Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Любецкий, С. А. Пирогов, Нестандартные представления локально компактных групп, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 3, 383–389

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3841>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 05:19:46

Нестандартные представления локально компактных групп

В. А. Любецкий, С. А. Пирогов

В заметке доказано, что бесконечномерное унитарное представление T прямого произведения групп $G = K \times N$, где K – компактная группа и N – локально компактная абелева группа, при естественных ограничениях изображается представлением нестандартного аналога $\tilde{G}$ группы G в группе нестандартных матриц фиксированного нестандартного размера.

Библиография: 12 названий.

Введение. Булевозначный анализ, как и вообще нестандартный анализ, направлен на *изображение* (термин, появившийся в сходной ситуации у Новикова [1], или более привычный, но уже занятый термин – *представление*) более сложных математических объектов с помощью более простых, но зато последние рассматриваются в рамках нестандартной теории множеств. Эта теория множеств выступает здесь в форме модели, а именно, в форме булевозначного универсума V^B (см. [2]), где B – любая фиксированная полная булева алгебра. В качестве B подбирается булева алгебра, связанная с той или иной рассматриваемой проблемой (в нашем случае B будет булевой алгеброй попарно коммутирующих проекторов в алгебре операторов). Для разных проблем в качестве B рассматривают разные конкретные булевы (еще один пример – булева алгебра всех центральных идемпотентов кольца) или даже гейтинговы (например, решетка всех открытых множеств топологического пространства) и квантовые алгебры (иногда их называют квантовые логики; это, например, решетка всех линейных подпространств в любом $\mathbb{R}^n$) и т.д. Более сложные алгебры B приводят к более сложно организованному универсуму V^B , свойства которого труднее изучать, но зато исходные “стандартные” (т.е. из V^{Z_2}) объекты изображаются все более простыми “нестандартными” (т.е. из V^B) объектами. В этом смысле “простейший” универсум V^B , соответствующий как раз традиционной “стандартной” теории множеств, получается, когда B является простейшей алгеброй $Z_2 = \{0, 1\}$; это будет самый обычный класс всех множеств $V \simeq V^{Z_2}$, который состоит по определению из “стандартных” математических объектов. Класс V канонически вкладывается в любой универсум V^B с помощью отображения $x^\vee: V^{Z_2} \rightarrow V^B$, индуцированного вложением алгебр $b^\vee: Z_2 \rightarrow B$, которое переводит 0 в 0_B и 1 в 1_B , где 0_B – наименьший и 1_B – наибольший элементы в B (см., например, [2], [3]). Для всех формул $\varphi(f_1, \dots, f_n)$ в обычном языке теории множеств с исходными двуместными отношениями ‘ $\in$ ’ и ‘ $=$ ’, где параметры $f_1, \dots, f_n \in V^B$, определяется оценка (также говорят: степень достоверности, “вероятность”) того, что суждение $\varphi(f_1, \dots, f_n)$ верно в V^B . Эта оценка обозначается $\llbracket \varphi(f_1, \dots, f_n) \rrbracket$ и является элементом из B .

В частности, подразумевается, что упомянутые выше V^{Z_2} и V^B факторизованы отношением эквивалентности

$$[f = g] = 1_B,$$

где $f, g \in V^B$.

В заметке рассматривается бесконечномерное унитарное представление T прямого произведения групп $G = K \times N$, где K – компактная группа и N – локально компактная абелева группа. При естественных ограничениях это представление изображается представлением нестандартного аналога $\tilde{G}$ группы G в группе нестандартных матриц фиксированного нестандартного размера. Случай, когда G – локально компактная абелева группа, рассмотрен в [4], [5] и даже в более общем виде, чем здесь, а именно, для представлений группы G в банаховом пространстве $\mathcal{H}$ спектральными операторами скалярного типа. В абелевом случае изображением операторов в комплексном банаховом пространстве являются нестандартные комплексные числа, которые, сами по себе, образуют коммутативную алгебру. В рассматриваемом теперь случае неабелевой группы G вместо нестандартных чисел естественно возникают нестандартные квадратные матрицы. Отметим, что такие матрицы имеют размер $n \times n$, где n – нестандартное натуральное число и их матричные элементы – нестандартные комплексные числа. При этом нестандартные комплексные числа обладают всеми свойствами обычного поля комплексных чисел и то же выполняется для кольца нестандартных матриц.

