Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. У. Аубакиров, Н. А. Бокаев, О новом классе систем функций типа Фабера–Шаудера, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 5, 643–651

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3840>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 14:04:12

О новом классе систем функций типа Фабера–Шаудера

Т. У. Аубакиров, Н. А. Бокаев

В работе вводится новый класс систем функций, обобщающий классическую систему Фабера–Шаудера. При ограниченности образующей последовательности показана базисность систем данного класса в пространстве непрерывных функций и доказаны некоторые свойства разложений функций в ряд по этим системам.

Библиография: 11 названий.

В 1910 г. Фабер [1] построил систему функций, которая в 1927 г. была переоткрыта Шаудером [2] и в современной литературе носит название “система Фабера–Шаудера” (см. также [3]). Эта система, состоящая из непрерывных, кусочно-линейных функций, является одним из простейших базисов в пространстве функций, непрерывных на $[0, 1]$. В последствии ряд авторов [4]–[9] изучали различные свойства разложений функций в ряд по этой системе.

В данной работе вводится новый класс Φ систем функций $\Phi\{p_n\}$, содержащий систему Фабера–Шаудера.

Пусть задана последовательность $\{p_n\}$ натуральных чисел таких, что $p_0 = 1$, а $p_n \geq 2$, $n = 1, 2, \dots$.

Положим $m_n = p_0 p_1 \cdots p_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда для любой точки $x \in [0, 1] \setminus Q$, где

$$Q = \left\{ \frac{l}{m_n} \right\}, \quad 0 \leq l \leq m_n, \quad n \geq 0, \quad l \in \mathbb{Z},$$

существует единственное разложение

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)}{m_k},$$

$0 \leq \alpha_k(x) \leq p_k - 1$, $\alpha_k(x)$ – целые.

Любое целое число $k \geq 2$ единственным образом представляется в виде

$$\begin{aligned} k &= m_n + r(p_n + 1 - 1) + s, \\ n &= 0, 1, 2, \dots, \quad r = 0, 1, \dots, m_n - 1, \quad s = 1, 2, \dots, p_{n+1} - 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Определим систему функций $\Phi\{p_n\} = \{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$, $x \in [0, 1]$, в которой $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$, $x \in [0, 1]$,

$$\varphi_k(x) = \varphi_{n,r}^{(s)}(x) = \begin{cases} (m_{n+1}x - p_{n+1}r - \alpha_{n+1}(x)) \exp \frac{2\pi i s \alpha_{n+1}(x)}{p_{n+1}} + \frac{1 - \exp(2\pi i s \alpha_{n+1}(x)/p_{n+1})}{1 - \exp(2\pi i s/p_{n+1})}, & x \in \left(\frac{r}{m_n}, \frac{r+1}{m_n}\right) \setminus Q, \\ 0, & x \in \left[\frac{r}{m_n}, \frac{r+1}{m_n}\right], \end{cases} \quad (2)$$

где $k \geq 2$, n, r, s из (1).

Пользуясь тем, что множество $[0, 1] \setminus Q$ всюду плотно на $[0, 1]$, продолжим функцию $\varphi_{n,r}^{(s)}(x)$ по непрерывности на отрезок $[r/m_n, (r+1)/m_n]$.

Таким образом, система $\Phi\{p_n\}$ полностью определена и состоит из непрерывных, кусочно-линейных функций. При $p_n = 2$, $n = 1, 2, \dots$, система функций $\Phi\{p_n\}$ совпадает с системой Фабера–Шаудера.

Рассмотрим ряд по системе $\Phi\{p_n\}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{m_n-1} \sum_{s=1}^{p_{n+1}-1} a_{n,r}^{(s)} \varphi_{n,r}^{(s)}(x) \quad (3)$$

и предположим, что он сходится в каждой точке отрезка $[0, 1]$ к некоторой функции $f(x)$. Тогда коэффициенты a_k однозначно определяются функцией $f(x)$.

