Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Г. Складенко, Две ориентации, *Матем. заметки*,
2008, том 83, выпуск 1, 95–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3832>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 11:26:57

Две ориентации

Е. Г. Скляренко

Все тривиализации евклидова линейного расслоения $\pi: \mathcal{R} \rightarrow B$ над связной базой B распадаются на два класса, которые естественно называть *ориентациями* π . В случае ориентирующего пучка многообразия или векторного расслоения они допускают естественную интерпретацию в качестве ориентации этих объектов. Этим обеспечивается распространение типичных классических конструкций на все многообразия и векторные расслоения не зависимо от ограничений ориентируемости в обычном смысле.

Библиография: 15 названий.

Пусть $\pi: \mathcal{R} \rightarrow B$ – локально тривиальное евклидово (со структурной группой $\mathbb{Z}_2$) линейное расслоение над связной базой B . Так же, как для постоянного расслоения $\mathcal{R} = R (= B \times R)$, имеем $\text{Hom}(\mathcal{R}, R) = \mathbb{Z}_2$. Это означает, что и в общем случае $\mathcal{R}$ имеет две ориентации. Отличить их, однако, одну от другой труднее.

Пусть $\alpha = \{U_\lambda\}$ – покрытие B достаточно малыми областями. Под *тривиализацией* π *относительно* α понимается набор изометричных на слоях гомеоморфизмов $\varphi_\lambda: U_\lambda \times \mathbb{R} \rightarrow \pi^{-1}(U_\lambda)$ над множествами U_λ (для которых $\pi(\varphi_\lambda(x, r)) = x$). Стандартным образом отвечающие набору $\{\varphi_\lambda\}$ над пересечениями $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ числа $\varepsilon_{\lambda\mu}$, равные ± 1 , называются *функциями перехода*. Они удовлетворяют условиям

$$\varepsilon_{\lambda\mu} = \varepsilon_{\mu\lambda} \quad (\text{симметрия}), \quad \varepsilon_{\lambda\mu} \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{\nu\sigma} = \varepsilon_{\lambda\sigma} \quad (\text{условие коцикла}). \quad (1)$$

В подходящей форме наблюдения этой заметки справедливы и для ассоциированных расслоений $\mathcal{Z}$, слоями которых служит (содержащаяся в $\mathbb{R}$) группа $\mathbb{Z}$ целых чисел.

В представляющих наибольший и основной интерес ситуациях, однако, функции перехода $\varepsilon_{\lambda\mu}$ определяются не исходя из тривиализаций линейных расслоений, а по тем или иным правилам подходящими покрытиями (атласами) базы будущего расслоения, после чего уже используются для его конструирования. Наиболее типично подобные $\mathcal{R}$ (или $\mathcal{Z}$) возникают как ориентирующие пучки многообразий и векторных расслоений, более широко – как отличные от постоянных целые или вещественные коэффициенты для гомологий и когомологий. Определяются они заданием для подходящего покрытия α удовлетворяющих условиям (1) наборов $\{\varepsilon_{\lambda\mu}\}$ – функций

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00463).

перехода. Между точками несвязной суммы $\sqcup = \bigsqcup_{\lambda} (U_{\lambda} \times \mathbb{R})$ функциями $\varepsilon_{\lambda\mu}$ определяется отношение эквивалентности $\sim$, факторизацией по которому

$$\varphi: \sqcup \rightarrow \sqcup / \sim \quad (2)$$

и определяется $\mathcal{R}$ (соответственно $\mathcal{Z}$).

При таком способе определения возникает иллюзия о наличии для $\mathcal{R}$ канонической тривиализации относительно покрытия α : отображения φ_{λ} определяются как ограничения на соответствующие части $\sqcup$ отображения отождествления φ . Однако указанная тривиализация для $\mathcal{R}$ является такой же случайной, как и все другие. Исходя из иного покрытия и отвечающих ему по тем же правилам функций перехода, мы получим то же $\mathcal{R}$ (или $\mathcal{Z}$ – в зависимости от решаемой задачи) вместе с соответствующей тривиализацией, не имеющей с предыдущей выраженной связи.

Подобным образом представленная в [1; § 7] тривиализация ориентирующего линейного расслоения $\mathcal{R}$ гладкого многообразия $B = M^n$ называется *естественной*, отвечающей атласу $\alpha = \{U_{\lambda}\}$. На ее основе излагается способ интегрирования дифференциальных форм со значениями в $\mathcal{R}$, представляемый авторами как однозначно детерминированный, не зависящий ни от атласа, ни (в отличие от интегрирования на ориентируемых многообразиях) от ориентации используемых карт.

Недоучет в той или иной мере скрытых ориентирующих факторов имеет место и в различных других задачах, наиболее типично – в теории степени собственных отображений неориентируемых многообразий, в теории совпадений для таких отображений, в интерпретациях для неориентируемых векторных расслоений изоморфизма Тома.

1. Ориентированные карты и ориентирующие атласы. Под ориентированной картой расслоения π будем понимать пару (U, φ) , где U – область в B и $\varphi: U \times \mathbb{R} \rightarrow \pi^{-1}(U)$ – отображение тривиализации. В силу (2) тривиализация полностью определяется набором удовлетворяющих (1) функций перехода и одной ориентированной картой (U_0, φ_0) покрытия α .

Пусть $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ – множество единиц расслоения $\mathcal{R}$. Ограничение на $\mathcal{S}$ проекции π – двукратное накрытие базы B . Оно тривиально ($\mathcal{S} = B \times \{-1, 1\}$), только если тривиально само π (для нетривиальных π подпространство $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ связно).