Нестандартная группа $\tilde{G}$ определяется как *нестандартное пополнение* по левой равномерной структуре, порожденной всеми окрестностями нейтрального элемента группы G . Для рассматриваемого ниже класса групп, состоящего из коммутативных групп, компактных групп и их прямых произведений, левая и правая равномерные структуры совпадают. *Нестандартное пополнение* $\tilde{X}$ равномерного пространства X было введено в работе [4] (см. также [2], [5]).

Цель изображения состоит в *переносе* свойств, в нашем случае свойств нестандартного гомоморфизма $\tilde{T}$ (со значениями в алгебре нестандартных комплексных матриц фиксированного размера; такое $\tilde{T}$ будет специально построено ниже, в теореме) на исходный стандартный гомоморфизм T . Конечно, такой перенос не может иметь место для произвольных свойств; он выполняется для свойств, записываемых, например, хорновыми формулами языка колец [2], но более важно, что индивидуальный анализ отдельных свойств позволяет получать заключения о T , используя $\tilde{T}$, например, как это делается в [2].

Предполагается, что читатель знаком с первыми понятиями булевозначного анализа, например, по [2] или [6], и с соответствующими результатами функционального анализа. Изложение строится так, чтобы собственно логические понятия нестандартного анализа, в частности, понятия оценки и универсума V^B , использовались как можно меньше. Поэтому изложение, которое следует ниже, можно рассматривать как пример булевозначного анализа, приведенный без использования логических понятий.

Определения и формулировка результата. Пусть G – группа, являющаяся прямым произведением групп: $G = K \times N$, где K – компактная группа, а N – локально компактная абелева группа. Пусть задано сильно непрерывное унитарное представление T группы G в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть

$\mathbf{A}$ – некоторая алгебра фон Неймана операторов в пространстве $\mathcal{H}$. Предположим, что $\mathbf{A}$ содержит полную сильно замкнутую булеву алгебру $\mathbf{B}$ попарно коммутирующих проекторов. Обозначим $M(G)$ алгебру мер группы G , т.е. алгебру конечных борелевских мер на G с обычным сложением и сверткой в качестве умножения. Предположим, что образ представления T группы G лежит в алгебре $\mathbf{A}$. Тогда естественно определен гомоморфизм алгебры $M(G)$ в $\mathbf{A}$, который обозначим той же буквой T . Обозначим $\Sigma(\mathbf{B})$ слабо замкнутую подалгебру алгебры $\mathbf{A}$, порожденную $\mathbf{B}$. Очевидно, $\Sigma(\mathbf{B})$ – коммутативная алгебра фон Неймана.

Предположим, что выполнены следующие условия.

УСЛОВИЕ 1. Образ центра $Z(M(G))$ алгебры $M(G)$ при гомоморфизме T лежит в $\Sigma(\mathbf{B})$.

УСЛОВИЕ 2. Операторы $T(g)$ коммутируют с элементами алгебры $\Sigma(\mathbf{B})$.

Условия 1 и 2 имеют естественную квантово-механическую интерпретацию. Именно, $\mathbf{A}$ – алгебра наблюдаемых квантовой системы, $\Sigma(\mathbf{B})$ – алгебра ее “макроскопических наблюдаемых”, G – группа “внутренней симметрии” (условие 2), причем “операторы Казимира”, т.е. элементы центра алгебры мер, сами являются “макроскопическими наблюдаемыми” (условие 1). Свойство “макроскопической наблюдаемости” операторов Казимира лежит в основе всех существующих схем классификации элементарных частиц [7]. Например, слабое замыкание образа центра алгебры мер группы $SU(2)$, действующей в пространстве $\mathcal{H}$, порождено как алгебра фон Неймана центральными идемпотентами P_n , где $n = 1, 2, \dots$, которые в пространстве состояний частиц отвечают проекторам на подпространства состояний с заданным спином $j = (n - 1)/2$.

