Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Платонов, Аналог теоремы Уиттекера–Котельникова–Шеннона с точки зрения анализа Фурье–Бесселя, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 2, 264–272

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3835>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 18:32:16

УДК 517.5

Аналог теоремы

Уиттекера–Котельникова–Шеннона

с точки зрения анализа Фурье–Бесселя

С. С. Платонов

В работе получен аналог теоремы Уиттекера–Котельникова–Шеннона на основе гармонического анализа Фурье–Бесселя. Построена новая интерполяционная формула для одного класса целых функций экспоненциального типа, в которой вместо обычных сдвигов используются обобщенные сдвиги Бесселя.

Библиография: 13 названий.

1. Введение и формулировка основных результатов. В классической теореме Уиттекера–Котельникова–Шеннона приводится формула для восстановления функции с ограниченным спектром по ее значениям на дискретном множестве точек. Приведем точную формулировку этой теоремы. Пусть $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$, $\hat{f}(\lambda)$ – ее преобразование Фурье, $\lambda \in \mathbb{R}$. Для любой функции $g(x)$ будем обозначать через $\text{supp } g$ носитель функции g .

ТЕОРЕМА 1.1 (Уиттекер, Котельников, Шеннон). Если $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ и $\text{supp } \hat{f} \subset [-\sigma, \sigma]$, $\sigma > 0$, то справедлива формула

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{\pi n}{\sigma}\right) \text{sinc}(\sigma x - \pi n), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

где $\text{sinc } x := (\sin x)/x$.

По теореме Пэли–Винера (см. [1]) условия $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ и $\text{supp } \hat{f} \subset [-\sigma, \sigma]$ равносильны тому, что функция $f(x)$ принадлежит классу Винера W_σ , т.е. $f(x)$ – целая функция экспоненциального типа σ и $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$. Поэтому формулу (1.1) можно рассматривать как интерполяционную формулу для функций из класса W_σ .

Обобщение теоремы 1.1 на произвольные локально-компактные абелевы группы получено Тихомировым [2]. В настоящей работе получен аналог теоремы Уиттекера–Котельникова–Шеннона на основе гармонического анализа Фурье–Бесселя. Построена новая интерполяционная формула для одного класса целых функций экспоненциального типа, в которой вместо обычных сдвигов используются обобщенные сдвиги Бесселя.

Мы будем рассматривать функции на полупрямой $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ (все функции предполагаются комплекснозначными), но при этом удобно считать, что функции по четности продолжены на всю прямую $\mathbb{R}$.

Пусть $C(\mathbb{R}_+)$ – множество всех четных непрерывных функций на $\mathbb{R}$, $C^{(k)}(\mathbb{R}_+)$ – множество четных k раз непрерывно-дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$. Всюду далее α – действительное число, удовлетворяющее условию $\alpha > -1/2$. Для любого $1 \leq p < \infty$ через $L_{p,\alpha}$ обозначим банахово пространство, состоящее из измеримых функций $f(x)$ на $\mathbb{R}_+$ (функции рассматриваются с точностью до значений на множестве меры нуль), для которых конечна норма

$$\|f\|_{p,\alpha} := \left(\int_0^\infty |f(x)|^p x^{2\alpha+1} dx \right)^{1/p}.$$

При $p = \infty$ обозначим через $L_{\infty,\alpha}$ множество всех функций $f(x)$, которые непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}_+$. Норма в пространстве $L_{\infty,\alpha}$ определяется по формуле

$$\|f\|_{\infty,\alpha} = \|f\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)|.$$

Пусть

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_x := \frac{d^2}{dx^2} + \frac{(2\alpha+1)}{x} \frac{d}{dx}$$

– дифференциальный оператор Бесселя. Обозначим через $j_\alpha(x)$ нормированную функцию Бесселя первого рода, т.е.

$$j_\alpha(x) = \begin{cases} 2^\alpha \Gamma(\alpha+1) x^{-\alpha} J_\alpha(x) & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

где $J_\alpha(x)$ – функция Бесселя первого рода, $\Gamma(x)$ – гамма-функция (см. [3]). Функция $y = j_\alpha(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\mathcal{B}y + y = 0$ с начальными условиями $y(0) = 1$ и $y'(0) = 0$. Функция $j_\alpha(x)$ четная бесконечно дифференцируемая (и даже целая аналитическая), и $|j_\alpha(x)| \leq 1$ для $x \in \mathbb{R}$.