Ориентированную карту (U, φ_U) , снабженную сечением $s_U: U \rightarrow \mathcal{S}$, будем называть *оснащенной* и обозначать символом (U, φ_U, s_U) . Соседние оснащенные карты (U, φ_U, s_U) , (V, φ_V, s_V) (для которых $U \cap V \neq \emptyset$) будем считать *совместимыми*, если ограничения s_U, s_V на $U \cap V$ совпадают или противоположны, в зависимости от того, совпадают или нет ориентации φ_U, φ_V . При этом мы не исключаем и тот случай, когда $U = V$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существуют атласы для π , состоящие из совместимых между собой оснащенных карт. Имеется два таких максимальных атласа (содержащих в себе все остальные). Каждый из них получается из другого заменой всех оснащений s_U на противоположные.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для некоторого атласа $\{(U, \varphi_U)\}$ нужны оснащения карт составляют сечения $\varphi_U(U \times \{1\})$. Одновременно возникает и атлас с противоположными оснащениями. Включение атласа $\{(U, \varphi_U)\}$, состоящего из ориентированных карт, в максимальный автоматически обеспечивает включение соответствующего атласа с оснащениями в максимальный атлас с совместимыми оснащениями.

Атласы, состоящие из совместимых между собой оснащенных карт, условимся называть *оснащенными*. Оснащенные атласы считаются эквивалентными, если они содержатся в одном и том же максимальном оснащенном атласе. При соглашении, что вместе с каждой картой (U, φ_U) атласы содержат и карту $(U, -\varphi_U)$ противоположной ориентации, два оснащенных атласа тогда и только тогда эквивалентны, когда определяемые ими оснащения на пересечениях карт первого и второго атласов совпадают.

Выбор одного из оснащенных атласов для $\mathcal{R}$ естественно называть *выбором* одной из двух *ориентаций* линейного расслоения $\mathcal{R}$, а сам оснащенный атлас – *ориентирующим атласом расслоения*. Выбор ориентации $\mathcal{R}$ эквивалентен выбору отвечающей ориентирующему атласу тривиализации $\mathcal{R}$ (для которой $\varphi_U^{-1}(s_U) = U \times \{1\}$). В случае постоянного $\mathcal{R} = B \times R$ оснащения s_U для атласов с одинаково ориентированными картами замещают собой (в зависимости от ориентации) одно из двух постоянных сечений 1 или -1 расслоения $\mathcal{R}$.

2. Ориентации многообразий. Под *ориентацией многообразия* M^n понимаем одну (из двух) ориентаций определяемого M^n ориентирующего линейного расслоения $\mathcal{R}$ над $B = M^n$. Как и в классическом случае, она допускает локальное задание: в соответствии с п. 1 она однозначно определяется некоторой ориентацией (в обычном смысле) карты U многообразия и единичным (по абсолютной величине) сечением s_U над этой картой расслоения $\mathcal{R}$. Согласованность двух соседних карт означает совпадение сечений (оснащений) на общей части для карт одинаковой (обычной) ориентации или их противоположность – в противном случае (в классическом случае сечения присутствуют в неявной форме и равны 1).

Заметим, что ориентирующее расслоение $\mathcal{R}$ многообразия M^n отличается от других линейных расслоений над M^n ориентируемостью многообразия $|\mathcal{R}|$ – тотального пространства $\mathcal{R}$. Выбор ориентации M^n в указанном выше смысле равносильен выбору ориентации $|\mathcal{R}|$.

3. Интегрирование дифференциальных форм. Процессу интегрирования дифференциальных форм на неориентируемом многообразии препятствует отсутствие механизма сопоставления результатов интегрирования на различных участках многообразия. В связи с этим в своей монографии [2], содержащей начала теории, кроме обычных форм, называемых *четными*, де Рам рассматривает также их модификации – так называемые *нечетные дифференциальные формы* (в установившейся позже терминологии – *плотности*). На ориентируемом многообразии оба понятия оказываются эквивалентными, в связи с чем автором делается вывод о том, что в этом случае можно, “выбрав раз и навсегда определенную ориентацию, избежать употребления нечетных форм”, а их употребление целиком отнести к многообразиям неориентируемым (§ 5 в [2]).

Основной дефект, мешающий построению в терминах дифференциальных форм полноценной теории когомологий, – отсутствие в общем случае у нечетных дифференциальных форм обратных образов при гладких отображениях многообразий (обратные образы определены только для так называемых ориентируемых отображений, см. [2; §§ 5, 18], а также ниже).

Кроме того, появлению иллюзии об однозначной детерминированности операции интегрирования на неориентируемых многообразиях в немалой степени способствовала (вместе с уже сказанным выше) и инертность нечетных дифференциальных

форм по отношению к ориентациям карт. Это подтверждается, в частности, содержанием § 7 в [1], где впервые введены дифференциальные формы со значениями в слоях ориентирующего расслоения $\mathcal{R}$ (названные формами, “скрученными с помощью ориентирующего расслоения”): в конечном итоге они отождествляются авторами с плотностями (т.е. с нечетными формами), а способ их интегрирования назван интегрированием плотностей.

