Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Н. Белоусов, Поверхности дель Пеццо с логтерминальными особенностями, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 2, 170–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3833>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 13:00:19

Поверхности дель Пеццо с логтерминальными особенностями

Г. Н. Белоусов

В работе доказывается отсутствие поверхностей дель Пеццо с пятью логтерминальными особенностями и числом Пикара 1. Используются расслоения с общим слоем $\mathbb{P}^1$.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Нормальная проективная поверхность X называется (*особой*) *поверхностью дель Пеццо*, если антиканонический дивизор Вейля $-K_X$ является обильным дивизором $\mathbb{Q}$ -Картье.

Нас интересуют поверхности дель Пеццо над полем $\mathbb{C}$ с логтерминальными особенностями. Такие поверхности естественным образом возникают в теории логминимальных моделей (см., например, [1]). Наиболее интересен случай поверхностей дель Пеццо с числом Пикара 1.

Для поверхностей дель Пеццо с логтерминальными особенностями и числом Пикара 1 известна полная классификация в случаях, если все особенности дювалевские (см., например, [2], [3]), если на поверхности имеется только одна особенность (см. [4]), если особенности индекса 2 (см. [5]). Известно, что такая поверхность имеет не более пяти особых точек (см. [6]). Коллар ставит проблему о существовании алгебраической поверхности S с пятью логтерминальными особенностями и гомотопиями, как у $\mathbb{P}^2$ (см. [7]). В данной работе эта проблема будет решена для поверхностей дель Пеццо.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Двумерные особенности логтерминальны тогда и только тогда, когда они являются факторособенностями по конечным группам (см. [8; теорема 9.6]).

Основной результат работы состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть X – поверхность дель Пеццо с логтерминальными особенностями и числом Пикара 1. Тогда X имеет не более четырех особых точек.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Эту оценку нельзя улучшить, поскольку существуют поверхности дель Пеццо с четырьмя логтерминальными особенностями (см. [3], [9]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Все поверхности дель Пеццо с логтерминальными особенностями рациональны (см. [5; лемма 1.3.1]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00395) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-1987.2008.1).

2. Предварительные результаты. В данной работе мы будем придерживаться следующих обозначений:

- $(-n)$ -кривая – неособая рациональная кривая с индексом самопересечения $-n$;
- K_X – канонический дивизор на поверхности X ;
- $\rho(X)$ – число Пикара поверхности X ;
- $\mathbb{F}_n$ – рациональная линейчатая поверхность (поверхность Хирцбруха);
- $\#D$ – число неприводимых компонент в носителе дивизора D .

ТЕОРЕМА 2.1 (см. [6; следствие 9.2]). Пусть X – рациональная поверхность с логтерминальными особенностями и $\rho(X) = 1$. Тогда $\sum_{P \in X} (m_P - 1)/m_P \leq 3$, где m_P – порядок фундаментальной группы $\pi_1(U_P - \{P\})$ (U_P – достаточно малая окрестность точки P).

Таким образом, любая рациональная поверхность X имеет не более шести особых точек. Пусть X имеет шесть особых точек. Тогда все особенности дювалевские и X – поверхность дель Пеццо, что невозможно согласно классификации поверхностей дель Пеццо с дювалевскими особенностями (см., например, [2], [3]).

Из теоремы 2.1 следует, что если рациональная поверхность X имеет пять особых точек, то возможны лишь следующие порядки групп $\pi_1(U_{P_1} - P_1), \dots, \pi_1(U_{P_5} - P_5)$ (здесь $P_1, \dots, P_5$ – особые точки):

$$\begin{aligned} (2, 2, 3, 3, 3), & \quad (2, 2, 2, 3, 3), & \quad (2, 2, 2, 3, 4), & \quad (2, 2, 2, 3, 5), \\ (2, 2, 2, 3, 6), & \quad (2, 2, 2, 4, 4), & \quad (2, 2, 2, 2, n), & \quad \text{где } n \geq 2. \end{aligned} \quad (*)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Порядок $\pi_1(U_P - P)$ равный 2 означает, что особенность P дювалевская типа A_1 . Порядок $\pi_1(U_P - P)$ равный 3 означает, что особенность P либо дювалевская типа A_2 , либо циклическая факторособенность типа $1/3(1, 1)$. Порядок $\pi_1(U_P - P)$ равный 4 означает, что особенность P либо дювалевская типа A_3 , либо $1/4(1, 1)$. Порядок $\pi_1(U_P - P)$ равный 5 означает, что особенность P либо дювалевская типа A_4 , либо $1/5(1, 1)$, либо $1/5(1, 2)$. Порядок $\pi_1(U_P - P)$ равный 6 означает, что особенность P либо дювалевская типа A_5 , либо $1/6(1, 1)$.