Следуя Левитану [3], для любой функции $f(x) \in C^{(2)}(\mathbb{R}_+)$ оператор обобщенного сдвига Бесселя $T^y f(x) = u(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}_+$, определим как решение следующей задачи Коши:

$$\mathcal{B}_x u(x, y) = \mathcal{B}_y u(x, y), \quad (1.3)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad (1.4)$$

где $\mathcal{B}_x$ и $\mathcal{B}_y$ – дифференциальные операторы Бесселя, примененные по переменным x и y соответственно. Решение задачи Коши (1.3), (1.4) может быть выписано и в явном виде:

$$T^y f(x) = u(x, y) = c_\alpha \int_0^\pi f(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi}) (\sin \varphi)^{2\alpha} d\varphi, \quad (1.5)$$

где

$$c_\alpha = \left(\int_0^\pi (\sin \varphi)^{2\alpha} d\varphi \right)^{-1} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha+1/2)}. \quad (1.6)$$

По формуле (1.5) оператор T^y распространяется на все функции $f(x) \in L_{p,\alpha}$. Отметим также, что если $f(x) \in L_{p,\alpha}$, то $\|T^y f\|_{p,\alpha} \leq \|f\|_{p,\alpha}$ (см. далее лемму 2.1), так что оператор T^y является линейным непрерывным оператором в банаховом пространстве $L_{p,\alpha}$.

Пусть $\sigma > 0$. Обозначим через $\mathfrak{M}(\sigma, p, \alpha)$ множество всех функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующему условию:

- 1) $f(x)$ – четная целая функция экспоненциального типа σ ;
- 2) $f(x)$ принадлежит классу $L_{p, \alpha}$.

Различные свойства функций из класса $\mathfrak{M}(\sigma, p, \alpha)$ (в том числе аналоги неравенств Бернштейна и Никольского) рассмотрены в [4].

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots$ – последовательность всех неотрицательных нулей функции $j'_\alpha(x)$ (где $j'_\alpha(x) = (dj_\alpha/dx)(x)$). Для любой функции $f(x) \in \mathfrak{M}(\sigma, 2, \alpha)$ справедлива формула

$$f(x) = (2\alpha + 2)f(0)j_{\alpha+1}(\sigma x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(j_\alpha(s_n))^2} f\left(\frac{s_n}{\sigma}\right) (T^{s_n} j_{\alpha+1})(\sigma x), \quad (1.7)$$

причем ряд (1.7) сходится как по норме пространства $L_{2, \alpha}$, так и равномерно на $\mathbb{R}_+$.

Формула (1.7) является аналогом формулы (1.1) Уиттекера–Котельникова–Шеннона, и ее доказательство является основной целью настоящей работы.

Отметим еще предельный случай формулы (1.7), когда $\alpha \rightarrow -1/2$. При $\alpha = -1/2$ оператор Бесселя принимает вид $\mathcal{B} = d^2/dx^2$, обобщенный сдвиг Бесселя принимает вид

$$T^y f(x) = \frac{1}{2}(f(x+y) + f(x-y)),$$

$j_{-1/2}(x) = \cos x$ и $j_{1/2}(x) = (\sin x)/x = \text{sinc } x$, $s_n = \pi n$. Класс $\mathfrak{M}(\sigma, 2, -1/2)$ совпадает с множеством четных функций из класса Винера W_σ . Тогда формула (1.7) принимает вид

$$f(x) = f(0) \text{sinc}(\sigma x) + \sum_{n=1}^{\infty} 2f\left(\frac{\pi n}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{2}(\text{sinc}(\sigma x - \pi n) + \text{sinc}(\sigma x + \pi n)),$$

что совпадает с формулой (1.1) для четных функций. Поэтому, при $\alpha \rightarrow -1/2$ формула (1.7) переходит в классическую формулу Уиттекера–Котельникова–Шеннона.