Естественнее, тем не менее, интерпретировать эту операцию как интегрирование дифференциальных форм. Как обычно, учитывая наличие гладких разбиений единицы и представлений форм в виде сумм, слагаемые в которых умещаются на отдельных картах, операцию интегрирования достаточно определить на каждой карте. Пусть ω – дифференциальная n -форма со значениями в ориентирующем расслоении $\mathcal{R}$ гладкого многообразия M (см. в связи с этим также настоящий п. ниже), заданная на карте U с координатами $(x^1, \dots, x^n)$ некоторого ориентирующего (в смысле п. 1) атласа M . Определим интеграл от нее как

$$\int \omega = \int_U \cdots \int s_U \otimes f_U dx^1 \dots dx^n,$$

где $\omega = f_U dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ – запись ω в координатах U , f_U – функция со значениями в слоях $\mathcal{R}$ (т.е. сечение расслоения), s_U – оснащение карты.

Заметим, что $s_U \otimes f_U$ – сечение на U постоянного расслоения $\mathcal{R} \otimes \mathcal{R} = R$, т.е. обычная вещественная функция. Следовательно, можно оперировать с результатами интегрирования на различных участках M .

Определение инвариантно относительно замен координат. Если $y^1, \dots, y^n$ – новые координаты, а J – детерминант матрицы Якоби, то

$$\begin{aligned} s_U \otimes f_U dx^1 \dots dx^n &= s_U \otimes f_U |J| dy^1 \dots dy^n \\ &= (\operatorname{sgn} J \cdot s_U) \otimes (J \cdot f_U) dy^1 \dots dy^n = s_V \otimes f_V dy^1 \dots dy^n. \end{aligned}$$

Заметим, что в классическом случае ориентированного многообразия $\mathcal{R} = R$, $|J| = J$ и $s_U = s_V = 1$. Заметим также, что при замене ориентирующего атласа на противоположный (выражающейся в смене знака у оснащений s_U всех карт U атласа) в значении интеграла (как и в классическом случае) изменится знак.

Для ориентированного (по п. 2) многообразия M понятие нечетной дифференциальной формы становится эквивалентным понятию дифференциальной формы со значениями в $\mathcal{R}$. Пусть

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

– запись нечетной формы в координатах карты U ориентирующего атласа. Нужная форма

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

со значениями в $\mathcal{R}$ определяется соотношениями

$$\omega_{i_1 \dots i_k} = \tilde{\omega}_{i_1 \dots i_k} \cdot s_U,$$

где s_U – оснащения карт. В самом деле, участвующий в преобразованиях координат нечетной формы $\tilde{\omega}$ знак якобиана $\operatorname{sgn} J$ нейтрализуется таким же знаком при преобразовании s_U . Так как $\mathcal{R} \otimes \mathcal{R} = R$, сопоставлением

$$\omega_{i_1 \dots i_k} \rightarrow \tilde{\omega}_{i_1 \dots i_k} = s_U \otimes \omega_{i_1 \dots i_k}$$

устанавливается обратное соответствие.

Соответствие между формами обоих типов может быть осуществлено только с привлечением ориентирующего (в смысле п. 2) атласа M , одинаково для эквивалентных ориентирующих атласов и при замене атласа на противоположный изменяет знак. Избежать употребления нечетных форм, таким образом, можно не только на ориентируемых, но и на любых многообразиях. Становится прозрачной причина отсутствия в общем случае обратного образа нечетной формы: обратный образ $f^*\mathcal{R}_2$ ориентирующего расслоения $\mathcal{R}_2$ многообразия M_2 при отображении $f: M_1 \rightarrow M_2$ может не быть ориентирующим расслоением $\mathcal{R}_1$ многообразия M_1 .

Заметим, что на любом гладком многообразии, кроме полей обычных тензоров (мыслимых как функционалы со значениями в постоянных вещественных коэффициентах $\mathbb{R} \sim M \times \mathbb{R}$), присутствуют такие же поля тензоров со значениями в слоях локально постоянных вещественных коэффициентов $\mathcal{E}$ (евклидовых линейных расслоений $\mathcal{E} \rightarrow M$). Они возникают из обычных, определенных на ориентированных картах (U, φ_U) для $\mathcal{E}$, посредством тех же отождествлений, что и в конструкции (2) для самого расслоения $\mathcal{E}$. В частности, можно говорить о дифференциальных формах со значениями в $\mathcal{E}$ (в том числе и со значениями в $\mathcal{R}$). Описанный выше механизм учета результатов интегрирования n -форм со значениями в $\mathcal{R}$ на различных участках многообразия M основан на том, что подынтегральные выражения, записываемые в координатах карт, должны быть обычными функциями (принимаящими значения не в $\mathcal{R}$, а в постоянных коэффициентах R), и потому из-за отличия функций перехода (1), отвечающих $\mathcal{E}$, от аналогичных функций для ориентирующего расслоения $\mathcal{R}$ этот механизм неприменим к дифференциальным формам со значениями в локально постоянных вещественных коэффициентах $\mathcal{E}$, отличных от $\mathcal{R}$. По этой же причине, очевидно, он неприменим и к обычным дифференциальным формам (на неориентируемом многообразии). Таким образом, интегрировать можно лишь n -формы со значениями в $\mathcal{R}$ (классические – в ориентируемом случае $\mathcal{R} = R$).