УСЛОВИЯ 2.3. Пусть X – поверхность дель Пеццо с логтерминальными особенностями и числом Пикара $\rho(X) = 1$. Пусть $\pi: \bar{X} \rightarrow X$ – ее минимальное разрешение, и пусть $D = \sum_{i=1}^n D_i$ – исключительный дивизор морфизма π , где D_i – неприводимые компоненты. Существует единственный эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор $D^\sharp = \sum_{i=1}^n \alpha_i D_i$ такой, что $\pi^*(K_X) \equiv D^\sharp + K_{\bar{X}}$. Он называется *дивизором кодискрепантностей*.

Будем называть взвешенный граф Γ *логтерминальным*, если он является двойственным графом какой-либо логтерминальной особенности (описание всех таких графов см. [10], [11]).

ЛЕММА 2.4. Пусть Y – неособая рациональная поверхность, D – дивизор, состоящий из всех неособых, рациональных кривых с индексом самопересечения не больше -2 . Пусть выполнены следующие условия:

- (1) $\rho(Y) = \#D + 1$;
- (2) D – дивизор с простыми, нормальными пересечениями;
- (3) двойственный граф дивизора D , является объединением логтерминальных графов.

Тогда D имеет не более пяти компонент связности.

Пусть D имеет пять компонент связности и существует неприводимая компонента D_0 дивизора D такая, что $D_0^2 \leq -3$. Тогда возможны только следующие случаи:

$$(1, 1, 1, 2, 2) \quad \text{и} \quad (1, 1, 1, 1, n), \quad n \in \mathbb{N},$$

где числа в скобках обозначают число неприводимых компонент в компонентах связности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно критерию Артина можно стянуть каждую компоненту связности дивизора D . Тогда мы получим рациональную поверхность с пятью логтерминальными особенностями. Из теоремы 2.1 и замечания 2.2 мы получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 2.5 (см. [12; лемма 1.4]). В условиях 2.3 не существует (-1) -кривой E на поверхности $\bar{X}$ такой, что после последовательного стягивания (-1) -кривых в $E + D$ двойственный граф образа $E + D$ станет несвязным объединением допустимых графов.

Так как существует натуральное n такое, что дивизор $-n(D^\sharp + K_{\bar{X}})$ является целым дивизором Картье, то существует кривая C такая, что $-C \cdot (D^\sharp + K_{\bar{X}}) = -K_X \cdot \pi(C) \in \mathbb{Q}$ достигает наименьшего положительного значения. Назовем ее минимальной кривой.

Всюду далее через C мы будем обозначать минимальную кривую.

ЛЕММА 2.6 (см., например, [12; леммы 1.5, 1.6]). В условиях 2.3 пусть $\Phi: \bar{X} \rightarrow \mathbb{P}^1$ – расслоение с общим слоем $\mathbb{P}^1$, m – число неприводимых компонент D , не лежащих в слоях Φ , и d_f – число (-1) -кривых, лежащих в слое f . Тогда

- (1) $m = 1 + \sum_f (d_f - 1)$;
- (2) если E – единственная (-1) -кривая в слое, то кратность вхождения ее в слой больше 1;
- (3) если f состоит из (-1) - и (-2) -кривых, то двойственный граф f – один из следующих:

где числа в вершинах обозначают кратность вхождения в слой, а числа рядом с вершинами – индекс самопересечения;

- (4) если существует слой f типа (a) или (b) и C – единственная (-1) -кривая в f , то любой особый слой состоит из (-1) - и (-2) -кривых, причем любая (-1) -кривая E , лежащая в особом слое, является минимальной, т.е. $-E \cdot (D^\sharp + K_{\bar{X}}) = -C \cdot (D^\sharp + K_{\bar{X}})$.