2. Доказательство теоремы 1.2. Приведем необходимые для дальнейшего сведения о преобразованиях Бесселя и обобщенных сдвигах Бесселя (см. [3], [5], [6]).

Преобразованием Бесселя называется следующее интегральное преобразование:

$$\mathcal{F}: f(x) \mapsto \hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(x) j_\alpha(\lambda x) x^{2\alpha+1} dx, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (2.1)$$

Обратное преобразование Бесселя задается формулой

$$\mathcal{F}^{-1}: g(\lambda) \mapsto \tilde{g}(x) = (2^\alpha \Gamma(\alpha + 1))^{-2} \int_0^\infty g(\lambda) j_\alpha(\lambda x) \lambda^{2\alpha+1} d\lambda, \quad (2.2)$$

т.е. $\mathcal{F}^{-1} = (2^\alpha \Gamma(\alpha + 1))^{-2} \mathcal{F}$. Преобразования Бесселя часто называют также преобразованиями Ганкеля. Отметим, что в литературе часто используется другая форма преобразований Ганкеля, в которой вместо функции $j_\alpha(x)$ используется функция

$J_\alpha(x)$ (см. [7], [8]), но всегда легко можно перейти к преобразованиям (2.1) и (2.2) и все формулы переписать в терминах этих преобразований. Всюду далее через $\widehat{f}(\lambda)$ обозначается преобразование Бесселя функции $f(x)$.

Пусть $\mathcal{S}$ – пространство основных функций, т.е. множество всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, убывающих вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Обычным образом пространство $\mathcal{S}$ снабжается топологией и становится локально-выпуклым пространством (см. [9] или [10]). Через $\mathcal{S}_+$ обозначим подпространство в $\mathcal{S}$, состоящее из четных функций. Подпространство $\mathcal{S}_+$ снабжается индуцированной из пространства $\mathcal{S}$ топологией. Известно (см. [11]), что прямое и обратное преобразования Бесселя являются взаимно обратными автоморфизмами пространства $\mathcal{S}_+$. Для преобразования Бесселя справедливо равенство Парсеваля ($f(x), g(x) \in \mathcal{S}_+$):

$$\int_0^\infty \widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda)\lambda^{2\alpha+1} d\lambda = A^2 \int_0^\infty f(x)g(x)x^{2\alpha+1} dx, \quad (2.3)$$

где

$$A = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1). \quad (2.4)$$

Из равенства (2.3) следует, что

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{2,\alpha} = A\|f\|_{2,\alpha}, \quad (2.5)$$

а из (2.5) вытекает, что преобразования Бесселя можно продолжить по непрерывности с плотного подмножества $\mathcal{S}_+ \subset L_{2,\alpha}$ на все пространство $L_{2,\alpha}$. Продолженные отображения будем также называть преобразованиями Бесселя и обозначать $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$. Преобразования $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{-1}$ являются взаимно обратными автоморфизмами гильбертова пространства $L_{2,\alpha}$, и для них остаются справедливыми формулы (2.3) и (2.5).

Для функции $f \in C^{(2)}(\mathbb{R}_+)$ обобщенный сдвиг Бесселя $T^y f(x)$ определяется соотношениями (1.3), (1.4) и задается формулой (1.5). Если функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}_+$ или $f(x) \in L_{p,\alpha}$, то будем считать, что обобщенный сдвиг Бесселя $T^y f(x)$ определяется по формуле (1.5). Известно следующее свойство самосопряженности обобщенного сдвига Бесселя (см. [3]): *если $f(x)$ – непрерывная функция из класса $L_{1,\alpha}$ и $g(x)$ – непрерывная и ограниченная функция на $\mathbb{R}_+$, то*

$$\int_0^\infty (T^y f(x))g(x)x^{2\alpha+1} dx = \int_0^\infty f(x)(T^y g(x))x^{2\alpha+1} dx. \quad (2.6)$$