Спектр алгебры $\Sigma(\mathbf{B})$, естественно изоморфный стоунову пространству булевой алгебры $\mathbf{B}$, обозначим S . Из полноты алгебры $\mathbf{B}$ следует, что пространство S экстремально несвязно [8]. Известно [9], что в локально компактной абелевой группе N существует открытая подгруппа вида $N_0 \times \mathbb{R}^n$, где N_0 – компактная абелева группа, $\mathbb{R}$ – аддитивная группа вещественных чисел. Обозначим

$$H = K \times N_0 \times \mathbb{R}^n = G_0 \times \prod_{i=1}^n G_i,$$

где $G_0 = K \times N_0$ и $G_i = \mathbb{R}$ для $i = 1, \dots, n$. Очевидно, H – открытая подгруппа в группе G . Ограничение T на подгруппу G_i , $i = 0, 1, \dots, n$, обозначим T_i . Поскольку N лежит в центре группы G , то из условия 1 на гомоморфизм T следует, что образ G_i , $i \geq 1$, при отображении T_i лежит в алгебре $\Sigma(\mathbf{B})$, которая, как известно, изоморфна алгебре $C(S)$ непрерывных комплекснозначных функций на компакте S . Выделим в G_i подгруппу Z_i , состоящую из целых чисел. Элемент группы G_i , соответствующий числу 1, обозначим e_i . Тогда $T_i(e_i)$, как элемент алгебры $\Sigma(\mathbf{B})$, соответствует некоторой не обращающейся в 0 непрерывной комплекснозначной функции φ_i на пространстве S .

Поскольку пространство S экстремально несвязно, то каждая ограниченная борелевская функция на S совпадает с точностью до значений на тощем множестве (в другой терминологии: на множестве первой категории) с непрерывной функцией

на S . В частности, если взять композицию стандартного комплексного логарифма Ln (с разрезом вдоль отрицательной полуоси) [10] и функции φ_i , то получится ограниченная борелевская функция $\text{Ln } \varphi_i$. Поэтому существует непрерывная на S функция, совпадающая с $\text{Ln } \varphi_i$ вне некоторого тощего множества. Обозначим ее $\ln \varphi_i$. Очевидно, $\exp(\ln \varphi_i) = \varphi_i$ на дополнении к тощему множеству, а значит, по непрерывности, и всюду на S . Если теперь для $t \in G_i$ положить

$$T'_i(t) = T_i(t) \exp(-t \ln \varphi_i),$$

то T'_i есть гомоморфизм G_i в $\Sigma(\mathbf{B})$ такой, что $T'_i(e_i) = 1$, и, следовательно, T'_i можно рассматривать как гомоморфизм компактной группы G_i/Z_i в $\Sigma(\mathbf{B})$.

Поскольку в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ действует C^* -алгебра $\Sigma(\mathbf{B}) \simeq C(S)$, то $\mathcal{H}$ можно реализовать в виде прямого интеграла (см. [11] относительно определения прямого интеграла):

$$\mathcal{H} = \int_S^{\oplus} \mathcal{H}(\zeta) d\mu(\zeta),$$

где μ – конечная борелевская мера на S , а $\mathcal{H}(\zeta)$ – измеримое поле гильбертовых пространств. Таким образом, любой элемент $\mathcal{H}$ определяет измеримую функцию $h(\zeta)$ со значениями в $\mathcal{H}(\zeta)$, а операторы алгебры $\Sigma(\mathbf{B})$, реализованные как непрерывные числовые функции $f(\zeta)$, $\zeta \in S$, действуют по формуле $f: h(\zeta) \mapsto f(\zeta)h(\zeta)$, т.е. как операторы умножения¹. По условию 2 операторы $T(g)$ коммутируют с $\Sigma(\mathbf{B})$, поэтому они реализуются как измеримые оператор-значные функции $t_g(\zeta)$, которые действуют поточечно, т.е.

$$T(g): h(\zeta) \mapsto t_g(\zeta)h(\zeta).$$

При этом $t_g(\zeta)$ отнюдь не являются числами.