Действительно, из (2) следует, что

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0 \varphi_0(0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(0) = f(0), \\ a_0 + a_1 &= a_0 \varphi_0(1) + a_1 \varphi_1(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(1) = f(1), \end{aligned} \quad (4)$$

так как $\varphi_k(0) = 0$ для всех $k \geq 1$ и $\varphi_k(1) = 0$ для всех $k \geq 2$. Отсюда

$$a_1 = f(1) - f(0).$$

Если же $k \geq 2$, то $a_k \equiv a_{n,r}^{(s)}$ (см. (1)) и для k таких, что

$$m_n + r(p_{n+1} - 1) < k \leq m_n + (r+1)(p_{n+1} - 1)$$

справедлива система линейных уравнений

$$\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{p_{n+1}-1} a_{n,r}^{(s)} \sum_{l=0}^R \exp \frac{2\pi i s l}{p_{n+1}} \\ &= \sum_{k=m_{n+1}}^{\infty} a_k \varphi_k\left(\frac{r}{m_n} + \frac{R+1}{m_{n+1}}\right) = f\left(\frac{r}{m_n} + \frac{R+1}{m_{n+1}}\right) - S_{m_n}\left(\frac{r}{m_n} + \frac{R+1}{m_{n+1}}\right) \\ &= f\left(\frac{r}{m_n} + \frac{R+1}{m_{n+1}}\right) - \frac{1}{p_{n+1}} \left[(p_{n+1} - R - 1) f\left(\frac{r}{m_n}\right) + (R+1) f\left(\frac{r+1}{m_n}\right) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где $R = 0, 1, \dots, p_{n+1} - 2$.

Элементарными преобразованиями система линейных уравнений (5) сводится к следующей системе уравнений:

$$\sum_{s=1}^{p_{n+1}-1} a_{n,r}^{(s)} \exp \frac{2\pi i s R}{p_{n+1}} = f\left(\frac{r}{m_n} + \frac{R+1}{m_{n+1}}\right) - f\left(\frac{r}{m_n} + \frac{R}{m_{n+1}}\right) + \frac{1}{p_{n+1}} \left[f\left(\frac{r}{m_n}\right) - f\left(\frac{r+1}{m_n}\right) \right], \quad (6)$$

где $R = 0, 1, \dots, p_{n+1} - 2$.

Определитель системы (6) является определителем Вандермонда и равен следующему выражению:

$$\prod_{1 \leq k \leq l \leq p_{n+1}-1} \left(\exp \frac{2\pi i l}{p_{n+1}} - \exp \frac{2\pi i k}{p_{n+1}} \right),$$

которое отлично от нуля.

Таким образом, при фиксированных n и r коэффициенты $a_{n,r}^{(s)}$, $s=1, 2, \dots, p_{n+1}-1$, однозначно определяются из системы уравнений (6).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(x) \in C[0, 1]$ и разлагается в ряд по системе $\Phi\{p_n\}$, т.е.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \varphi_k(x).$$

Тогда для коэффициентов $a_k(f) \equiv a_{n,r}^{(s)}(f)$ (см. (1)) справедлива оценка

$$|a_{n,r}^{(s)}(f)| \leq \frac{2\omega(1/m_{n+1}, f)}{(\sin \pi/p_{n+1})^{p_{n+1}-2}}. \quad (7)$$

Здесь $\omega(\delta, f)$ – модуль непрерывности функции $f \in C[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть n и r фиксированы, $n = 1, 2, \dots$, $r = 0, 1, \dots, m_{n-1}$,
а $p_{n+1} = k + 1$, $k \geq 1$. Обозначим

$$\lambda = \exp \frac{2\pi i}{k+1}, \quad x_s = a_{n,r}^{(s)}(f), \quad s = 1, 2, \dots, k,$$

$$b_R = f\left(\frac{r}{m_n} + \frac{R}{m_{n+1}}\right) - f\left(\frac{r}{m_n} + \frac{R-1}{m_{n+1}}\right) + \frac{1}{k+1} \left[f\left(\frac{r}{m_n}\right) - f\left(\frac{r+1}{m_n}\right) \right],$$

где $R = 1, 2, \dots, k$. Тогда в новых обозначениях система уравнений (6) примет следующий вид:

[illegible]

Определитель данной системы является определителем Вандермонда (см. [10])

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^k \\ \lambda^2 & \lambda^4 & \dots & \lambda^{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda^{k-1} & \lambda^{2(k-1)} & \dots & \lambda^{k(k-1)} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < l \leq k} (\lambda^l - \lambda^i)$$

и, очевидно, в нашем случае, отличен от нуля. Следовательно, данная система линейных уравнений имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера.

