Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Ядченко, Автоморфизмы и нормальные полугруппы линейных групп, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 3, 469–476

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3842>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 11:09:20

Автоморфизмы и нормальные подгруппы линейных групп

А. А. Ядченко

В данной работе установлены свойства порядков копростых автоморфизмов неприводимых линейных групп и получены достаточные признаки существования нормальной холловской π -подгруппы в π -обособленной неприводимой комплексной линейной группе.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Пусть G – конечная группа, ω – ее автоморфизм простого порядка p такой, что $(|G|, |\omega|) = 1$. Тогда ω называется *копростым автоморфизмом* группы G . Предположим, что G имеет точный ω -инвариантный неприводимый комплексный характер степени n .

Из результатов [1] и [2] вытекает, что при $n < 2p$ число n делится на такую степень $f > 1$ простого числа q , что $f \equiv -1, 1 \pmod{p}$. В [3] доказано, что при $n = q^r$, r – натуральное число, $f = q^\alpha$ для некоторого натурального числа $\alpha \leq r$. В [4] рассматривался случай, когда n – произвольное число и G содержит нильпотентную холлову $\pi(n)$ -подгруппу. Оказалось, что n также делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv -1, 1 \pmod{p}$. В данной работе будет установлено, что n делится на некоторое простое число q такое, что $q \equiv 1 \pmod{p}$ в случае, когда силовская q -подгруппа циклическая для каждого $q \in \pi(n)$ (теорема 1), и n делится на степень $f > 1$ некоторого простого числа такую, что $f \equiv 1 \pmod{p}$, если G содержит разрешимую холлову $\pi(n)$ -подгруппу R такую, что силовская q -подгруппа из R циклическая для каждого $q \in \pi(R')$ (теорема 2). В теореме 3 с помощью теорем 1 и 2 будут установлены достаточные признаки при которых холлова Π -подгруппа Π -обособленной неприводимой комплексной линейной группы G будет абелевой и нормальной в G . Теорема 3 подтверждает в некоторых частных случаях известную гипотезу Айзекса [5] о справедливости теоремы Уинтера о разрешимых неприводимых линейных группах [6] также и для p -разрешимых групп.

2. Некоторые обозначения. Всюду под группой будем понимать конечную группу, под характером – комплексный характер, Π обозначает некоторое множество простых чисел. Π -обособленной называется группа, любой главный фактор которой есть либо Π -группа, либо Π' -группа; если a , b , и c – целые рациональные числа, то выражение $a \equiv b, c \pmod{p}$ означает, что $a \equiv b \pmod{p}$ или $a \equiv c \pmod{p}$; $\varphi_{i=1, t}$ есть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_t$; $\varphi_{i=1, t}(1)$ есть $\varphi_1(1), \varphi_2(1), \dots, \varphi_t(1)$; $\text{Irr}(\varphi_H)$ – множество всех неприводимых компонент характера φ_H . Все остальные обозначения стандартны, их можно найти, например, в [7] и [8].

3. Автоморфизмы неприводимых линейных групп.