Однако группа G имеет вид $K \times N$, причем по условию 1 образы элементов из абелевого сомножителя N лежат в $\Sigma(\mathbf{B})$, т.е. реализуются непрерывными числовыми функциями на S . Что касается элементов $g \in K$, то воспользуемся тем, что центр алгебры мер $M(K)$ при гомоморфизме T отображается в $\Sigma(\mathbf{B})$.

Напомним, если Π – непрерывное неприводимое представление компактной группы K в конечномерном пространстве $H_\Pi = \mathbb{C}^{n_\Pi}$ и $\chi_\Pi(g) = \text{tr}(\Pi(g))$ – его характер, то

$$P_\Pi = n_\Pi \int_K T(g) \overline{\chi_\Pi(g)} dg,$$

где dg – нормированная мера Хаара на K , является проектором и принадлежит образу центра алгебры $M(K)$. Проекторы P_Π образуют разложение единицы в пространстве $\mathcal{H}$.

Поскольку, как уже сказано, образ центра $M(K)$ лежит в $\Sigma(\mathbf{B})$, то проекторы P_Π реализуются непрерывными функциями на S , принимающими значения 0 и 1. Таким образом, проектору P_Π отвечает функция i_Π , являющаяся характеристической функцией открыто-замкнутого подмножества S_Π в S . Множества S_Π попарно не пересекаются, а их объединение $\tilde{S}$ является множеством полной меры в S . Кроме того, дополнение $S \setminus \tilde{S}$ является тощим множеством, поскольку точная верхняя

¹Здесь используется общая форма спектральной теоремы в сепарабельном гильбертовом пространстве, см., например, [12; chap. II, § 6, Theoreme 1, p. 208.]

грань элементов S_Π в алгебре $\mathbf{B}$ является единицей в $\mathbf{B}$. Представление T группы K , ограниченное на образ проектора P_Π , является примарным представлением, кратным представлению Π . Следовательно, для $\zeta \in S_\Pi$ пространство $\mathcal{H}(\zeta)$ представляется в виде $\mathbb{C}^{n_\Pi} \otimes L(\zeta)$, где $L(\zeta)$ – некоторое измеримое поле гильбертовых пространств, а оператор $t_g(\zeta)$ имеет вид $\Pi(g) \otimes 1$. Определим редуцированное гильбертово пространство

$$\mathcal{H}_{\text{red}} = \int_S^\oplus \mathbb{C}^{n(\zeta)} d\mu(\zeta),$$

где $n(\zeta)$ – целочисленная функция на S , равная n_Π на S_Π . В пространстве $\mathcal{H}_{\text{red}}$ элементы $\Sigma(\mathbf{B})$ действуют, по-прежнему, как операторы умножения на числовые функции, а операторы $T(g)$, $g \in K$, – как матрично-значные функции, принимающие значение $\Pi(g)$ на S_Π . Следовательно, и все операторы $T(g)$, $g \in G$, реализуются как матрично-значные функции на S , причем размер соответствующих матриц $n(\zeta)$ одинаков для всех $g \in G$. Матричные элементы этих матриц являются непрерывными функциями на каждом из S_Π . Обозначим матрично-значную функцию, отвечающую элементу $g \in G$, через $I(g)$. Положим

$$I = \{\langle g^\vee, I(g) \rangle_- \mid g \in G\}_-,$$

где подчеркивание U_- обозначает тождественно единичную функцию с областью определения U , а U , в свою очередь, состоит из каких-то функций со значениями в $\mathbf{B}$, область определения которых состоит из такого же типа функций. В результате $I \in V^{\mathbf{B}}$ и, конечно, $G^\vee \in V^{\mathbf{B}}$.