ЛЕММА 2.7. В условиях 2.3 любая кривая на поверхности $\bar{X}$ с отрицательным индексом самопересечения является либо компонентой дивизора D , либо (-1) -кривой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – кривая, не являющаяся компонентой дивизора D и имеющая отрицательный индекс самопересечения. Тогда

$$0 < -A \cdot (D^\sharp + K_{\bar{X}}) = -A \cdot D^\sharp + A^2 + 2 - 2p_\alpha(A).$$

Отсюда A – (-1) -кривая.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. Пусть (Y, D) проективная логповерхность. Будем говорить, что (Y, D) – почти логповерхность дель Пеццо, если пара (Y, D) логтерминальна по Кавамате и дивизор $-(K_Y + D)$ численно эффективен и объемен (например, $(\bar{X}, D^\sharp)$ – почти логповерхность дель Пеццо).

Заметим, что если (Y, D) – почти логповерхность дель Пеццо и $\rho(Y) = 1$, то дивизор $-(K_Y + D) = A$ обилен и Y имеет лишь логтерминальные особенности. Следовательно, $-K_Y = A + D$ обилен. Отсюда, Y – поверхность дель Пеццо.

ЛЕММА 2.9. Пусть (Y, D) – почти логповерхность дель Пеццо, $f: Y \rightarrow Y'$ – бирациональное стягивание. Тогда $(Y', D' = f_*D)$ – также почти логповерхность дель Пеццо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – кривая на Y и

$$K_Y + D = f^*K_{Y'} + f^*f_*D + \sum_{i=1}^n a_i E_i,$$

где E_i – неприводимые компоненты исключительного дивизора морфизма f . Так как дивизор $\sum_{i=1}^n E_i$ стягиваемый, то матрица $(E_i \cdot E_j)$ отрицательно определена. Отсюда $a \geq 0$. Тогда

$$0 \leq -A \cdot (K_Y + D) = -A \cdot \left(f^*K_{Y'} + f^*f_*D + \sum_{i=1}^n a_i E_i \right) \leq -f(A) \cdot (K_{Y'} + f_*D).$$

Следовательно, дивизор $-(K_{Y'} + f_*D)$ численно эффективен и пара (Y', D') логтерминальна по Кавамате. Так как дивизор $-(K_Y + D)$ объемен, то

$$(-(K_{Y'} + f_*D))^2 = \left(K_Y + D - \sum_{i=1}^n a_i E_i \right)^2 = (K_Y + D)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i E_i \right) \cdot (K_Y + D) > 0.$$

Следовательно, дивизор $-(K_{Y'} + f_*D)$ также объемен. Лемма доказана.

Теперь рассмотрим два случая:

- 1) $|C + D + K_{\bar{X}}| \neq \emptyset$;
- 2) $|C + D + K_{\bar{X}}| = \emptyset$.

3. Случай $|C + D + K_{\bar{X}}| \neq \emptyset$.

ЛЕММА 3.1 (см. [12; лемма 2.1]). Пусть выполнены условия 2.3, и пусть C – минимальная кривая. Если $|C + D + K_{\bar{X}}| \neq \emptyset$, то существует разложение $D = D' + D''$, где D' и D'' – эффективные целые дивизоры без общих компонент, такое,

что

- (1) для любой неприводимой компоненты D_i дивизора D' имеет место $C \cdot D_i = D'' \cdot D_i = K_{\bar{X}} \cdot D_i = 0$;
- (2) $C + D'' + K_{\bar{X}} \sim 0$.

ЛЕММА 3.2. Пусть выполнены условия 2.3, и пусть C – минимальная кривая. Тогда кривая C неособа, рациональна, $C \cdot D'' = C \cdot D = 2$ и имеет место один из следующих случаев:

- (1) дивизор D'' имеет одну неприводимую компоненту, $C \cap \text{Supp } D''$ – одна точка и $C \cdot D'' = 2$;
- (2) дивизор D'' состоит из двух неприводимых компонент D_0 и D_1 , при этом D_0, D_1 и C попарно пересекаются трансверсально и имеют одну общую точку;
- (3) дивизор $C + D''$ – колесо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – любая неприводимая компонента дивизора D'' . Тогда из леммы 3.1 получим

$$M \cdot (C + D'' - M + (K_{\bar{X}} + M)) = 0 \quad \Rightarrow \quad M \cdot (C + D'' - M) = 2.$$