ЛЕММА 2.1. *Для любой функции $f(x) \in L_{p,\alpha}$, $1 \leq p \leq \infty$, справедливо неравенство*

$$\|T^y f\|_{p,\alpha} \leq \|f\|_{p,\alpha}. \quad (2.7)$$

В частности, оператор T^y является линейным непрерывным оператором в банаховом пространстве $L_{p,\alpha}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p = \infty$ неравенство (2.7) очевидно. Пусть $1 \leq p < \infty$. Проверим, что

$$|T^y f(x)|^p \leq T^y(|f(x)|^p) \quad (2.8)$$

для любой непрерывной функции $f(x)$. Для этого на отрезке $[0, \pi]$ введем вероятностную меру $dm(\varphi) = c_\alpha (\sin \varphi)^{2\alpha} d\varphi$, где c_α – коэффициент из формулы (1.5). Далее, используя формулу (1.5) и неравенство Гёльдера, получим, что

$$\begin{aligned} |T^y f(x)| &= \left| \int_0^\pi f(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi}) \cdot 1 \, dm(\varphi) \right| \\ &\leq \left(\int_0^\pi |f(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi})|^p \, dm(\varphi) \right)^{1/p} \left(\int_0^\pi dm(\varphi) \right)^{1/q} \\ &= (T^y(|f(x)|^p))^{1/p}, \end{aligned}$$

где $1/p + 1/q = 1$. Из последнего неравенства вытекает неравенство (2.8).

Проверим, что неравенство (2.7) выполняется при $f \in \mathcal{S}_+$. Действительно, используя (2.8) и (2.6), получим, что

$$\begin{aligned} \|T^y f\|_{p,\alpha}^p &= \int_0^\infty |T^y f(x)|^p x^{2\alpha+1} \, dx \leq \int_0^\infty T^y(|f(x)|^p) \cdot 1 x^{2\alpha+1} \, dx \\ &= \int_0^\infty |f(x)|^p (T^y 1) x^{2\alpha+1} \, dx = \int_0^\infty |f(x)|^p x^{2\alpha+1} \, dx = \|f\|_{p,\alpha}^p, \end{aligned}$$

откуда вытекает (2.7). При этом было использовано очевидное равенство $T^y 1 = 1$.

Так как $\mathcal{S}_+$ является плотным подмножеством в банаховом пространстве $L_{p,\alpha}$ при $1 \leq p < \infty$, то оператор T^y продолжается по непрерывности с $\mathcal{S}_+$ до ограниченного оператора T^y в банаховом пространстве $L_{p,\alpha}$ и неравенство (2.7) остается справедливым для любой функции $f \in L_{p,\alpha}$.

Для любого числа $a > 0$ пусть $\Gamma^a: f(x) \mapsto f(ax)$ – оператор сжатия. Используя формулу (1.5), легко проверить, что выполняется равенство

$$T^y \Gamma^a = \Gamma^a T^{ay} \quad \forall a, y > 0,$$

т.е.

$$T^y(f(ax)) = (T^{ay}f)(ax). \quad (2.9)$$

Аналог теоремы Пэли–Винера для преобразования Бесселя получен Ахиезером в [12]. Используя терминологию и обозначения настоящей статьи, эту теорему можно сформулировать в следующем виде.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $f(x) \in L_{2,\alpha}$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $f(x) \in \mathfrak{M}(\sigma, 2, \alpha)$;
- 2) $\hat{f}(\lambda) = 0$ при $\lambda > \sigma$, где $\hat{f}(\lambda)$ – преобразование Бесселя функции $f(x)$.

Отметим, что существуют и другие теоремы типа Пэли–Винера для преобразования Бесселя (см., например, [5]), но они нам не понадобятся для дальнейшего.