ЛЕММА 1. Пусть $G = PO_{p'}(G)$ – группа, где P – p -группа, p – простое число. Если силовская q -подгруппа из G циклическая и p не делит $q - 1$ для каждого простого числа $q \in \pi(G)$, $q \neq p$, то $P \trianglelefteq G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть q – произвольный простой делитель порядка группы G , $q \neq p$, и Q – P -инвариантная силовская q -подгруппа из G . Поскольку подгруппа Q абелева, то по теореме 5.2.3 [7] $Q = [P, Q] \times C_Q(P)$. Предположим, что $[P, Q] \neq 1$. Так как $[P, Q] \trianglelefteq PQ$ и подгруппа $[P, Q]$ циклическая, то подгруппа Q_0 из $[P, Q]$ порядка q будет нормальной в PQ . Рассмотрим подгруппу $G_0 = PQ_0$. Так как $Q_0 \not\subseteq C_Q(P)$ и фактор-группа $G_0/C_{G_0}(Q_0)$ изоморфна подгруппе из $\text{Aut}(Q_0)$, то с учетом того, что $|\text{Aut}(Q_0)| = q - 1$, имеем, что p делит $q - 1$. Получили противоречие с условием леммы. Значит, $[P, Q] = 1$ и, следовательно, $Q \subseteq C_{O_{p'}(G)}(P)$. Поскольку q – произвольный простой делитель из $\pi(G)$, $q \neq p$, имеем, что $O_{p'}(G) \subseteq C_G(P)$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $G = PO_{p'}(G)$ – группа, где P – p -группа, p – простое число. Если $O_{p'}(G)$ содержит разрешимую холлову подгруппу R такую, что силовская q -подгруппа из R циклическая для каждого простого числа $q \in \pi(R')$, то G содержит подгруппу $P^x R$ для некоторого элемента $x \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по порядку группы G . Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой условия леммы выполняются, а ее утверждение – нет. Предварительно заметим, что при $R' = 1$ искомая подгруппа существует по лемме 3 из [4]. Поэтому можем положить, что $R' \neq 1$. Пусть q – такое простое число из $\pi(R')$, что $O_q(R') \neq 1$ и пусть Q – силовская q -подгруппа из R . Тогда $R \subseteq N_G(O_q(R'))$ и $P^x \subseteq N_G(O_q(R'))$, где x – такой элемент из G , что $P^x Q$ подгруппа. Поскольку подгруппа $O_q(R')$ характеристична в R и Q , то такие включения верны. Предположим, что $N = N_G(O_q(R')) \neq G$. Тогда согласно минимальности группы G подгруппа $P^x R$ существует для некоторого элемента $x \in N$. Понятно, что в группе G такая подгруппа тоже существует.

Пусть теперь $N = G$, т.е. $O_q(R') \trianglelefteq G$. Рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/O_q(R')$. Она содержит холлову подгруппу $\overline{R} = R/O_q(R')$ и $\overline{R}' = R'/O_q(R')$, т.е. группа $\overline{G}$ удовлетворяет условиям леммы. Так как $|\overline{G}| < |G|$, то группа $\overline{G}$ удовлетворяет ее заключению. Поэтому группа $\overline{G}$ содержит подгруппу $\overline{P}^{\overline{x}} \overline{R}$ для некоторого элемента $\overline{x} = xO_q(R') \in \overline{G}$. Здесь $\overline{P} = PO_q(R')/O_q(R')$. Очевидно, прообразом в G подгруппы $\overline{P}^{\overline{x}} \overline{R}$ будет искомая подгруппа.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – группа, ω – ее копростой автоморфизм простого порядка p . Предположим G имеет ω -инвариантный точный неприводимый характер степени n . Если силовская q -подгруппа циклическая для каждого простого числа $q \in \pi(n)$, то $q \equiv 1 \pmod{p}$ хотя бы для одного $q \in \pi(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное.

Пусть φ – данный в условии теоремы ω -инвариантный точный неприводимый характер степени n . Предположим, что $q \not\equiv 1 \pmod{p}$ для всех $q \in \pi(n)$. Обозначим $P = \langle \omega \rangle$ и рассмотрим группу $\Gamma = PG$ – полупрямое произведение групп G

и P . Пусть $\pi(n) = \{q_1, q_2, \dots, q_t\}$, где $t \geq 1$. Пусть Q_i – P -инвариантные силовские q_i -подгруппы из G , $q_i \in \pi(n)$. Рассмотрим подгруппы $G_i = PQ_i$, $i = 1, \dots, t$. Поскольку $Q_i \trianglelefteq G_i$, подгруппы Q_i циклические и p не делит $q_i - 1$, то группы G_i , $i = 1, \dots, t$, удовлетворяют условиям леммы 1. Следовательно, по ее заключению $P \trianglelefteq G_i$ для всех $i = 1, \dots, t$, т.е. $Q_i \subseteq C_G(P)$ для всех $i = 1, \dots, t$. Отсюда вытекает, что q_i не делит $|Cl(\omega)| = |G : C_G(P)|$ для всех $i = 1, \dots, t$, т.е. $(|Cl(\omega)|, n) = 1$.