Отсюда следует, что кривая C должна иметь пересечения с любой связной компонентой D'' (так как D'' – дерево рациональных кривых, и поэтому в любой связной компоненте D'' существует кривая D_i такая, что $D_i \cdot (D'' - D_i) = 1$). Так как $C \cdot (C + K_{\bar{X}} + D'') = 0$ и $C \cdot (C + K_{\bar{X}}) = 2p_\alpha(C) - 2$, то кривая C рациональна и неособа, откуда следует утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2 (случай $|C + D + K_{\bar{X}}| \neq \emptyset$). Теперь приступим к доказательству теоремы 1.2 в случае, когда $|C + D + K_{\bar{X}}| \neq \emptyset$. Пусть X имеет пять особых точек. Пусть E – (-1) -кривая на $\bar{X}$. Тогда

$$-C \cdot (D^\# + K_{\bar{X}}) \leq -E \cdot (D^\# + K_{\bar{X}}) = 1 - E \cdot D^\# \leq 1.$$

Следовательно,

$$C \cdot K_{\bar{X}} \geq -1 - C \cdot D^\# > -3.$$

Отсюда по формуле для рода $C \cdot (C + K_{\bar{X}}) = -2$ и $C \cdot K_{\bar{X}} \geq -2$. Из леммы 2.7 следует, что C – либо (0) -, либо (-1) -кривая. Если C – (0) -кривая, то применим в случаях (1)–(3) из леммы 3.2 соответственно одну из трех последовательностей раздутий, приведенных на рис. 1.

Если C – (-1) -кривая, то применим в случаях (1)–(3) из леммы 3.2 соответственно одну из трех последовательностей раздутий, показанных на рис. 2.

Из леммы 2.4 следует, что возможен только случай $(2, 2, 2, 2, m)$ из $(*)$, где m – натуральное число большее 1.

По формуле Нётера $K_{\bar{X}}^2 = 10 - \rho(X) = 9 - \#D$ и $C + D'' + K_{\bar{X}} \sim 0$ получаем

$$K_{\bar{X}} \cdot (C + D'' + K_{\bar{X}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad 9 + K_{\bar{X}} \cdot (C + D'') = \#D.$$

Отсюда $\#D \geq 7$ и, следовательно, $\#D'' \geq 3$.

Заметим, что из $C + D'' + K_{\bar{X}} \sim 0$ следует, что любая (-1) -кривая пересекает $C + D''$ в единственной точке. Если C – (0) -кривая, то рассмотрим расслоение

Рис. 1.

с общим слоем $\mathbb{P}^1$, определенное линейной системой $|C|$. Так как C пересекает две различные компоненты дивизора D'' , то существует (-1) -кривая E , лежащая в каком-то слое, которая пересекает единственную компоненту D' в одной точке A и пересекает D'' в точке B . Раздуем точку B , получим противоречие с леммой 2.4. Следовательно, C — (-1) -кривая.

По формуле Нётера $K_{\bar{X}}^2 = 10 - \rho(X) = 9 - \#D$ и $C + D'' + K_{\bar{X}} \sim 0$ получаем

$$K_{\bar{X}} \cdot (C + D'' + K_{\bar{X}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad 9 + K_{\bar{X}} \cdot (C + D'') = \#D.$$

Отсюда $\#D \geq 8$ и, следовательно, $\#D'' \geq 4$.

Рассмотрим три случая.

1) Пусть C пересекает две (-2) -кривые D_1 и D_2 . Рассмотрим расслоение Φ с общим слоем $\mathbb{P}^1$, определенное линейной системой $|2C + D_1 + D_2|$. Так как $\#D'' \geq 4$, то существуют ровно две неприводимые компоненты D , не лежащие в слоях Φ . Следовательно, существует (-1) -кривая E , лежащая в каком-то слое, которая пересекает единственную компоненту D' в одной точке A и пересекает D'' в точке B . Раздуем точку B и получим противоречие с леммой 2.4.

2) Пусть C пересекает две компоненты $D = D_1$ и D_2 с индексами самопересечения меньше -2 , тогда стянем C . Получившуюся поверхность обозначим $\tilde{X}$. Затем стянем $\tilde{D} = D - D_1$ в особенности. Из леммы 2.9 следует, что после стягивания,

Рис. 2.