Пусть определитель Δ_j получен из определителя Δ заменой j -го столбца на столбец из свободных членов. Разложив определитель Δ_j по элементам j -го столбца, имеем

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^k b_i A_{ij},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов определителя Δ .

Рассмотрим эти алгебраические дополнения:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^{j-1} & \lambda^{j+1} & \dots & \lambda^k \\ \lambda^2 & \lambda^4 & \dots & \lambda^{2(j-1)} & \lambda^{2(j+1)} & \dots & \lambda^{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda^{i-2} & \lambda^{2(i-2)} & \dots & \lambda^{(j-1)(i-2)} & \lambda^{(j+1)(i-2)} & \dots & \lambda^{k(i-2)} \\ \lambda^i & \lambda^{2i} & \dots & \lambda^{(j-1)i} & \lambda^{(j+1)i} & \dots & \lambda^{ki} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda^{k-1} & \lambda^{2(k-1)} & \dots & \lambda^{(j-1)(k-1)} & \lambda^{(j+1)(k-1)} & \dots & \lambda^{k(k-1)} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{i+j} \sigma_{k-i} \prod_{1 \leq s < l \leq k, s \neq j, l \neq j} (\lambda^l - \lambda^s), \end{aligned}$$

где σ_{k-i} означает сумму всевозможных произведений чисел $\lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{j-1}, \lambda^{j+1}, \dots, \lambda^k$, взятых по $k-i$ (см. [11; с. 40]). Так как $|\lambda| = 1$, каждое слагаемое в сумме σ_{k-i} по модулю равно единице. Число слагаемых в сумме σ_{k-i} равно C_{k-1}^{k-i} , $i = 1, 2, \dots, k$. Следовательно,

$$|\sigma_{k-i}| \leq C_{k-1}^{k-i}. \quad (8)$$

Теперь рассмотрим отношения

$$\frac{\prod_{1 \leq s < l \leq k, s \neq j, l \neq j} (\lambda^l - \lambda^s)}{\prod_{1 \leq s < l \leq k} (\lambda^l - \lambda^s)}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

После сокращения в знаменателе остаются произведения сомножителей вида $\lambda^l - \lambda^j$, $l = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, k$. Оценим $|\lambda^l - \lambda^j|$ снизу:

$$\begin{aligned} |\lambda^l - \lambda^j| &= \left| \exp \frac{2\pi i l}{k+1} - \exp \frac{2\pi i j}{k+1} \right| = \left| \exp \frac{2\pi i (l-j)}{k+1} - 1 \right| \\ &= \left| \cos \frac{2\pi (l-j)}{k+1} - 1 + i \sin \frac{2\pi (l-j)}{k+1} \right| = 2 \left| \sin \frac{\pi (l-j)}{k+1} \right| \geq 2 \sin \frac{\pi}{k+1}. \end{aligned}$$

Отсюда при любом $j = 1, 2, \dots, k$ имеем

$$\frac{\prod_{1 \leq s < l \leq k, s \neq j, l \neq j} (\lambda^l - \lambda^s)}{\prod_{1 \leq s < l \leq k} (\lambda^l - \lambda^s)} \leq \frac{1}{(2 \sin \pi / (k+1))^{k-1}}. \quad (9)$$

Для величин b_i непосредственно из определения следуют оценки

$$|b_i| \leq 2\omega\left(\frac{1}{m_{n+1}}, f\right), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (10)$$

Из (8) вытекает, что

$$\sum_{i=1}^k |\sigma_{k-i}| \leq \sum_{i=1}^k C_{k-1}^{k-i} = 2^{k-1}. \quad (11)$$

Далее, из (9)–(11) получаем, что

$$|x_j| = \left| \frac{\Delta_j}{\Delta} \right| \leq 2^k \frac{\omega(1/m_{n+1}, f)}{(2 \sin \pi / (k+1))^{k-1}} = \frac{2\omega(1/m_{n+1}, f)}{(\sin \pi / (k+1))^{k-1}}.$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, имеем (7). Теорема 1 доказана.