ТЕОРЕМА. *Объект I – непрерывная функция на группе $G^\vee$, которая, следовательно, продолжается по непрерывности до непрерывного гомоморфизма $\tilde{T}$ группы $\tilde{G}$ в группу комплексных матриц нестандартного размера $n(\zeta)$.*

Здесь $\tilde{G}$ обозначает результат нестандартного пополнения $G^\vee \in V^{\mathbb{Z}_2} \subseteq V^{\mathbf{B}}$ в $V^{\mathbf{B}}$ по естественной равномерной структуре в $G^\vee$. Формально теорема говорит, что указанное в ней утверждение, записанное формулой языка теории множеств Цермело–Френкеля, имеет булеву оценку, соответствующую универсуму $V^{\mathbf{B}}$, равную $1_{\mathbf{B}}$, и это доказуемо в обычной аксиоматике Цермело–Френкеля ZFC.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы, приведенной в [4] (см. [2; теорема 24]), сразу следует, что $I(g)$ соответствует нестандартной комплексной матрице нестандартного размера $n(\zeta)$, т.е. значения функции I принадлежат указанной алгебре нестандартных матриц. Достаточно проверить, что I непрерывно в некоторой окрестности нейтрального элемента группы $G^\vee$. В качестве такой окрестности возьмем

$$H^\vee = G_0^\vee \times \prod_{i=1}^n G_i^\vee = K^\vee \times N_0^\vee \times \prod_{i=1}^n G_i^\vee,$$

где K – компактная группа, N_0 – компактная абелева группа, $G_i = \mathbb{R}$ для $i = 1, \dots, n$. Достаточно проверить, что $I(g)$ непрерывно по отдельности на $K^\vee$, $N_0^\vee$ и $G_i^\vee$, $i = 1, \dots, n$. Начнем с $K^\vee$. Пусть J_0 – совокупность открытых окрестностей нейтрального элемента группы K , $J_0^\vee = \{a^\vee \mid a \in J_0\}_-$, E – единичная матрица (перменного размера, зависящего от $\zeta \in S$). Условие непрерывности I в нейтральном

элементе из $K^\vee$ состоит в том, что

$$\llbracket \forall \varepsilon \in (\mathbb{Q}_+^\vee) \exists O \in J_0^\vee \forall g \in O \quad (\|I(g) - E\| < \varepsilon) \rrbracket = 1. \quad (1)$$

Здесь впервые появляется оценка, которая определяется следующим образом: кванторам ‘ $\forall$ ’ и ‘ $\exists$ ’ соответствуют операции ‘ $\wedge$ ’ (точная нижняя грань) и ‘ $\vee$ ’ (точная верхняя грань) в алгебре $\mathbf{B}$ (не путать их с пересечением и объединением множеств) и поэтому (1) сводится к равенству

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{O \in J_0} \bigwedge_{g \in O} \llbracket \|I(g^\vee) - E\| < \varepsilon^\vee \rrbracket = 1.$$

Это то же самое, что

$$\bigvee_{O \in J_0} \bigwedge_{g \in O} \llbracket \|I(g^\vee) - E\| < \varepsilon^\vee \rrbracket = 1$$

для всех $\varepsilon > 0$. Для данного $\varepsilon > 0$ и данного неприводимого представления Π группы K положим

$$O_{\Pi, \varepsilon} = \{g \in G \mid \|\Pi(g) - E\| < \varepsilon\}.$$

Проверим, что

$$\forall g \in O_{\Pi, \varepsilon} \quad (\llbracket \|I(g^\vee) - E\| < \varepsilon^\vee \rrbracket \geq P_\Pi).$$

Действительно, поскольку $t_g(\zeta) = \Pi(g)$ при $\zeta \in S_\Pi$, то

$$\llbracket \|I(g^\vee)P_\Pi - P_\Pi\| < \varepsilon^\vee \rrbracket = 1$$

для $g \in O_{\Pi, \varepsilon}$. Следовательно,

$$\llbracket \|I(g^\vee) - E\| < \varepsilon^\vee \rrbracket \geq P_\Pi,$$

где P_Π внутри оценки – это скаляр 1 с достоверностью P_Π и скаляр 0 с достоверностью $\neg P_\Pi$.