мы получим поверхность дель Пеццо с логтерминальными особенностями, но на разрешении существует $(-n)$ -кривая D_1 , $n > 1$, не лежащая в $\tilde{D}$. Противоречие с леммой 2.7.

3) Пусть C пересекает одну (-2) -кривую D_1 и одну $(-n)$ -кривую D_2 , $n > 2$, тогда стянем C . Затем стянем дивизор $\tilde{D}$, состоящий из всех рациональных кривых с индексом самопересечения не больше -2 , в особенности. Из леммы 2.9 следует, что после стягивания, мы получим поверхность дель Пеццо с пятью логтерминальными особенностями и (-1) -кривой D_1 на разрешении. Тогда, заменяя C на D_1 , снова имеем один из трех случаев. В первых двух мы уже пришли к противоречию, поэтому имеем третий случай. Следовательно, снова можно стянуть (-1) -кривую и опять получить третий случай. Этот процесс должен оборваться, так как каждый раз число Пикара уменьшается на 1. Противоречие.

Таким образом, теорема 1.2 доказана в случае $|C + D + K_{\tilde{X}}| \neq \emptyset$.

4. Случай $|C + D + K_{\tilde{X}}| = \emptyset$.

ЛЕММА 4.1. Пусть выполнены условия 2.3, и пусть C – минимальная кривая. Тогда кривая C неособа, рациональна и $C \cdot D' \leq 1$, для любой связной компоненты D' дивизора D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что C нерациональна или особа. В этом случае $p_a(C) > 0$. Заметим, что

$$h^2(C + K_{\bar{X}}) = h^0(-C) = 0.$$

Следовательно, по теореме Римана–Роха

$$\dim |C + K_{\bar{X}}| \geq \frac{1}{2}(C + K_{\bar{X}}) \cdot C = p_a(C) - 1 \geq 0.$$

Противоречие с тем, что $|C + D + K_{\bar{X}}| = \emptyset$. Пусть существует связная компонента D' дивизора D такая, что $C \cdot D' > 1$. Тогда существует связный дивизор D'' , который состоит из неприводимых компонент D' , такой, что для любой неприводимой компоненты N дивизора $C + D''$ имеем $N \cdot (C + D'' - N) \geq 2$. Действительно, если существует неприводимая компонента D_0 дивизора D' такая, что $D_0 \cdot C \geq 2$, то в качестве D'' возьмем D_0 . Иначе существуют неприводимые компоненты F_1 и F_2 дивизора D' такие, что $F_1 \cdot C = F_2 \cdot C = 1$. Тогда существуют неприводимые компоненты $D_1, D_2, \dots, D_n$ дивизора D' такие, что

$$F_1 \cdot D_1 = D_1 \cdot D_2 = \dots = D_n \cdot F_2 = 1.$$

Следовательно, в качестве D'' можно взять $F_1 + F_2 + D_1 + \dots + D_n$. Отсюда, по теореме Римана–Роха

$$\dim |C + D'' + K_{\bar{X}}| \geq \frac{(C + D'' + K_{\bar{X}}) \cdot (C + D'')}{2} \geq 0.$$

Опять противоречие с тем, что $|C + D + K_{\bar{X}}| = \emptyset$.

ЛЕММА 4.2 (см. [12; лемма 2.3]). Пусть выполнены условия 2.3, и пусть C – минимальная кривая. Пусть $|C + D + K_{\bar{X}}| = \emptyset$ и C – (-1) -кривая, пересекающая по крайней мере три неприводимые компоненты D . Обозначим их D_0, D_1 и D_2 . Положим $G := 2C + D_0 + D_1 + D_2 + K_{\bar{X}}$.

