Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко,
С. А. Шабров, О нерегулярном расширении осцилляци-
онной теории спектральной задачи Штурма–Лиувилля,
Матем. заметки, 2007, том 82, выпуск 4, 578–582

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3838>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 13:11:12

УДК 517.927

О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма–Лиувилля

Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров

В работе описываются осцилляционные спектральные свойства (число нулей, их перемежаемость для собственных функций, простота спектра и др.) для задачи Штурма–Лиувилля с обобщенными коэффициентами.

Библиография: 2 названия.

На множестве E абсолютно непрерывных на $[0, l]$ функций с производными из $BV[0, l]$ рассматривается уравнение

$$-\int_0^x d(pu') + \int_0^x u dQ = \lambda \int_0^x u dM, \quad (1)$$

где $p(\cdot) \gg 0$, $p \in BV[0, l]$, функция $Q(\cdot)$ не убывает, а $M(\cdot)$ строго возрастает на $[0, l]$. Интегралы понимаются по Стильтесу. Если p , Q , M достаточно гладкие, то уравнение (1) адекватно обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-(pu')' + qu = \lambda mu$$

при $q = Q'$, $m = M'$.

Оказывается, что при обычных условиях

$$u(0) = u(l) = 0 \quad (2)$$

задача (1), (2) обладает дискретным строго положительным простым спектром $(0 <) \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$, а соответствующие собственные функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$ имеют перемежающиеся нули, причем φ_k имеет внутри $(0, l)$ точно k нулей-узлов.

Мы существенно опираемся на возможность адекватного описания уравнения (1) в виде

$$-d(pu') + u dQ = \lambda u dM, \quad (3)$$

где символ dg при $g \in BV[0, l]$ нами точно описывается, позволяет рассматривать дифференциальное неравенство

$$-d(pu') + u dQ \geq 0, \quad (4)$$

изучая распределение нулей его решений, как и для более сложного неравенства

$$v_0(x)[-d(pu') + u dQ] \geq 0 \quad (5)$$

со знакопеременной $v_0(x)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00049).

1. Опираясь на генезис понятия дифференциала, определяющего интеграл Стильтьеса, мы понимаем под dg при $g(\cdot) \in BV[0, l]$ линейный функционал $l(u)$ из $C^*[0, l]$, определяемый равенством

$$l(u) = \int_0^l u dg.$$

Символ dg мы называем *дифференциалом Стильтьеса*. Линейность по g этого дифференциала dg очевидна. Равенство $dg = 0$ означает (аналогично лемме Дюбуа–Реймона), что $g \equiv \text{const}$; неравенство $dg \geq 0$ означает, что dg есть положительный функционал на множестве (конусе) неотрицательных функций, что эквивалентно неубыванию $g(x)$.

Теорема о преобразовании меры означает, что для любой непрерывной $u(x)$ существует $h \in BV$ такая, что $u dg = dh$. Поэтому для $g(x)$ из $C^1[0, l]$ дифференциал dg адекватен $g'dx$.

Язык дифференциалов делает записи для левых частей (3)–(5) внешне более внятными, чем все слагаемые в (1). Однако это впечатление чисто ассоциативное, помогающее проще улавливать аналогию между результатами для уравнения (1) и классическими фактами для теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В отличие от (1), все слагаемые в (3)–(5) – функционалы, т.е. абстрактные элементы, не имеющие никакого поточечного содержания на $[0, l]$, что их отличает от дифференциальных уравнений. Напротив, уравнение (1) поточечное.

2. Присутствие в (1) интеграла Стильтьеса означает возможность появления (в отличие от ОДУ) особенностей, порожденных скачками p , Q , M . Если $S(E)$ – совокупность точек, где p , Q , M могут иметь разрывы, то в каждой из таких точек уравнение (1) как бы раздваивается, приобретая разный смысл при $x = \xi - 0$ и $x = \xi + 0$ (если $\xi \in S(E)$). Хуже того, что понимать под $u'(\xi - 0)$ – то ли левую производную $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (u(\xi) - u(\xi - \varepsilon))\varepsilon$, то ли левый предел $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} u'(\xi - \varepsilon)$. Аналогичный вопрос возникает и о символе интеграла $\int_0^{\xi-0}$ – то ли это несобственный интеграл, то ли интеграл по полуинтервалу $[0, \xi)$. Эти недоразумения снимает

ТЕОРЕМА 1. *Для любой функции $u(x) \in E$ и любой точки $\xi > 0$ оба названные значения слева совпадают. То же верно и справа для любой $\xi < l$, а также для интегралов.*

Напомним, что через E мы обозначаем множество абсолютно непрерывных на $[0, l]$ функций, производные которых имеют ограниченную вариацию на $[0, l]$.