В заключение этого пункта несколько слов об интегрировании форм степени $p < n$. При ограничении такой формы со значениями в некотором линейном расслоении $\mathcal{E}$ на p -мерное подмногообразие $W \subset M$ на этом подмногообразии возникает p -форма со значениями в $\mathcal{E}|_W$ – ограничении $\mathcal{E}$ на W . Интегрировать такую форму можно в точности по тем W , для которых $\mathcal{E}|_W$ оказываются ориентирующими расслоениями самих W . Подмногообразие $W \subset M$ естественно называть *ориентируемым в M* , если $\mathcal{R}|_W$ – ориентирующее расслоение для W . Таким образом, дифференциальные формы со значениями в $\mathcal{R}$ (как и в классическом случае $\mathcal{R} = R$) можно интегрировать только по ориентируемым (в M !) подмногообразиям.

Легко видеть, что ориентируемое в обычном смысле подмногообразие тогда и только тогда ориентируемо в M , когда оно имеет в M ориентируемую (в обычном смысле) окрестность. Подмногообразие $W \subset M$ тогда и только тогда ориентируемо в M , когда его нормальное расслоение ориентируемо как расслоение над W . Ориентируемы в M границы (в том числе кусочно гладкие) любых областей в M (но не любые подмногообразия размерности $n - 1$). По этой причине для форм степени $n - 1$ со значениями в $\mathcal{R}$ имеет место формула Стокса. Как обычно, наличие формулы Стокса позволяет распространить операцию интегрирования на классы когомологий группы $H_c^n(M; \mathcal{R})$.

4. Ориентирующая форма и форма объема. Многообразие M тогда и только тогда ориентируемо, когда оно обладает дифференциальными формами степе-

ни n , отличными от нуля во всех точках M (предложение 3.2 в [1]). Следующий результат является распространением этого наблюдения на неориентируемые многообразия.

ТЕОРЕМА 2. *Отличные от нуля во всех точках многообразия M дифференциальные формы степени n со значениями в линейном расслоении $\mathcal{E}$ существуют тогда и только тогда, когда $\mathcal{E} = \mathcal{R}$ – ориентирующее расслоение многообразия M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $\mathcal{E} = \mathcal{R}$ для карты U ориентирующего атласа пусть

$$\tilde{\omega}_U = f_U dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

– некоторая обычная форма (со значениями в R) с неотрицательной финитной функцией $f_U = f_U(x^1, \dots, x^n)$ и

$$\omega_U = f_U \cdot s_U dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

– соответствующая форма со значениями в $\mathcal{R}$. Для карт ориентирующего атласа формы $\tilde{\omega}_U$ выберем таким образом, чтобы их носители составили локально конечную систему компактных множеств, покрывающих все M . Этим будет определена форма $\omega = \sum \omega_U$ со значениями в $\mathcal{R}$, всюду отличная от нуля.

Наоборот, пусть ω – дифференциальная форма степени n со значениями в $\mathcal{E}$, всюду отличная от нуля, и пусть $\{U_i\}$ – некоторый обычный атлас M . В координатах U_i форма ω имеет вид $\omega_i(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, $x \in U_i$, ω_i – сечение $\mathcal{E}$. Так как функция $\omega_i(x)$ не обращается в нуль, определено сечение $s_i = \omega/|\omega_i|$ расслоения $\mathcal{E}$, которое по определению будем считать оснащением карты U_i в $\mathcal{E}$. Соседние карты оснащенного таким образом атласа для $\mathcal{E}$ совместимы, очевидно, с функциями перехода, определяемыми законом преобразования дифференциальных форм, т.е. с функциями перехода для $\mathcal{R}$, поэтому $\mathcal{E} = \mathcal{R}$. Теорема доказана.

Пусть ω^0 – одна из n -форм со значениями в $\mathcal{R}$, всюду отличная от нуля. Из координатной записи видно, что любая другая n -форма ω со значениями в $\mathcal{R}$ имеет вид $\omega = f \cdot \omega^0$, где f – обычная функция. Эта функция не обращается в нуль; следовательно, на связном многообразии M она сохраняет знак в точности в том случае, когда ω , как и ω^0 , нигде не обращается в нуль. Таким образом, множество не обращающихся в нуль n -форм со значениями в $\mathcal{R}$ распадается на два класса, определяемые знаком отношения между ними. Следовательно, по тем же причинам, что и для ориентируемых многообразий (ср. § 3 в [1], определение 3.7 главы 3 в [3], конец п. 4.2 в [4] и др.), формы обсуждаемого типа можно считать ориентирующими: для любой такой формы ω^0 функции $s_U \otimes \omega_U^0$ со значениями в $R = \mathcal{R} \otimes \mathcal{R}$ одного знака (ω_U^0 определяется записью $\omega^0 = \omega_U^0 dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ на карте U), и выбор ω^0 равносильен выбору ориентирующего атласа, для карт которого функции $s_U \otimes \omega_U^0$ положительны (для ориентируемого многообразия символы s_U принимают значения ± 1 в соответствии со знаками функций ω_U^0).

Фиксированная дифференциальная форма ω^0 со значениями в $\mathcal{R}$, не обращающаяся в нуль всюду на многообразии, помимо того, что она определяет ориентацию M в принятом нами смысле, задает на многообразии отвечающую этой ориентации меру объема

$$dV = s_U \otimes \omega_U^0 dx^1 \dots dx^n = |\omega_U^0| dx^1 \dots dx^n,$$

позволяющую интегрировать определенные на многообразии обычные функции и, таким образом, может рассматриваться как элемент объема в M (ср. с определением элемента объема для ориентируемых многообразий в п. 6 приложений в [5]). Естественный элемент объема ω^0 на M определяется любым метрическим тензором G , (т.е. полем любых невырожденных дважды ковариантных тензоров): на картах ориентирующего атласа

$$\omega^0 = \sqrt{|g|} s_U dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