Тогда: или $G \sim 0$, или $G \sim \Gamma$, где Γ – (-1) -кривая (при этом $C \cdot \Gamma = D_i \cdot \Gamma = 0$, $i = 0, 1, 2$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2 (случай $|C + D + K_{\bar{X}}| = \emptyset$). Теперь приступим к доказательству теоремы 1.2 в случае, когда $|C + D + K_{\bar{X}}| = \emptyset$. Пусть X имеет пять особых точек. Докажем сначала, что $C^2 \leq 0$. Предположим, что $C^2 > 0$. Пусть E – (-1) -кривая, тогда

$$-E \cdot (D^\# + K_{\bar{X}}) = 1 - E \cdot D^\# \leq 1.$$

Следовательно, так как кривая C минимальна,

$$1 \geq -C \cdot (D^\# + K_{\bar{X}}) = 2 + C^2 - C \cdot D^\# \geq 3 - C \cdot D^\#.$$

Но из неравенства теоремы 2.1 и замечания 2.2 получаем две возможности для особенностей X : либо $2A_1 + 3A'_1$, где A'_1 означает особенность типа $1/3(1, 1)$, либо $3A_1$ + две любые. Так как для любой связной компоненты D' дивизора D имеем $C \cdot D' \leq 1$, то в обоих случаях $C \cdot D^\# < 2$. Противоречие.

Предположим, что $C^2 = 0$. Рассмотрим $\Phi_{|C|}$ – расслоение с общим слоем $\mathbb{P}^1$, и пусть существует особый слой f . Тогда существуют (-1) -кривые $E_1, \dots, E_n$ в слое f с кратностями вхождения в слой $a_1, \dots, a_n$, причем $\sum_{i=1}^n a_i \geq 2$. Отсюда

$$-C \cdot (D^\sharp + K_{\bar{X}}) = f \cdot (D^\sharp + K_{\bar{X}}) = -\sum_{i=1}^n a_i E_i \cdot (D^\sharp + K_{\bar{X}}).$$

Следовательно, существует j такое, что

$$-C \cdot (D^\sharp + K_{\bar{X}}) > -E_j \cdot (D^\sharp + K_{\bar{X}}),$$

противоречие с минимальностью C . Отсюда, все слои неособые. Тогда $\bar{X} = \mathbb{F}_n$ и $D^2 = -n$, т.е. X – поверхность с одной особой точкой. Следовательно, C – (-1) -кривая.

Пусть C пересекает как минимум три компоненты D_0, D_1 и D_2 дивизора D , и $D_0^2 = D_1^2 = -2$. Пусть $S_0 = 2C + D_0 + D_1$ и $\Phi = \Phi_{|S_0|}$ – расслоение с общим слоем $\mathbb{P}^1$. Тогда по лемме 4.2 имеем следующие два случая.

1) Случай $2C + D_0 + D_1 + D_2 + K_{\bar{X}} \sim 0$. Заметим, что $D - D_2$ лежит в слоях Φ . Действительно, если $D_i \in (D - D_0 - D_1 - D_2)$, то $0 \leq D_i \cdot S_0 = D_i \cdot (-D_2 - K_{\bar{X}}) \leq 0$. Откуда

$$D_i \cdot S_0 = D_i \cdot D_2 = D_i \cdot K_{\bar{X}} = 0.$$

Это означает, что кривая D_i не пересекает S_0 и $D_i^2 = -2$. Тогда из леммы 2.6 (шп. (1) и (3)) следует, что все слои Φ должны иметь тип (а) или (б). Пусть существует слой, типа (б), и E – единственная (-1) -кривая в этом слое. Отсюда $E \cdot D_2 = E \cdot D_3 = 1$, где D_3 – неприводимая кривая в этом слое. Следовательно, можно раздуть точку пересечения E и D_3 и получить противоречие с леммой 2.4. Значит, все слои имеют тип (а) и их ровно два; тогда по формуле Нётера $K_{\bar{X}}^2 = 10 - \rho(\bar{X}) = 9 - \#D = 4$, откуда

$$K_{\bar{X}} \cdot (2C + D_0 + D_1 + D_2 + K_{\bar{X}}) = 4 - 2 + K_{\bar{X}} \cdot D_2 > 2.$$

Противоречие.