3. Введем помимо (1) неоднородное уравнение

$$-\int_0^x d(pu') + \int_0^x u dQ = \int_0^x dF \quad (6)$$

и соответствующий ему аналог в дифференциалах

$$-d(pu') + u dQ = dF, \quad (7)$$

где F – функция ограниченной вариации. Если F не убывает, последнее уравнение эквивалентно неравенству $-d(pu') + u dQ \geq 0$.

Для обоих этих уравнений при $\xi \in S(E)$ (когда ξ – точка разрыва одной из функций p , Q , F), приходится говорить о двух задачах Коши – левой и правой, задавая заранее помимо $u(\xi)$ или левую производную $u'(\xi - 0)$ или правую $u'(\xi + 0)$.

ТЕОРЕМА 2. *Каждая из односторонних задач Коши однозначно разрешима на $[0, l]$.*

4. Для квазидифференциального выражения

$$Du = -d(pu') + u dQ$$

справедливо “разложение на множители” Пойа–Мамманы.

ТЕОРЕМА 3. *Если $dQ \geq 0$, т.е. Q не убывает, то существуют строго положительные функции φ_0, φ_1 такие, что*

$$Du = -\varphi_0 d\left(\varphi_1 \frac{d}{dx}(\varphi_0 u)\right).$$

Это представление обосновывает характерную для теории задачи (1), (2) технику подсчета числа нулей с помощью теоремы Ролля. Простым применением этого факта является

СЛЕДСТВИЕ 1. *Функция Грина $G(x, s)$ задачи $Du = dF$ при условиях (2) существует и строго положительна при $0 < x, s < l$.*

Здесь мы под функцией Грина понимаем функцию $G(x, s)$ такую, что решение уравнения $Du = dF$ при условиях (2) можно записать в виде

$$u(x) = \int_0^l G(x, s) dF(s).$$

5. Анализ распределения нулей дифференциальных неравенств позволяет устанавливать важные свойства спектра. Например, любая собственная функция $v_0(x)$, соответствующая собственному значению λ_0 наверняка удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$v_0 Du \geq 0,$$

равно как и присоединенная функция.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $v_0(x)$ – нетривиальное решение задачи*

$$Du = 0, \quad u(0) = u(l) = 0,$$

а функция $u(x)$ является решением неравенства

$$v_0(x) Du \geq 0,$$

причем во всякой нулевой точке ξ функции $v_0(x)$ выполняется равенство

$$p(\xi - 0)u'(\xi - 0) = p(\xi + 0)u'(\xi + 0).$$

Пусть $u(0) = 0, v_0'(l - 0)u(l) \leq 0$. Тогда функции $v_0(x)$ и $u(x)$ коллинеарны, т.е. для некоторой константы C верно тождество $u(x) = Cv_0(x)$.

В этой теореме мы снимаем предположение о неубывании $Q(x)$ и считаем $Q \in BV[0, l]$.

Отсюда следует как геометрическая, так и алгебраическая простота всех собственных значений.

6. Число нулей собственных функций нами устанавливается с помощью схемы, которую мы условно называем “накачкой нулей”. Прототип этой схемы имеется уже у Штурма и используется в [1], [2].

Если ввести в рассмотрение решение $u(x, \lambda)$ уравнения (1) с начальными условиями

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \quad (8)$$

то при каждом λ , когда $u(l, \lambda) = 0$, мы получаем собственную функцию. Поэтому отслеживание поведения нулей функции $u(x, \lambda)$, их зависимости от λ приводит к ответу о нулях собственных функций. Связь нулей этой функции с параметром λ и их эволюцией при изменении λ определяется уравнением $u(x, \lambda) = 0$ в виде неявной функции $x(\lambda)$. Эта функция заведомо многозначна (при каждом λ функция $u(x, \lambda)$ может иметь по x много нулей, и количество их на $[0, l]$ возрастает с возрастанием λ). В этой многозначности удобно разобраться, выделяя непрерывные ветви.