Обозначим $\omega_2(\delta, f)$ модуль гладкости функции $f \in C[0, 1]$:

$$\omega_2(\delta, f) = \sup_{0 < h < \delta} \max_{x \in [0, 1]} |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)|,$$

где $h \leq x \leq 1-h$, $0 < \delta < 1$.

ТЕОРЕМА 2. Система $\Phi\{p_n\}$ с $p_n \leq N$, $n = 1, 2, \dots$, является базисом в пространстве $C[0, 1]$. При этом, если $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k$, $f(x) \in C[0, 1]$, то справедливы следующие оценки:

$$|a_k(f)| = |a_{n,r}^{(s)}(f)| \leq C\omega\left(\frac{1}{m_{n+1}}, f\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^l a_k(f) \varphi_k(x) \right\|_{C[0, 1]} \leq \omega_2\left(\frac{1}{m_n}, f\right), \quad l = m_n + r(p_{n+1} - 1). \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4), (5) следует, что равенство

$$\sum_{m=1}^l a_m \varphi_m(x) \equiv 0$$

на $[0, 1]$ при $l = 1, 2, \dots$ выполняется только при $a_n = 0$, т.е. функции системы $\Phi\{p_n\}$ линейно независимы. Из определения функций системы $\varphi_m(x)$, $m = 0, 1, \dots$, и их линейной независимости вытекает, что при

$$l = m_n + r(p_{n+1} - 1), \quad n = 0, 1, \dots, \quad r = 0, 1, \dots, m_n - 1,$$

имеют место следующие свойства:

- а) пространство $G_l(\Phi)$ полиномов по системе $\Phi\{p_n\}$ вида $p_n(x) = \sum_{m=0}^l a_m \varphi_m(x)$ имеет размерность $l+1$ и совпадает с пространством L_l , определяемым следующим образом:

$$L_1 = \{f \in C[0, 1] : f''(x) = 0 \text{ при } x \in (0, 1)\},$$

$$L_l = \left\{ f \in C[0, 1] : f''(x) = 0 \text{ при } x \in \left(\bigcup_{k=0}^{rp_{n+1}-1} \delta_{n+1,k} \right) \cup \left(\bigcup_{k=r+1}^{m_n-1} \delta_{n,k} \right) \right\},$$

где $\delta_{n,k} = (k/m_n, (k+1)/m_n)$;

- б) частные суммы

$$S_l(f, x) = \sum_{m=0}^l a_m(f) \varphi_m(x)$$

удовлетворяют соотношению

$$S_l(f, x) = f(x)$$

при $x \in \pi_l$, где

$$\pi_1 = \{0, 1\}, \quad \pi_l = \left\{ \frac{k}{m_{n+1}} \right\}_{k=0}^{rp_{n+1}-1} \cup \left\{ \frac{k}{m_n} \right\}_{k=r+1}^{m_n}.$$

Теперь из (4), (5), а) и б) следует, что для произвольной функции $f(x) \in C[0, 1]$ существует единственный ряд $\sum_{m=0}^{\infty} a_m(f) \varphi_m(x)$, у которого частные суммы $S_l(f, x)$ равномерно сходятся к $f(x)$ по последовательности значений

$$l = m_n + r(p_{n+1} - 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad r = 0, 1, \dots, m_n - 1.$$

Поэтому достаточно установить, что существует такая постоянная M , для которой справедливы неравенства

$$\left\| \sum_{s=1}^k a_{n,r}^{(s)}(f) \varphi_{n,r}^{(s)}(x) \right\|_{C(0,1)} \leq M \left\| \sum_{s=1}^{p_{n+1}-1} a_{n,r}^{(s)}(f) \varphi_{n,r}^{(s)}(x) \right\|_{C(0,1)} \quad (14)$$