(или $\omega_U^0 = \sqrt{|g|} s_U$), где g – детерминант матрицы Грама тензора G . При этом стандартно $dV = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. В § 24 в [2] элемент объема риманова многообразия определен как нечетная форма с локальной записью $\sqrt{g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для любого элемента объема ω^0 интегрирование дифференциальных форм ω степени n со значениями в $\mathcal{R}$ эквивалентно интегрированию обычных функций $f = \omega/\omega_0$ по мере $dV = |\omega_U^0| dx^1 \dots dx^n$.*

В самом деле, любая форма ω представима как $\omega = f \cdot \omega_0$ и таким образом реализуются все функции. В координатах

$$\omega = f \cdot \omega_U^0 dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad \omega_U = f \cdot \omega_U^0.$$

При интегрировании ω подынтегральное выражение есть

$$s_U \otimes \omega_U = f \cdot (s_U \otimes \omega_U^0) = f \cdot |\omega_U^0|,$$

так что интеграл от ω совпадает с интегралом от f по мере.

5. Фундаментальные классы гомологий и когомологий многообразия и ориентация. Пусть M – связное топологическое многообразие размерности n и $\mathcal{Z}$ – его ориентирующий пучок (подпучок $\mathcal{Z}$ ориентирующего расслоения $\mathcal{R}$). Функции перехода в ориентирующих атласах для $\mathcal{R}$ (или $\mathcal{Z}$) в этом случае определяются обычными ориентациями координатных карт M .

Для локально постоянного пучка $\mathcal{A}$ абелевых групп на M и семейства носителей Φ имеют место изоморфизмы

$$H_{\Phi}^p(M; \mathcal{A} \otimes \mathcal{Z}) = H_{n-p}^{\Phi}(M; \mathcal{A})$$

(общая форма двойственности Пуанкаре, см. § 9 главы 5 в [6] для паракомпактифицирующих семейств Φ и § 3 в [7] – для произвольных семейств). В частности,

$$H_{\Phi}^n(M; \mathcal{A} \otimes \mathcal{Z}) = H_0^{\Phi}(M; \mathcal{A}).$$

Для наиболее стандартных семейств Φ группа $H_0^{\Phi}(M; \mathcal{A})$ совпадает с $\mathbb{Z}$ только при $\mathcal{A} = M \times \mathbb{Z}$ и только для $\Phi = c$ – семейства компактных множеств всего пространства $X = M$ или его открытых областей $U \subset X$. Таким образом, группа $H_{\Phi}^n(M; \mathcal{J})$ совпадает с группой $\mathbb{Z}$ целых чисел только для указанных компактных семейств и только для

$$\mathcal{J} = \mathcal{Z}: H_c^n(M; \mathcal{Z}) = H_c^n(U; \mathcal{Z}|_U) = \mathbb{Z}.$$

Образующие $\pm 1 \in \mathbb{Z} = H_c^n(M; \mathcal{Z})$ называются *фундаментальными классами* когомологий многообразия M .

ТЕОРЕМА 4. *Выбор одного из двух фундаментальных классов когомологий связного многообразия M равносителен выбору одной из двух ориентаций M в смысле п. 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть 1_M – фундаментальный класс в $H_c^n(M; \mathcal{Z}) = \mathbb{Z}$ и 1_U – его прообраз в $H_c^n(U; \mathcal{Z}|_U)$ при изоморфизме когомологий, отвечающем включению $U \subset M$ для достаточно малой (по отношению к $\mathcal{Z}$) карты многообразия. Из двух возможных тривиализаций $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{Z}|_U$ выберем ту, приняв ее за φ_U , при которой образ 1_U равен $1 \in \mathbb{Z} = H_c^n(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z})$.

Используя в качестве U все карты некоторого атласа, получаем их тривиализацию. Остается убедиться, что функции перехода для нее совпадают с функциями для $\mathcal{Z}$. Действительно, отвечающие малой области $W \subset U \cap V$ прообразы $\varphi_U^{-1}(W)$ и $\varphi_V^{-1}(W)$ в $\mathbb{R}^n$ посредством $\varphi_V^{-1}\varphi_U$ отображаются друг в друга либо с сохранением ориентации, либо с ее сменой, соответственно чему отвечающие 1_U и 1_V единицы в $\mathbb{Z} = H_c^n(\varphi_U^{-1}(W)) = H_c^n(\varphi_V^{-1}(W)) = H_c^n(\mathbb{R}^n; \mathbb{Z})$ переходят друг в друга либо при тождественном изоморфизме $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ в первом случае, либо при антиподальном – во втором, что как раз и отвечает функциям перехода для $\mathcal{Z}$. Как отмечалось в конце п. 1 выше, выбор тривиализации $\mathcal{Z}$ равносителен выбору ориентации M (в смысле п. 2).