2) Случай $2C + D_0 + D_1 + D_2 + K_{\bar{X}} \sim \Gamma$. Пусть S_1 – слой Φ , содержащий Γ , тогда из леммы 2.6 (шп. (4) и (3)) следует, что S_1 состоит из (-1) - и (-2) -кривых. Но если слой S_1 имеет тип (а) или (с), то

$$2C + D_0 + D_1 + D_2 + K_{\bar{X}} = \Gamma + \Gamma' + D'_0 + \dots + D'_n + D_2 + K_{\bar{X}} \sim \Gamma.$$

Тогда, заменяя C на Γ' (возможно $\Gamma = \Gamma'$), получаем $|\Gamma' + D + K_{\bar{X}}| \neq \emptyset$. Так как все кривые в слоях Φ минимальны, возвращаемся к предыдущему случаю. Следовательно, можно считать, что слой S_1 имеет тип (б). Заметим, что $D - D_2$ лежит в слоях Φ . Действительно, пусть $D_i \in (D - D_2)$ не лежит в слоях Φ . Тогда

$$D_i \cdot \Gamma = D_i \cdot (S_0 + D_2 + K_{\bar{X}}) \geq D_i \cdot S_0 \geq 1.$$

Но

$$D_i \cdot S_0 = D_i \cdot S_1 \geq D_i \cdot 2\Gamma > D_i \cdot \Gamma.$$

Пусть $D_3 \cdot \Gamma = 1$. Тогда $D_3 \cdot D_2 = 1$. Стянем Γ , получим противоречие с леммой 2.4.

Пусть теперь C пересекает D_0 , D_1 и D_2 такие, что $D_2^2 \leq D_1^2 \leq -3$. Тогда снова возможны два случая.

1) Случай $2C + D_0 + D_1 + D_2 + K_{\bar{X}} \sim 0$. Отсюда, все D_i , $i = 0, 1, 2$, изолированы в D , и $0 \geq K_{\bar{X}}^2 = 10 - \rho(\bar{X}) = 9 - \#D$. Следовательно, $\#D \geq 9$. Но по теореме 2.1 и замечанию 2.2 имеем $\#D \leq 6$. Противоречие.

2) Случай $2C + D_0 + D_1 + D_2 + K_{\bar{X}} \sim \Gamma$. Тогда

$$-1 \geq K_{\bar{X}}^2 = 10 - \rho(\bar{X}) = 9 - \#D.$$

Отсюда $\#D \geq 10$, при этом как минимум две кривые в D имеют индекс самопересечения меньше -3 . Из теоремы 2.1 и замечания 2.2 получаем противоречие.

Пусть C пересекает одну компоненту D_0 ; тогда по лемме 2.5 имеем $D_0^2 = -2$. Стянем C , тогда образ D_0 станет (-1) -кривой. Если D_0 пересекает одну неприводимую компоненту D_1 дивизора $D - D_0$, то из леммы 2.5 следует, что $D_1^2 = -2$. Стянем D_0 . Повторяя этот процесс, мы получим рациональную поверхность с дивизором $\tilde{D}$, удовлетворяющим условиям леммы 2.4, но как минимум с шестью компонентами связности. Противоречие.

Пусть C пересекает ровно две кривые D_0 и D_1 из D . Тогда, если порядки групп $\pi_1(U_{P_1} - P_1), \dots, \pi_1(U_{P_5} - P_5)$ равны (здесь $P_1, \dots, P_5$ – особые точки):

$$\begin{array}{lll} (2, 2, 3, 3, 3), & (2, 2, 2, 3, 3), & (2, 2, 2, 3, 4), \\ (2, 2, 2, 3, 5), & (2, 2, 2, 3, 6), & (2, 2, 2, 4, 4), \end{array}$$

то одну из точек пересечения C с D_i можно раздуть (возможно несколько раз, т.е. сначала раздуть точку пересечения C и D_i , затем точку пересечения исключительного дивизора с прообразом C или D_i) и получить противоречие с леммой 2.4.

Следовательно, порядки групп $\pi_1(U_{P_1} - P_1), \dots, \pi_1(U_{P_5} - P_5)$ равны $(2, 2, 2, 2, n)$, отсюда $D_0^2 = -2$ и по лемме 4.2 имеем $D_1^2 = -2, -3$. Рассмотрим следующие два случая.

1) Случай $D_1^2 = -2$. При этом D_0 изолирована в D . Пусть e – число компонент дивизора D , пересекающих D_1 , $S_0 = 2C + D_0 + D_1$ и $\Phi = \Phi_{|S_0|}$ – расслоение с общим слоем $\mathbb{P}^1$. Тогда имеют место следующие возможности.

Пусть $e = 3$. Тогда можно раздуть точку пересечения C с D_1 и получить противоречие с леммой 2.4.