Преобразование Бесселя и обобщенные сдвиги Бесселя связаны между собой соотношением (см., например, [11]):

$$\mathcal{J}(T^h f)(\lambda) = j_\alpha(h\lambda) \hat{f}(\lambda) \quad f \in L_{2,\alpha}, \quad h \geq 0. \quad (2.10)$$

Приведем некоторые формулы из теории функций Бесселя, переписанные в терминах функции $j_\alpha(x)$ (см. [13; 8.472, 6.561(5)], [7; § 5.11 (11)]):

$$\frac{dj_\alpha}{dx}(x) = -\frac{xj_{\alpha+1}(x)}{(2\alpha+2)}, \quad (2.11)$$

$$\int_0^a j_\alpha(tx)t^{2\alpha+1} dt = a^{2\alpha+2}j_{\alpha+1}(ax), \quad a > 0, \quad (2.12)$$

$$\int_0^a (j_\alpha(x))^2 x^{2\alpha+1} dx = \frac{1}{2}a^{2\alpha+2} \left((j'_\alpha(a))^2 + \frac{2\alpha}{a}j'_\alpha(a)j_\alpha(a) + (j_\alpha(a))^2 \right). \quad (2.13)$$

Рассмотрим гильбертово пространство

$$H := L_2([0, \sigma], d\mu),$$

где $d\mu(x) = x^{2\alpha+1} dx$ – мера на $[0, \sigma]$. Из теоремы 2.1 вытекает, что преобразование Бесселя является изоморфизмом пространства $\mathfrak{M}(\sigma, 2, \alpha)$ на пространство H . Пусть $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots$ – последовательность всех неотрицательных нулей функции $j'_\alpha(x)$.

ЛЕММА 2.2. *Функции $j_\alpha(s_k/(\sigma x))$, $k = 0, 1, 2, \dots$, образуют полную ортогональную систему в гильбертовом пространстве H .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем еще одно гильбертово пространство

$$H' := L_2([0, 1], x dx).$$

Легко видеть, что отображение

$$\Lambda: f(x) \mapsto F(x) = \sigma^{\alpha+1}x^\alpha f(\sigma x)$$

является изоморфизмом гильбертова пространства H на гильбертово пространство H' . Из (1.2) вытекает, что

$$\Lambda\left(j_\alpha\left(\frac{s}{\sigma}x\right)\right) = \begin{cases} \sigma^{\alpha+1}2^\alpha\Gamma(\alpha+1)s^{-\alpha}J_\alpha(sx) & \text{при } s \neq 0, \\ \sigma^{2\alpha+1}x^\alpha & \text{при } s = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Отметим также, что условие $j'_\alpha(x) = 0$ можно переписать в эквивалентной форме (при $x \neq 0$):

$$xJ'_\alpha(x) - \alpha J_\alpha(x) = 0. \quad (2.15)$$

Поэтому, при $k > 0$ числа s_k совпадают с положительными корнями уравнения (2.15). То, что функции $J_\alpha(s_k x)$, где s_k – положительные корни уравнения (2.15), вместе с функцией x^α образуют полную ортогональную систему в гильбертовом пространстве H' , является одним из классических результатов из теории функций Бесселя. Разложение в ряд по этим функциям является одним из частных случаев разложения в ряд Дини по функциям Бесселя (см. [7; гл. 18]). Так как Λ является изоморфизмом гильбертовых пространств, то из (2.14) вытекает, что функции $j_\alpha(s_k/(\sigma x))$, $k = 0, 1, 2, \dots$, образуют полную ортогональную систему в гильбертовом пространстве H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Пусть $f(x) \in \mathfrak{M}(\sigma, 2, \alpha)$, $\widehat{f}(\lambda)$ – ее преобразование Бесселя. По теореме 2.1 $\widehat{f}(\lambda) = 0$ при $\lambda > \sigma$, поэтому можно считать, что $\widehat{f} \in L_2([0, \sigma], d\mu) = H$. Так как функции $j_\alpha(s_k/(\sigma x))$, $k = 0, 1, 2, \dots$, образуют полную ортогональную систему в гильбертовом пространстве H (см. лемму 2.2), то функцию $\widehat{f}(\lambda)$ можно разложить в ряд

$$\widehat{f}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k j_\alpha\left(\frac{s_k}{\sigma} \lambda\right), \quad \lambda \in [0, \sigma], \quad (2.16)$$