Поскольку P_Π образуют разбиение единицы в булевой алгебре $\mathbf{B}$, т.е. они дизъюнкты и их точная верхняя грань равна единице в $\mathbf{B}$, отсюда имеем

$$\bigvee_{O \in J_0} \bigwedge_{g \in O} \llbracket \|I(g^\vee) - E\| < \varepsilon^\vee \rrbracket = 1.$$

Непрерывность $I(g)$ на $N_0^\vee$ доказывается аналогично, с тем отличием, что вместо разбиения единицы (в алгебре $\mathbf{B}$), соответствующего набору неприводимых представлений группы K , берем разбиение единицы, отвечающее неприводимым представлениям (компактной) группы N_0 .

Ситуация слегка усложняется для групп $G_i^\vee$, поскольку $G_i = \mathbb{R}$ не компактно. Возьмем, скажем, группу G_1 . Для $t \in G_1$ имеем

$$T(t) = T'_1(t) \exp(t \ln \varphi_i).$$

Здесь два представления группы G_1 : одно T'_1 и другое $\tau_1(t) = \exp(t \ln \varphi_i)$. Для каждого из них нужно проверить непрерывность. Представление T'_1 является композицией представления T'_1 компактной группы G_1/Z_1 и естественной проекции

$G_1 \rightarrow G_1/Z_1$. Для представления компактной группы G_1/Z_1 годится предыдущая конструкция, а непрерывность проекции очевидна. Непрерывность представления $\tau_1(t)$ вытекает из следующего факта: для непрерывной функции $a(\zeta)$, $\zeta \in S$, функция $\exp(ta(\zeta))$ непрерывна по совокупности переменных (t, ζ) . А именно, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $t(\varepsilon) > 0$ так, чтобы при любом t , $|t| < t(\varepsilon)$, выполнялось неравенство $|\exp(ta(\zeta)) - 1| < \varepsilon$ для всех $\zeta \in S$. Достаточно взять

$$t(\varepsilon) = \frac{1}{\|a\|} \ln(1 + \varepsilon), \quad \text{где} \quad \|a\| = \max |a(\zeta)|.$$

Отсюда следует, что

$$\bigvee_{O \in J_0} \bigwedge_{t \in O} [\|\tau_1(t^\vee) - 1\| < \varepsilon^\vee] = 1.$$

Авторы глубоко благодарны В. Г. Кановею за ценное обсуждение этой заметки и благодарят К. Ю. Горбунова за обсуждение и помощь в ее подготовке.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. С. Новиков, “О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств”, Сборник статей: Посв. акад. И. М. Виноградову к его 60-летию, Тр. МИАН, **38**, Наука, М., 1951, 279–316.
- [2] В. А. Любецкий, “Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа”, УМН, **44:4** (1989), 99–153.
- [3] Т. Йех, *Теория множеств и метод форсинга*, Мир, М., 1973.
- [4] Е. И. Гордон, В. А. Любецкий, *Булевозначные расширения равномерных структур I*, деп. в ВИНТИ 711-80.
- [5] В. А. Любецкий, Е. И. Гордон, “Булевы расширения равномерных структур”, Исследования по неклассическим логикам и формальным системам, Наука, М., 1983, 81–153.
- [6] В. Г. Кановой, В. А. Любецкий, “О некоторых классических проблемах дескриптивной теории множеств”, УМН, **58:5** (2003), 3–88.
- [7] М. В. Терентьев, *Введение в теорию элементарных частиц*, ИТЭФ, М., 1998.
- [8] Д. А. Владимиров, *Булевы алгебры*, Наука, М., 1969.
- [9] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, ГИТТЛ, М., 1954.
- [10] М. А. Евграфов, *Аналитические функции*, Наука, М., 1968.
- [11] М. А. Наймарк, *Нормированные кольца*, Наука, М., 1968.
- [12] J. Dixmier, *Les algèbres d’opérateurs dans l’espace Hilbertien (algèbres de von Neumann)*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

В. А. Любецкий

Институт проблем передачи информации РАН

E-mail: lyubetsk@iitp.ru

Поступило

29.11.2005

Исправленный вариант

29.01.2007

С. А. Пирогов

Институт проблем передачи информации РАН

E-mail: pirogov@mail.ru