Пусть $\hat{\varphi}$ – каноническое продолжение характера φ на группу Γ , существование которого обусловлено леммой 13.3 [8]. Согласно теореме Бернсайда (теорема 3.8 [8]) $\hat{\varphi}(\omega) = 0$ или $\omega \in Z(\varphi)$.

Если $\hat{\varphi}(\omega) = 0$, то, поскольку $|\langle \omega \rangle| = |P| = p$, по теореме 4.2.7 (ii) из [7] будем иметь, что $\hat{\varphi}_P = k\rho_P$, где k – некоторое натуральное число и ρ_P – регулярный характер подгруппы P . Отсюда вытекает, что $\hat{\varphi}_P(1) = k\rho_P(1)$, т.е. p делит $\hat{\varphi}(1)$. Это противоречит условию теоремы, согласно которому характер φ ω -инвариантный. Пусть теперь $\omega \in Z(\hat{\varphi})$, т.е. $|\hat{\varphi}(\omega)| = \hat{\varphi}(1) = \varphi(1)$. Поскольку $\hat{\varphi}$ – каноническое продолжение характера φ , то по следствию 13.4 из [8] $\hat{\varphi}(\omega)$ – рациональное и, следовательно, по лемме 3.2 из [8] $\hat{\varphi}(\omega)$ – целое число. Поэтому $\hat{\varphi}(\omega) = \varphi(1)$ или $\hat{\varphi}(\omega) = -\varphi(1)$.

Пусть вначале $\hat{\varphi}(\omega) = \varphi(1)$. Это означает, что $P \subseteq \text{Ker } \hat{\varphi}$. Но, так как характер $\hat{\varphi}_G = \varphi$ точный, т.е. $\text{Ker } \hat{\varphi} \cap G = 1$, то $P = \text{Ker } \hat{\varphi}$. Следовательно, $P \trianglelefteq \Gamma$. Поскольку $P = \langle \omega \rangle$, мы получили противоречие с тем, что ω – нетривиальный автоморфизм группы G . Пусть теперь $\hat{\varphi}(\omega) = -\varphi(1)$. Тогда характер $\hat{\varphi}$ точный. По лемме 2.27 (d) [8] $Z(\hat{\varphi}) = Z(\Gamma)$ циклическая группа. Так как $P \subseteq Z(\Gamma)$, имеем, что $P \trianglelefteq \Gamma$. Вновь получили противоречие с тем, что ω – нетривиальный автоморфизм группы G . Это последнее противоречие доказывает теорему.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – группа, ω – ее копростой автоморфизм простого порядка p . Предположим G имеет ω -инвариантный точный неприводимый характер степени n . Предположим также, что G содержит разрешимую холлову $\pi(n)$ -подгруппу R такую, что силовская q -подгруппа из R циклическая для каждого простого числа $q \in \pi(R')$. Тогда n делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv 1 \pmod{p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть φ – данный в условии теоремы ω -инвариантный точный неприводимый характер степени n . Предположим, что n не делится на такую степень $f > 1$ любого простого числа из $\pi(n)$, что $f \equiv 1 \pmod{p}$. Обозначим вновь $P = \langle \omega \rangle$ и рассмотрим группу $\Gamma = PG$ – полупрямое произведение групп G и P . Пусть $\hat{\varphi}$ – каноническое продолжение характера φ на группу Γ . Рассмотрим подгруппу $F = P^x R$, $x \in \Gamma$, группы Γ , существующую согласно лемме 2. Подгруппа R содержит характеристическую подгруппу $R_0 = \langle Q \in \text{Syl}_q(R) \mid q \in \pi(R') \rangle$. Следовательно, мы можем рассмотреть группу $P^x R_0$, где $R_0 \trianglelefteq P^x R_0$. Так как для каждого $q \in \pi(R_0) \subseteq \pi(n)$ число p не делит $q - 1$, по предположению, то по лемме 1 имеем, что $P^x \trianglelefteq P^x R_0$, т.е. $R_0 \subseteq C_G(P^x)$. Поскольку подгруппа R разрешима, то из леммы 8 [9] вытекает, что q не делит $||P^x, R||$, для всех $q \in \pi(R')$.