для всех $k = 1, 2, \dots, p_{n+1}-1$. Но при ограниченной образующей последовательности $\{p_n\}$ ограничена в совокупности, так как из (2) следует оценка

$$\|\varphi_{n,r}^{(s)}(x)\|_{C(0,1)} \leq p_{n+1} - 1, \quad (15)$$

а из теоремы 1 непосредственно вытекает оценка (12). Теперь из (12) и (15) следует (14); тем самым установлена базисность данной системы в $C[0, 1]$.

Перейдем к доказательству оценки (13). Пусть дана функция $f(x) \in C(0, 1)$ и отрезок $I = [\alpha, \beta] \subset [0, 1]$. Рассмотрим на отрезке I функцию

$$u(x) = f(x) - \left\{ f(\alpha) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} (x - \alpha) \right\}.$$

Ясно, что $u(\alpha) = u(\beta) = 0$. Если $u(x) \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$, то найдем такую точку $x_0 \in [\alpha, \beta]$, что

$$|u(x_0)| = \max_{x \in (\alpha, \beta)} |u(x)|.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$|\alpha - x_0| \leq |\beta - x_0|.$$

Тогда точка $x_1 = \alpha + 2|\alpha - x_0| \in I$. Составляя вторую разность, имеем

$$|2u(x_0) - u(\alpha) - u(x_1)| = |2u(x_0) - u(x_1)| = |u(x_0) + (u(x_0) - u(x_1))| \geq |u(x_0)|. \quad (16)$$

В силу линейности функции

$$f(\alpha) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha)$$

из (16) имеем

$$|u(x_0)| \leq |2u(x_0) - u(\alpha) - u(x_1)| = |2f(x_0) - f(\alpha) - f(x_1)| \leq \omega_2\left(\frac{\beta - \alpha}{2}, f\right). \quad (17)$$

Так как (см. пункты а) и б)) функция

$$S_l(f, x) = \sum_{k=0}^l a_k(f) \varphi_k(x)$$

при $l = m_n + r(p_{n+1} - 1)$ есть ломаная линия с вершинами в точках

$$\pi_l = \left\{ \frac{k}{m_{n+1}} \right\}_{k=0}^{rp_{n+1}+1} \cup \left\{ \frac{k}{m_n} \right\}_{k=r+1}^{m_n}$$

и удовлетворяет условию

$$S_l(f, x) = f(x)$$

для $x \in \pi_l$, то из (17) имеем

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=0}^l a_k(f) \varphi_k(x) \right| &\leq \max \left\{ \max_{0 \leq k \leq rp_{n+1}+1} \left[\max_{x \in \delta_{n+1,k}} \left| f(x) - \sum_{k=0}^l a_k(f) \varphi_k(x) \right| \right], \right. \\ &\quad \left. \max_{r+1 \leq k \leq m_n-1} \left[\max_{x \in \delta_{n,k}} \left| f(x) - \sum_{k=0}^l a_k(f) \varphi_k(x) \right| \right] \right\} \\ &\leq \max \left\{ \omega_2\left(\frac{1}{2m_{n+1}}, f\right), \omega_2\left(\frac{1}{2m_n}, f\right) \right\} \leq \omega_2\left(\frac{1}{2m_n}, f\right). \end{aligned}$$

Таким образом, оценка (13) доказана.

