [1], будем исходить из соотношения

$$\tilde{\Delta}_{\pm h}^l f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^m \tilde{\Delta}_{\pm h}^l f_{m\varepsilon}(x) - \sum_{m=1}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^m \tilde{\Delta}_{\pm h}^l f_{m\varepsilon}(x), \quad (3.6)$$

где $0 < h \leq \varepsilon$.

Меняя порядок суммирования в первой сумме (3.6) и используя неравенство треугольника, получим

$$\|\tilde{\Delta}_{\pm h}^l f(x)\|_p^p \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{l}{k} \right|^p \left\| \sum_{m=0}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^m f_{m\varepsilon}(x \pm k\tilde{h}) \right\|_p^p + \sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{l}{k} \right|^p \left\| \tilde{\Delta}_{\pm h}^l f_{m\varepsilon}(x) \right\|_p^p \quad (3.7)$$

при $0 < p < 1$ и

$$\|\tilde{\Delta}_{\pm h}^l f(x)\|_p \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{l}{k} \right| \left\| \sum_{m=0}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^m f_{m\varepsilon}(x \pm k\tilde{h}) \right\|_p + \sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{l}{k} \right| \left\| \tilde{\Delta}_{\pm h}^l f_{m\varepsilon}(x) \right\|_p \quad (3.8)$$

при $p \geq 1$.

В силу определения средних $P_{\varepsilon}^l(f, x)$ (см. (1.9)) и инвариантности $\|\cdot\|_p$ относительно сдвига имеем

$$\left\| \sum_{m=0}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^m f_{m\varepsilon}(x \pm k\tilde{h}) \right\|_p = \left\| \sum_{m=0}^{\infty} \binom{l}{m} (-1)^m f_{m\varepsilon}(x) \right\|_p = \|f(x) - P_{\varepsilon}^l(f, x)\|_p.$$

Далее, в силу убывания $\|f_y(x)\|_p$ по y

$$\|\tilde{\Delta}_{\pm h}^l f_{m\varepsilon}(x)\|_p \leq \|\tilde{\Delta}_{\pm h}^l f_{\varepsilon}(x)\|_p.$$

Из (3.7) и (3.8) на основании сделанных замечаний вытекает

$$\|\tilde{\Delta}_{\pm h}^l f(x)\|_p \leq C(l, p) (\|f(x) - P_{\varepsilon}^l(f, x)\|_p + \|\tilde{\Delta}_{\pm h}^l f_{\varepsilon}(x)\|_p). \quad (3.9)$$

На основании лемм 6 и 7 имеем

$$\|\tilde{\Delta}_{\pm h}^l f_{\varepsilon}(x)\|_p \leq C(l, p) \varepsilon^l \|\tilde{D}^l f_{(1/4)\varepsilon}(x)\|_p \leq C(l, p) \|f(x) - P_{\varepsilon}^l(f, x)\|_p. \quad (3.10)$$

Подставляя (3.10) в (3.9), получим

$$\|\tilde{\Delta}_{\pm h}^l f(x)\|_p \leq C(l, p) \|f(x) - P_{\varepsilon}^l(f, x)\|_p.$$

Отсюда, переходя к супремуму по h , получим оценку снизу (1.11).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. A. Soljanik, “On the order of approximation to function of $H^p(\mathbb{R})$ ($0 < p \leq 1$) by certain means of Fourier integrals”, *Anal. Math.*, **12**:1 (1986), 59–75.
- [2] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.
- [3] С. Г. Прибегин, “Об одном методе приближения в H^p , $0 < p \leq 1$ ”, *Матем. сб.*, **192**:11 (2001), 123–136.
- [4] Э. А. Стороженко, “О приближении функций класса H^p , $0 < p < 1$ ”, *Сообщ. АН ГССР*, **88**:1 (1977), 45–48.
- [5] Э. А. Стороженко, “Об одной задаче Харди–Литтлвуда”, *Матем. сб.*, **119**:4 (1982), 564–583.
- [6] П. Кусис, *Введение в теорию пространств H^p с приложением доказательства Волффа теоремы о короне*, Мир, М., 1984.
- [7] Э. А. Стороженко, “О теоремах типа Джексона в H^p , $0 < p < 1$ ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:4 (1980), 946–962.

С. Г. Прибегин

Одесский национальный морской университет

Поступило

23.03.2006

Исправленный вариант

11.04.2007