Рассмотрим случай, когда $[P^x, R] \neq 1$. Пусть $\tau = \pi(n) \setminus \pi(R')$ и L – холлова τ -подгруппа из R такая, что $[P^x, R] \subseteq L$. Так как $R' \subseteq R_0$, то фактор-группа $R/R_0 \simeq L$ абелева. Ясно, что $R = LR_0$, т.е. для каждого элемента $a \in R$ имеем,

что $a = bc$, для некоторых элементов $b \in L$ и $c \in R_0$. Так как $[P^x, R] \trianglelefteq F$, $R_0 \trianglelefteq F$ и $[P^x, R] \cap R_0 = 1$, то $[P^x, R] \subseteq C_F(R_0)$. Следовательно, для каждого элемента $g \in [P^x, R]$ имеем, что

$$ga = g(bc) = (gb)c = (bg)c = b(gc) = b(cg) = (bc)g = ag.$$

Отсюда вытекает, что $g \in Z(R)$, т.е. $[P^x, R] \subseteq Z(R)$. Значит,

$$|Cl(g)| = \frac{|\Gamma|}{|C_\Gamma(g)|}$$

не делится на любое простое число из $\pi(R) = \pi(n)$. Тогда $(\varphi(1), |Cl(g)|) = 1$ для каждого элемента $g \in [P^x, R]$. По теореме Бернсайда $g \in Z(\varphi) = Z(G)$, поскольку характер φ точный, или $\varphi(g) = 0$.

Предположим, что для некоторого неединичного элемента $g_1 \in [P^x, R]$ справедливо $g_1 \in Z(G)$. Поскольку подгруппа $Z(G)$ циклическая, то она содержит подгруппу Z_1 простого порядка $q_1 \in \pi(o(g_1))$ такую, что Z_1 характеристична в $Z(G) \trianglelefteq \Gamma$, т.е. $Z_1 \trianglelefteq \Gamma$. Рассмотрим группу $P^x Z_1$. Так как $Z_1 \subseteq [P^x, R]$ и

$$[P^x, [P^x, R]] = [P^x, R]$$

по лемме 6 [9], то PZ_1 – группа Фробениуса с ядром Z_1 . Следовательно, $|Z_1| = q_1 \equiv 1 \pmod{p}$. Это противоречит нашему предположению.

Итак, $\varphi(g) = 0$ для всех $g \in [P^x, R]$. По упражнению 2.16 [8] $|[P^x, R]|$ делит n . Пусть $q_2 \in \pi([P^x, R])$ и S – P^x -инвариантная силовская q_2 -подгруппа из $[P^x, R]$. Тогда $P^x S$ также группа Фробениуса с ядром S . Следовательно, $|S| = q_2^\alpha \equiv 1 \pmod{p}$, для некоторого натурального числа α . Поскольку q_2^α делит $|[P^x, R]|$, то мы вновь получили противоречие с предположением.

Осталось рассмотреть случай, когда $[P^x, R] = 1$, т.е. $R \subseteq C_G(P^x)$. Как и при доказательстве теоремы 1 имеем случай, когда $(|Cl(\omega^x)|, n) = 1$. Начиная со второго абзаца, приведем доказательство теоремы 1, положив $\omega^x = \omega$, т.е. $\langle \omega^x \rangle = P$.

Теорема доказана.

4. Нормальные подгруппы неприводимых линейных групп.

ТЕОРЕМА 3. Пусть Π -обособленная неприводимая линейная группа G степени n удовлетворяет одному из следующих условий:

- 1) силовская q -подгруппа из G циклическая для каждого простого числа $q \in \pi(n)$;
- 2) G содержит разрешимую холлову $\pi(n)$ -подгруппу R такую, что силовская q -подгруппа из R циклическая для каждого простого числа $q \in \pi(R')$.

Если n не делится на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv 0, 1 \pmod{p}$ для каждого $p \in \Pi$, то холлова Π -подгруппа группы G абелева и нормальна в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по порядку группы G .

Обозначим S_Π -подгруппу группы G через H , $S_{\Pi'}$ -подгруппу группы G через M , а данный в условии теоремы точный неприводимый характер группы G через φ . Пусть также X есть максимальная собственная нормальная подгруппа группы G .