В соответствии с указанной выше формой двойственности Пуанкаре $H_n^\Phi(M; \mathcal{A}) = H_\Phi^0(M; \mathcal{A} \otimes \mathcal{Z})$; аналогично для областей $U \subset M$. Группа H_Φ^0 (для M или U) как группа сечений с носителями в Φ пучка коэффициентов отлична от нуля только для постоянных коэффициентов и только для семейства всех замкнутых множеств. Таким образом, для локально постоянных целочисленных коэффициентов отлична от нуля и равна $\mathbb{Z}$ только группа $H_n(M; \mathcal{Z})$, совпадающая с $H_n(U; \mathcal{Z}|_U)$ для областей $U \subset M$. Образующие $\pm 1 \in \mathbb{Z} = H_n(M; \mathcal{Z})$ называются *фундаментальными классами* гомотогий многообразия M . С использованием изоморфизмов $H_n(M; \mathcal{Z}) = H_n(U; \mathcal{Z}|_U)$ для малых областей $U \subset M$ аналогично теореме 4 доказывается

ТЕОРЕМА 4'. *Выбор одного из фундаментальных классов гомотогий связного многообразия M равносителен выбору ориентации M в смысле п. 2.*

6. Класс Тома и ориентация векторного расслоения. Пусть $p: E \rightarrow X$ – локально тривиальное вещественное векторное расслоение над связной базой X . Для такого расслоения имеют место изоморфизмы Тома, которые в одной из наиболее общих форм имеют вид

$$H_\Phi^q(X; \mathcal{A}) = H_{p^{-1}(\Phi)}^{n+q}(E, E_0; p^*(\mathcal{Z}(p) \otimes \mathcal{A}))$$

(п. 7.9 главы IV в [8]). Здесь $\mathcal{A}$ – пучок абелевых групп на X , n – размерность слоя, E_0 – дополнение к нулевому сечению расслоения, $\mathcal{Z}(p)$ – ориентирующий пучок расслоения. Для локально постоянных коэффициентов $\mathcal{A}$ группа $H_\Phi^0(X; \mathcal{A})$, состоящая из сечений $\mathcal{A}$ с носителями в Φ , равна нулю, если семейство носителей Φ отлично от семейства всех замкнутых в X множеств. Группа $H^0(X; \mathcal{A})$ также равна нулю, если $\mathcal{A} \neq X \times G$. Наконец, $H^0(X; G) = G$.

Это означает, что в типичных ситуациях указанные когомотогии пары (E, E_0) при $q = 0$ отличны от нуля только в частном случае $H^n(E, E_0; p^*(\mathcal{Z}(p) \otimes G))$, причем

эта группа изоморфна G . Образующие группы $H^n(E, E_0; p^*(\mathcal{Z}(p))) = \mathbb{Z}$ называются *классами Тома* расслоения p . Символ τ означает ниже одну из образующих.

В соответствии с теоремой 2.1 в [9] ограничение τ_x класса τ на каждый слой $\mathbb{R}_x^n$, $x \in X$, совпадает с одной из образующих изоморфной Z группы $H_c^n(\mathbb{R}_x^n; p^*Z_x)$, где Z_x – слой пучка $\mathcal{Z}(p)$ над точкой x и p^*Z_x – постоянный пучок, служащий ограничением пучка $p^*\mathcal{Z}(p)$ на слой $\mathbb{R}_x^n$ (т.е. обратным образом пучка $p^*\mathcal{Z}(p)$ при включении $p^{-1}(x) \subset E$), причем своими ограничениями $\tau_x \in H_c^n(\mathbb{R}_x^n; p^*Z_x)$ при указанной интерпретации Z_x класс τ определен однозначно (без такой интерпретации Z_x ограничения τ на слои определены с точностью до знака).

В п. 7.9 главы 4 в [8] отмечается, что для ориентируемых расслоений выбор одного из двух возможных значений для τ определяется выбором ориентации расслоения, т.е. одного из двух возможных изоморфизмов постоянного пучка $\mathcal{Z}(p)$ прямому произведению $X \times Z$, и что подобная интерпретация τ возможна только для ориентируемых расслоений. Однако имеет место следующий более общий результат.

ТЕОРЕМА 5. *Выбор класса Тома $\tau \in H^n(E, E_0; p^*\mathcal{Z}(p)) = Z$ вещественного векторного расслоения $p: E \rightarrow X$ над связной базой X равносильен выбору ориентации его ориентирующего пучка $\mathcal{Z}(p)$ в смысле п. 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Слоями локально постоянного пучка $\mathcal{Z}(p)$ служат когомологии $H^n(\mathbb{R}_x^n, \mathbb{R}_x^n \setminus \{0_x\})$ (п. 7.9 главы 4 в [8]), поэтому тривиализации $\mathcal{Z}(p)$ однозначно определяются тривиализациями самого векторного расслоения, т.е. системами линейных на слоях послойных гомеоморфизмов $\psi_U: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow p^{-1}(U)$, отвечающих наборам достаточно малых областей U , покрывающих X .

Пусть τ_U – ограничения класса Тома τ на $p^{-1}(U)$ при индуцированных включениями $U \subset X$ канонических изоморфизмах

$$Z = H^n(E, E_0; p^*\mathcal{Z}(p)) \rightarrow H^n(p^{-1}(U), p^{-1}(U) \cap E_0; p^*\mathcal{Z}(p)|p^{-1}(U))$$

(ср. § 2 в [9]). Для каждого U в качестве ψ_U выберем отображение, для которого образом τ_U при изоморфизме ψ_U^* оказывается $1 \in Z = H^n(U \times \mathbb{R}^n, U \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}); Z)$. Этим определена тривиализация всех карт некоторого атласа, и следует убедиться, что она является тривиализацией расслоения p , т.е. совместима с функциями перехода для p .