МЕТОД НАКАЧКИ НУЛЕЙ. Продолжим вправо от точки $x = l$, т.е. на множество $[l, \infty)$ коэффициенты p, Q, M исходного уравнения так, чтобы они были непрерывными в точке $x = l$ и чтобы p, Q были константами вправо от l , а M — линейной возрастающей функцией ($M(x) = m_0x + c$ при $m_0 > 0$). Решения этого продолженного уравнения будут определены на $[0, \infty)$, причем на $[0, l]$ они будут совпадать с решениями исходного уравнения. Сохраним за продолженными коэффициентами исходное обозначение. На $[l, \infty)$ это уравнение примет вид

$$-d(p_0 u') = \lambda m_0 u \, dx,$$

т.е. $-p_0 u'' = \lambda m_0 u$ (здесь $p_0 = p(l)$). Распространяя на $[l, \infty)$ соответствующее решение $u(x, \lambda)$ задачи (1)–(8), замечаем, что при $\lambda > 0$ эта функция имеет бесконечное число нулей в $[l, \infty)$ и, значит, в $[0, \infty)$.

Обозначим нули $u(x, \lambda)$ на $(0, \infty)$ в порядке их возрастания через

$$z_0(\lambda), \quad z_1(\lambda), \quad \dots, \quad z_k(\lambda), \quad \dots$$

Все они — простые нули $u(x, \lambda)$, непрерывно зависящие от λ . В силу теоремы Штурма каждая из функций $z_k(\lambda)$ строго убывает по λ , когда ее значение принадлежит лучу $(0, \infty)$.

При λ , совпадающем с ведущим собственным значением λ_0 , очевидно, $z_0(\lambda_0) = l$. При $\lambda = 0$ функция $u(x, 0)$ не имеет нулей в $(0, l]$, так как уравнение $-d(pu') + u \, dQ = 0$ не осциллирует на $[0, l]$, ибо $dQ \geq 0$. Поэтому $\lambda_0 > l$. Если λ непрерывно увеличивать, то все нулевые точки $z_i(\lambda)$ будут непрерывно, нигде не останавливаясь, двигаться влево. Когда очередная из них $z_k(\lambda)$ совпадет с l , соответствующее решение $u(x, \lambda)$, обнулившись в точке $x = l$, окажется собственной функцией (1), (2), а значение λ , для которого $z_k(\lambda) = l$, — собственным значением. Поскольку попаданию $z_k(\lambda)$ в точку l должно было предшествовать прохождение через эту точку предыдущих нулей $z_0(\lambda), z_1(\lambda), \dots, z_{k-1}(\lambda)$, то равенство $z_k(\lambda) = l$ определяет λ_k , т.е. k -е собственное значение.

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция $Q(x)$ не убывает, а $M(x)$ строго возрастает на $[0, l]$. Тогда спектр Λ задачи (1), (2) состоит из неограниченной последовательности вещественных строго положительных простых собственных значений $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots$. При этом соответствующая λ_k собственная функция $\varphi_k(x)$ имеет в $(0, l)$ ровно k нулей, в каждом из которых она меняет знак; нули $\varphi_k(x)$ и $\varphi_{k+1}(x)$ перемежаются.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. Аткинсон, *Дискретные и непрерывные граничные задачи*, Мир, М., 1968.
- [2] Б. М. Левитан, *Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка*, Гостехиздат, М.–Л., 1950.

Ю. В. Покорный

Воронежский государственный университет

E-mail: pokorny@kma.vsu.ru

Поступило

01.02.2007

М. Б. Зверева

Воронежский государственный университет

E-mail: margz@rambler.ru**А. С. Ищенко**

Белгородский университет потребительской кооперации

E-mail: science@bupk.ru**С. А. Шабров**

Воронежский государственный университет

E-mail: pokorny@kma.vsu.ru