ТЕОРЕМА 3. Для того, чтобы ряд (3) с $\sup p_n = N < \infty$ являлся разложением функции $f(x) \in \text{Lip } \alpha$, $0 < \alpha < 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$|a_k| \leq ck^{-\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f(x) \in \text{Lip } \alpha$, то из оценки (12) вытекает, что

$$|a_k| \leq ck^{-\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Пусть задан ряд вида (3), для коэффициентов которого выполняются (18). Тогда этот ряд сходится абсолютно и равномерно, так как при $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_k \varphi_k(x)| \leq N^2 \max_{m_n < k \leq m_{n+1}} |a_k| \leq \frac{N^2 c}{m_n^\alpha}$$

и, следовательно, $f(x)$ является суммой своего разложения по системе $\Phi\{p_n\}$. При этом для $x, y \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| |\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| \\ &= |a_1| |x - y| + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{m_n-1} \sum_{s=1}^{p_{n+1}-1} |a_{n,r}^{(s)}| |\varphi_{n,r}^{(s)}(x) - \varphi_{n,r}^{(s)}(y)|. \end{aligned}$$

Выберем число n_0 так, чтобы $N/m_{n_0+1} < |x - y| \leq N/m_{n_0}$ и воспользуемся тем, что для всех $n = 1, 2, \dots$, $r = 0, 1, \dots, m_n - 1$, $s = 1, 2, \dots, p_n + 1 - 1$ и $x, y \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$|\varphi_{n,r}^{(s)}(x) - \varphi_{n,r}^{(s)}(y)| \leq \min\{p_{n+1}, m_{n+1} |x - y|\},$$

а количество ненулевых слагаемых в сумме

$$\sum_{r=0}^{m_n-1} \sum_{s=1}^{p_{n+1}-1} |a_{n,r}^{(s)}| |\varphi_{n,r}^{(s)}(x) - \varphi_{n,r}^{(s)}(y)|$$

не больше, чем $2(p_{n+1} - 1)$ для всех $x, y \in [0, 1]$.

Далее имеем

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |a_1| |x - y| + \sum_{n=1}^{\infty} 2(p_{n+1} - 1) \max_{r,s} |a_{n,r}^{(s)}| \min\{p_{n+1}, m_{n+1} |x - y|\} \\ &\leq |a_1| |x - y| + 2N^2 c \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{m_n^\alpha} (p_{n+1} - 1) m_{n+1} |x - y| \\ &\quad + 2N^3 c \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{(p_{n+1} - 1)}{m_n^\alpha} \\ &\leq |a_1| |x - y| + C_1 |x - y| \sum_{n=1}^{n_0} m_n^{1-\alpha} + C_2 \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{m_n^\alpha} \leq K |x - y|^\alpha. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. Faber, "Über die orthogonalfunctionen des Herrn Harr", *Jahresber. Deutsch. Math.-Verrein.*, **19** (1910), 104–112.
- [2] J. Schauder, "Zur theorie stetiger abbildungen in functionalräumen", *Math. Z.*, **26:1** (1927), 47–65.

- [3] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Наука, М., 1984.
- [4] П. Л. Ульянов, “О некоторых свойствах рядов по системе Шаудера”, *Матем. заметки*, **7**:4 (1970), 431–442.
- [5] Z. Ciesielski, “Some properties of Schauder basis of space $C(0, 1)$ ”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **8** (1960), 141–144.
- [6] В. А. Матвеев, “О рядах по системе Шаудера”, *Матем. заметки*, **2**:3 (1967), 267–278.
- [7] С. В. Бочкарев, “О рядах по системе Шаудера”, *Матем. заметки*, **4**:4 (1968), 453–460.
- [8] Т. Н. Сабурова, “О некоторых свойствах коэффициентов Фурье по системе Фабера–Шаудера”, *Сообщ. АН ГССР*, **82**:2 (1976), 297–300.
- [9] А. П. Горячев, “О коэффициентах Фурье по системе Фабера–Шаудера”, *Матем. заметки*, **15**:2 (1974), 341–352.
- [10] А. Г. Курош, *Курс высшей алгебры*, Физматлит, М., 1963.
- [11] Д. К. Фадеев, И. С. Соминский, *Сборник задач по высшей алгебре*, ГИТТЛ, М., 1956.

Т. У. Аубакиров

Карагандинский государственный университет
им. Е. А. Букетова

Поступило

02.06.2005

Исправленный вариант

01.04.2007

Н. А. Бокаев

Карагандинский государственный университет
им. Е. А. Букетова

E-mail: bokaev@kargu.krg.kz