Для этого пусть $W \subset U \cap V$ – некоторая область в пересечении двух соседних карт, $i_U: W \subset U$, $i_V: W \subset V$. По условию $\tau_W = i_U^*(\tau_U) = i_V^*(\tau_V)$ и автоморфизм изоморфной $\mathbb{Z}$ группы когомологий

$$H^n(p^{-1}(W), p^{-1}(W) \cap E_0; p^*\mathcal{Z}(p)|p^{-1}(W)),$$

индуцированный композицией ограниченных на W отображений $i_V^{-1}\psi_V^{-1}\psi_U i_U$, должен быть тождественным изоморфизмом. Однако в композиции содержится влияющее на устройство указанного изоморфизма отображение $\psi_V^{-1}\psi_U$, сохраняющее или изменяющее ориентацию всех слоев $\mathbb{R}_x^n$ для $x \in U \cap V$ и одновременно определяющее функции перехода между картами расслоения p , следовательно, и функции перехода ориентирующего пучка $\mathcal{Z}(p)$ (при изменении ориентации ожидаемое изменение знака в когомологиях нейтрализуется одновременным изменением знака в группе коэффициентов). Это означает, что для определяемых набором $\{\tau_U\}$ ориентаций карт функции перехода между ними определяются по тому же правилу, что и для $\mathcal{Z}(p)$ –

знаками якобианов, отвечающих картам преобразований слоев $\mathbb{R}_x^n$. В соответствии с п. 1 выше предъявление тривиализации $\mathcal{Z}(p)$ равносильно выбору его ориентации. Теорема доказана.

7. О степени отображения многообразий. Вид гомологий и когомологий многообразий в старшей размерности (п. 5 выше) указывает на то, что содержательная теория степени отображений некомпактных многообразий возможна только в классе собственных отображений. Такая теория обычно рассматривалась для отображений ориентируемых многообразий. При участии неориентируемых многообразий для выяснения структуры отображений наряду с вынужденными конструкциями, использующими поднятия отображений на подходящие накрытия в целях поиска редукций к отображениям ориентируемых многообразий, с учетом поведения локальных ориентаций вдоль путей и их образов (и т.п.) обычно применялась мало информативная $\mathbb{Z}_2$ -степень (степень по модулю 2); для определения степени использовался индуцированный отображением гомоморфизм старших когомологий. Не менее эффективными для достижения цели оказываются и группы гомологий [10].

Необычный подход представлен в [2]: степень описывается в терминах отображений потоков, группы которых дуальны к когомологиям, определяемым нечетными дифференциальными формами. Существенным преимуществом этого подхода, однако, оказывается его применимость и к подходящим отображениям неориентируемых многообразий. В классе замкнутых триангулируемых (в том числе неориентируемых) многообразий определение степени в терминах когомологий с локальными коэффициентами дано в [11]. Искусственность и сложность конструкций и связанная с этим специфика определений не способствовали распространению подходов, и при исследовании отображений неориентируемых многообразий традиционно употреблялась только степень по модулю 2. Считалось даже, что в общих ситуациях только такая степень и может быть определена [12], [13].

Бедность информации, получаемой применением степени по модулю 2, стремление получить наиболее полную общую картину возможного устройства преобразований точек в классах гомотопных между собой отображений многообразий одинаковой размерности привело Хопфа к построению в рамках алгебраической топологии некоторой специальной теории степени собственных отображений топологических многообразий, названной им теорией абсолютной степени [14]. Фундаментальным достижением в этой теории является теорема Хопфа о совпадении абсолютной степени отображения с его так называемой геометрической степенью. Под *геометрической степенью* отображения f понималось минимальное натуральное число d такое, что в классе собственно гомотопных f отображений найдется отображение g , а для g — некоторый диск D в многообразии-образе, для которых множество $g^{-1}(D)$ распадается на d дизъюнктивных дисков, каждый из которых гомеоморфно отображается на D посредством g .

Будучи достаточно сложной, теория Хопфа (использующая наряду со стандартными средствами гомотопической топологии конструкции из теории Нильсена классов корней отображения), однако, оказалась мало практичной в плане вычисления значений степени для конкретных отображений (наиболее близкий к первоначальному подход изложен в [12]; см. там, в частности, определение 5.1). Предпринимались попытки переориентации первоначальных конструкций Хопфа в сторону максимальной опоры на средства теории гомологий. Наиболее завершенные результа-

ты в этом направлении получены в [15]. С учетом соотношений между степенями подходящих отображений ориентируемых многообразий, связанных с исходным цепочкой последовательно определяемых специальных накрывающих отображений, автор в сущности предоставляет еще одно определение абсолютной степени, указывая ее значения для естественно описываемых нескольких типов отображений. Это делает абсолютную степень более вычислимой (хотя по мнению авторов [12] и несколько затушевывает ее первоначальный геометрический смысл). Оказалось, что для отображений ориентируемых многообразий абсолютная степень совпадает с гомологической (по абсолютной величине). Для отображений любых многообразий она совпадает по модулю 2 с гомологической $\mathbb{Z}_2$ -степенью. Эти утверждения передоказываются в [12], где в полном объеме с использованием теории Нильсена корней отображения передоказывается и указанная выше теорема Хопфа.

Вид гомологий и когомологий многообразий в старшей размерности указывает (кроме сказанного выше) на целесообразность выделения в классе собственных отображений многообразий подкласса, состоящего из отображений $f: M_1 \rightarrow M_2$ (в том числе многообразий отличающихся размерностей), для которых $f^*\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1$ ($\mathcal{R}_i$ – ориентирующие расслоения M_i , $i = 1, 2$). Следуя [2], будем называть такие отображения *ориентируемыми* (в [2] они представлены в несколько иной интерпретации). Под *гомологической степенью* ориентируемого отображения f многообразий одинаковой размерности n будем понимать число

$$\deg f = f^*(1) \in H_c^n(M_1; \mathcal{R}_1) = \mathbb{Z},$$

где $1 \in \mathbb{Z} = H_c^n(M_2; \mathcal{R}_2)$.