Пусть $e = 2$ и $D_2 \cdot D_1 = D_3 \cdot D_1 = 1$. Тогда $D_2 \cdot S_0 = D_3 \cdot S_0 = 1$. Так как кривая C пересекает две связные компоненты D , то остальные три лежат в слоях Φ . Все слои, в которых лежат эти три компоненты, имеют тип (с) из леммы 2.6, но по этой лемме (п. (1)) их не более одного. Противоречие.

Пусть $e = 1$ и $D_2 \cdot D_1 = 1$. Отсюда $D_2 \cdot S_0 = 1$. Отсюда и из леммы 2.6 получаем, что все слои имеют тип (а) или (б) из леммы 2.6, но тогда их не менее четырех, следовательно, D_2 имеет как минимум четыре пересечения с $D - D_2$. Противоречие.

Случай $e = 0$ невозможен в силу леммы 2.6 (п. (1)).

2) Случай $D_1^2 = -3$. При этом D_0 изолирована в D . Стянем $C + D_0$, тогда образ D_1 станет (-1) -кривой. Из леммы 2.5 следует, что существует дивизор R (возможно $R = 0$), состоящий из (-2) -кривых, такой, что после стягивания $D_1 + R$, затем стягивания дивизора, состоящего из всех рациональных кривых с индексом

самопересечения не больше -2 . Мы получим рациональную поверхность с логтерминальными особенностями. Из леммы 2.9 следует, что эта поверхность является поверхностью дель Пеццо как минимум с пятью логтерминальными особенностями, но с меньшим числом компонент исключительного дивизора. Повторяя для нее то же рассуждение, мы снова придем к поверхности дель Пеццо с пятью логтерминальными особенностями и с меньшим числом компонент исключительного дивизора. Этот процесс должен оборваться. Противоречие.

Таким образом, теорема 1.2 полностью доказана.

Автор благодарит за постановку задачи и полезные обсуждения В. А. Исковских и Ю. Г. Прохорова.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Y. Kawamata, K. Matsuda, J. Matsuki, “Introduction to the minimal model program”, *Algebraic Geometry*, Adv. Stud. Pure Math., **10**, North-Holland, Amsterdam, 1987, 283–360.
- [2] M. Furushima, “Singular del Pezzo surfaces and analytic compactifications of 3-dimensional complex affine space C^3 ”, *Nagoya Math. J.*, **104** (1986), 1–28.
- [3] M. Miyanishi, D.-Q. Zhang, “Gorenstein log del Pezzo surfaces of rank one”, *J. Algebra*, **118**:1 (1988), 63–84.
- [4] H. Kojima, “Logarithmic del Pezzo surfaces of rank one with unique singular points”, *Japan. J. Math. (N.S.)*, **25**:2 (1999), 343–375.
- [5] В. А. Алексеев, В. В. Никулин, “Классификация поверхностей дель Пеццо с лог-терминальными особенностями индекса ≤ 2 , инволюции на поверхностях КЗ и группы отражений в пространствах Лобачевского”, *Доклады по математике и ее приложениям*, т. 2, вып. 2, Матем. ин-т им. В. А. Стеклова АН СССР, Москва–Тула, 1988, 51–150.
- [6] S. Keel, J. McKernan, *Rational Curves on Quasi-projective Surfaces*, Mem. Amer. Math. Soc., **140**, 669, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [7] J. Kollar, *Is there a topological Bogomolov–Miyaoka–Yau inequality?*, [arXiv:math/0602562](https://arxiv.org/abs/math/0602562).
- [8] Y. Kawamata, “Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces”, *Ann. of Math. (2)*, **127**:1 (1988), 93–163.
- [9] D.-Q. Zhang, “Logarithmic del Pezzo surfaces one with rational double and triple singular points”, *Tohoku Math. J. (2)*, **41**:3 (1989), 399–452.
- [10] E. Brieskorn, “Rationale Singularitäten komplexer Flächen”, *Invent. Math.*, **4**:5 (1968), 336–358.
- [11] А. И. Илиев, “Лог-терминальные особенности алгебраических поверхностей”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1986, № 3, 38–44.
- [12] D.-Q. Zhang, “Logarithmic del Pezzo surfaces of rank one with contractible boundaries”, *Osaka J. Math.*, **25**:2 (1988), 461–497.

Г. Н. Белоусов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

10.10.2006