где

$$c_k = \left\| j_\alpha\left(\frac{s_k}{\sigma} \lambda\right) \right\|^{-2} \int_0^\sigma \widehat{f}(\lambda) j_\alpha\left(\frac{s_k}{\sigma} \lambda\right) \lambda^{2\alpha+1} d\lambda, \quad (2.17)$$

$$\left\| j_\alpha\left(\frac{s_k}{\sigma} \lambda\right) \right\|^2 := \int_0^\sigma \left(j_\alpha\left(\frac{s_k}{\sigma} \lambda\right) \right)^2 \lambda^{2\alpha+1} d\lambda. \quad (2.18)$$

Пусть $\chi_{[0, \sigma]}(x)$ – характеристическая функция отрезка $[0, \sigma]$, т.е.

$$\chi_{[0, \sigma]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0, \sigma], \\ 0 & \text{при } x > \sigma. \end{cases}$$

Тогда (2.16) можно переписать в виде

$$\widehat{f}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k j_\alpha\left(\frac{s_k}{\sigma} \lambda\right) \chi_{[0, \sigma]}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad (2.19)$$

причем ряд (2.19) сходится в пространстве $L_{2, \alpha}$.

Применяя к (2.19) обратное преобразование Бесселя $\mathcal{F}^{-1}$, получим

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathcal{F}^{-1}\left(j_\alpha\left(\frac{s_k}{\sigma} \lambda\right) \chi_{[0, \sigma]}(\lambda)\right). \quad (2.20)$$

Так как $\mathcal{F}^{-1}$ – непрерывный оператор в $L_{2, \alpha}$, то ряд (2.20) сходится в пространстве $L_{2, \alpha}$.

Из определения $\mathcal{F}^{-1}$ (см. (2.2)) и из формулы (2.12) следует, что

$$\mathcal{F}^{-1}(\chi_{[0, \sigma]}(\lambda)) = (2^\alpha \Gamma(\alpha + 1))^{-2} \sigma^{2\alpha+2} j_{\alpha+1}(\sigma x). \quad (2.21)$$

Из (2.21), используя свойство (2.10) и равенство (2.9), получим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left(j_\alpha\left(\frac{s_k}{\sigma} \lambda\right) \chi_{[0, \sigma]}(\lambda)\right) &= (2^\alpha \Gamma(\alpha + 1))^{-2} \sigma^{2\alpha+2} (T^{s_k/\sigma}(j_{\alpha+1}(\sigma x))) \\ &= (2^\alpha \Gamma(\alpha + 1))^{-2} \sigma^{2\alpha+2} (T^{s_k} j_{\alpha+1})(\sigma x). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Вычислим коэффициенты c_k в формуле (2.20) (см. (2.17), (2.18)). Так как $\widehat{f}(\lambda) = 0$ при $\lambda > \sigma$, то из определения обратного преобразования Бесселя вытекает, что

$$\int_0^\sigma \widehat{f}(\lambda) j_\alpha\left(\frac{s_k}{\sigma} \lambda\right) \lambda^{2\alpha+1} d\lambda = (2^\alpha \Gamma(\alpha + 1))^2 f\left(\frac{s_k}{\sigma}\right). \quad (2.23)$$

Пусть $k \neq 0$. Используя формулу (2.13), получим

$$\begin{aligned} \left\| j_{\alpha} \left(\frac{s_k}{\sigma} \lambda \right) \right\|^2 &= \int_0^{\sigma} \left(j_{\alpha} \left(\frac{s_k}{\sigma} \lambda \right) \right)^2 \lambda^{2\alpha+1} d\lambda = \left(\frac{\sigma}{s_k} \right)^{2\alpha+2} \int_0^{s_k} (j_{\alpha}(\lambda))^2 \lambda^{2\alpha+1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2} \sigma^{2\alpha+2} \left((j'_{\alpha}(s_k))^2 + \frac{2\alpha}{s_k} j'_{\alpha}(s_k) j_{\alpha}(s_k) + (j_{\alpha}(s_k))^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sigma^{2\alpha+2} (j_{\alpha}(s_k))^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