Несложный анализ определения абсолютной степени, представленного в [15], показывает, что для ориентируемых собственных отображений f абсолютная степень совпадает с $|\deg f|$. Для неориентируемых f абсолютная степень типично равна нулю и отлична от нуля лишь в случае, когда M_1 неориентируемо, образ некоторой петли, обращающей локальную ориентацию M_1 , стягиваем в M_2 и не равна нулю $\mathbb{Z}_2$ -степень отображения $f^*: M_1 \rightarrow \widetilde{M}_2$, максимальным образом (по отношению к накрытиям M_2) накрывающего f . В этом случае абсолютная степень f совпадает с индексом j образа фундаментальной группы $\pi_1(M_1)$ в $\pi_1(M_2)$.

Совпадение для ориентируемых отображений гомологической степени с абсолютной обеспечивает, с одной стороны, достаточно простой способ определения их геометрической степени, а с другой – наличие для абсолютной (равносильно: геометрической) степени в классе ориентируемых отображений ряда естественных для степени свойств, таких как мультипликативность по отношению к композициям, совпадение с кратностью для конечнократных накрытий¹ и др. Инвариант $\deg f$ делится на j при $j < \infty$ и равен нулю при $j = \infty$ (для абсолютной степени произвольных собственных отображений это следствие ее описания, данного в [15]). Если W – связное многообразие размерности $n + 1$, $M_1, M_2, \dots$ – компоненты края W , f – ориентируемое собственное отображение W в связное n -мерное многообразие N (без края) и f_i – ограничения f на M_i , то $\deg f_i \neq 0$ только для конечного числа индексов i , причем $\sum_i \deg f_i = 0$. В частности, $\deg f_1 = \deg f_2$ для бордантных отображений $M \rightarrow N$ и $\deg f_1 = 0$, если $\partial W = M_1$.

¹При используемом там подходе к определению степени этот факт был установлен еще в [2].

В этом проявляется, очевидно, преимущество алгебраизированного понятия степени перед степенью чисто геометрической: в соотношениях учитываются ориентации (в смысле п. 2) на краях, индуцируемые вложениями в ориентированное (в смысле п. 2) многообразие W .

Пример, в котором W – лист Мебиуса, $N = S^1$ – окружность и $f: W \rightarrow S^1$ – стандартная проекция, показывает, что предположение об ориентируемости f в последнем утверждении существенно – для абсолютной степени в общем случае оно не имеет места. Нарушается в общем случае и свойство мультипликативности. Если, например, f – некоторое неориентируемое отображение, то для всех включающих f композиций свойство мультипликативности имеет место тогда и только тогда, когда абсолютная степень f равна нулю. Для композиции $f = f_2 f_1$, в которой $f_1: P^2 \rightarrow S^2$ – отображение проективной плоскости на сферу посредством отождествления проективной прямой с южным полюсом S^2 , а $f_2: S^2 \rightarrow S^2$ – отображение степени 2, регулярное вне полюсов, абсолютные степени f_1 , f_2 и f равны соответственно 1, 2 и 0. Аналогичным образом абсолютная степень gf_1 равна нулю, где $g: S^2 \rightarrow P^2$ – стандартное накрытие, $\deg g = 2$ (пример 3.1 в [13]). Свойство мультипликативности может нарушаться и при отличных от нуля абсолютных степенях композиций (пример 3.2 в [13]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Ботт, Л. В. Ту, *Дифференциальные формы в алгебраической топологии*, Наука, М., 1989.
- [2] Дж. де Рам, *Дифференцируемые многообразия*, ИЛ, М., 1956.
- [3] С. Стернберг, *Лекции по дифференциальной геометрии*, Мир, М., 1970.
- [4] Ф. Уорнер, *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*, Мир, М., 1987.
- [5] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. I, Наука, М., 1981.
- [6] Г. Э. Бредон, *Теория пучков*, Наука, М., 1988.
- [7] Е. Г. Скляренко, “К теории обобщенных многообразий”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:4 (1971), 831–843.
- [8] G. E. Bredon, *Sheaf Theory*, Grad. Texts in Math., **170**, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [9] Е. Г. Скляренко, “Гомологии и когомологии общих пространств”, *Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. Фундам. напр.*, **50**, ВИНТИ, М., 1989, 129–266.
- [10] А. Дольд, *Лекции по алгебраической топологии*, Мир, М., 1976.
- [11] P. Olum, “Mappings of manifolds and the notion of degree”, *Ann. of Math. (2)*, **58**:3 (1953), 458–480.
- [12] R. F. Brown, H. Schirmer, “Nielsen Root Theory and Hopf Degree Theory”, *Pacific J. Math.*, **198**:1 (2001), 49–80.
- [13] R. B. S. Brooks, R. F. Brown, H. Schirmer, “The absolute degree and the Nielsen root number of compositions and Cartesian products of maps”, *Topology Appl.*, **116**:1 (2001), 5–27.
- [14] H. Hopf, “Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. II: Klasseninvarianten von Abbildungen”, *Math. Ann.*, **102**:1 (1930), 562–623.
- [15] D. B. A. Epstein, “The degree of a map”, *Proc. London Math. Soc. (3)*, **16** (1966), 369–383.

Е. Г. Скляренко

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: egskl@higeom.math.msu.su

Поступило

13.03.2007