При этом использовано, что $j'_{\alpha}(s_k) = 0$. Из (2.17), (2.18), (2.23) и (2.24) следует, что

$$c_k = \frac{(2^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1))^2}{\sigma^{2\alpha+2}} f \left(\frac{s_k}{\sigma} \right) (j_{\alpha}(s_k))^{-2} \quad (2.25)$$

при $k \neq 0$. При $k = 0$ (тогда $s_0 = 0$) имеем

$$\left\| j_{\alpha} \left(\frac{s_0}{\sigma} \lambda \right) \right\|^2 = \|1\|^2 = \int_0^{\sigma} \lambda^{2\alpha+1} d\lambda = \frac{\sigma^{2\alpha+2}}{(2\alpha+2)},$$

откуда

$$c_0 = \frac{(2\alpha+2)}{\sigma^{2\alpha+2}} f(0). \quad (2.26)$$

Окончательно, из (2.20), (2.21), (2.25) и (2.26) вытекает формула (1.7), причем ряд сходится по норме пространства $L_{2,\alpha}$.

Докажем, что ряд в (1.7) сходится также и равномерно на $\mathbb{R}_+$. Заметим, что функция $j_{\alpha+1}(x)$ является целой функцией экспоненциального типа 1. Это вытекает, например, из интегрального представления этой функции (см. [13; 8.411(8)]):

$$j_{\alpha+1}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha+3/2)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\alpha+1/2} \cos(xt) dt.$$

Поэтому функция $j_{\alpha+1}(\sigma x)$ является целой функцией экспоненциального типа σ и все слагаемые в правой части формулы (1.7) принадлежат пространству $\mathfrak{M}(\sigma, 2, \alpha)$.

Пусть $S_k(x)$ – частичная сумма ряда из правой части формулы (1.7). Тогда имеем $f(x) - S_k(x) \in \mathfrak{M}(\sigma, 2, \alpha)$ и $\|f - S_k\|_{2,\alpha} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Для функций из классов $\mathfrak{M}(\sigma, p, \alpha)$ справедлив аналог неравенства разных метрик Никольского (см. [4]), из которого следует, что

$$\|f - S_k\|_{\infty} \leq c \sigma^{\alpha+1} \|f - S_k\|_{2,\alpha}, \quad (2.27)$$

где c – некоторая постоянная. Из (2.27) вытекает, что частичные суммы $S_k(x)$ равномерно на $\mathbb{R}_+$ сходятся к $f(x)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Винер, Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной области*, Наука, М., 1964.
- [2] В. М. Тихомиров, “Гармоники и сплайны как оптимальные средства приближения и восстановления”, *УМН*, **50:2** (1995), 125–174.
- [3] Б. М. Левитан, “Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье”, *УМН*, **6:2** (1951), 102–143.

- [4] С. С. Платонов, “Аналоги неравенств Бернштейна и Никольского для одного класса целых функций экспоненциального типа”, *Докл. РАН*, **398**:2 (2004), 168–171.
- [5] И. А. Киприянов, *Сингулярные эллиптические краевые задачи*, Физматлит, М., 1997.
- [6] K. Trimèche, *Generalized Harmonic Analysis and Wavelet Packets*, Gordon and Breach Sci. Publ., Amsterdam, 2001.
- [7] Дж. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, ИЛ, М., 1949.
- [8] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований*, т. 2, Наука, М., 1970.
- [9] В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1979.
- [10] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1977.
- [11] Я. И. Житомирский, “Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя”, *Матем. сб.*, **36**:2 (1955), 299–310.
- [12] Н. И. Ахиезер, “К теории спаренных интегральных уравнений”, *Ученые записки Харьковского гос. ун-та*, **80** (1957), 5–21.
- [13] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, М., 1971.

С. С. Платонов

Петрозаводский государственный университет

E-mail: platonov@psu.karelia.ru

Поступило

06.06.2006

Исправленный вариант

08.02.2007