Предположим вначале, что $|G : X|$ есть Π' -число. По теореме Клиффорда 6.2 [8]

$$\varphi_X = e \sum_{i=1}^t \varphi_i,$$

где $\varphi_{i=\overline{1},t} \in \text{Irr}(X)$ и согласно следствию 11.29 [8] e, t – числа, делящие $|G : X|$. Поскольку числа $\varphi_{i=\overline{1},t}(1)$ делят $\varphi(1)$, все силовские подгруппы из

$$\begin{aligned} (R \text{Ker } \varphi_i / \text{Ker } \varphi_i)' &\simeq (R/R \cap \text{Ker } \varphi_i)' \\ &= R'(R \cap \text{Ker } \varphi_i)/(R \cap \text{Ker } \varphi_i) \simeq R'/(R' \cap \text{Ker } \varphi_i), \quad i = 1, \dots, t, \end{aligned}$$

циклические и $\pi(\overline{R'_i}) \subseteq \pi(R')$, где $\overline{R'_i} = R \text{Ker } \varphi_i / \text{Ker } \varphi_i$, то нетрудно заметить, что группы $X/\text{Ker } \varphi_i$, $i = 1, \dots, t$, удовлетворяют обоим условиям теоремы. Так как $|X/\text{Ker } \varphi_i| < |G|$, $i = 1, \dots, t$, согласно индукции

$$H \text{Ker } \varphi_i / \text{Ker } \varphi_i \trianglelefteq X/\text{Ker } \varphi_i, \quad i = 1, \dots, t,$$

т.е. $X/\text{Ker } \varphi_i$ содержит нормальную S_{Π} -подгруппу $H \text{Ker } \varphi_i / \text{Ker } \varphi_i$, $i = 1, \dots, t$. Поскольку $\cap_{i=1}^t (\text{Ker } \varphi_i) = 1$, то X изоморфно вкладывается в прямое произведение

$$\overline{X} = X/\text{Ker } \varphi_1 \times \dots \times X/\text{Ker } \varphi_t.$$

Так как $\overline{X}$ содержит нормальную S_{Π} -подгруппу, то и X также содержит нормальную S_{Π} -подгруппу H , т.е. $H \trianglelefteq G$. Убедимся в том, что подгруппа H абелева. В самом деле, так как подгруппа H нормальна в группе G и $\varphi(1)$ – Π' -число, согласно упомянутой выше теореме Клиффорда все неприводимые компоненты $\nu \in \text{Irr}(\varphi_H)$ линейные. Следовательно, по следствию 2.23 из [8] $H' \subseteq \text{Ker } \nu$ для всех $\nu \in \text{Irr}(\varphi_H)$. Значит, $H' \subseteq \cap_{\nu \in \text{Irr}(\varphi_H)} \text{Ker } \nu = \text{Ker } \varphi = 1$, т.е. подгруппа H абелева. Итак, если $|G : X|$ есть Π' -число, то теорема верна.

Пусть теперь $|G : X|$ есть Π -число.

Рассмотрим вначале случай, когда S_{Π} -подгруппа X_{Π} из X единична. Тогда $X = M$. Рассмотрим подгруппу P_0X , где $|P_0| = p \in \Pi$. Поскольку характер φ_{P_0X} неприводим, то по теоремам 1 и 2 получаем, что $P_0 \trianglelefteq P_0X$, т.е. $P_0 \subseteq C_G(X) \trianglelefteq G$. Так как $C = C_G(X) = C_{\Pi} \times C_{\Pi'}$, то $P_0 \subseteq C_{\Pi} \trianglelefteq G$. Поэтому $C_{\Pi}X \trianglelefteq G$. Из максимальности подгруппы X в группе G имеем, что $C_{\Pi}X = G$, т.е. $H = C_{\Pi}$. Это означает, что $H \trianglelefteq G$. Абелевость подгруппы H установлена выше.

Пусть теперь $X_{\Pi} \neq 1$. Так как характер φ_X неприводим и $R \subseteq X$, то подгруппа X удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы. Поскольку $|X| < |G|$, то по индукции $X_{\Pi} = H \cap X \text{char } X \trianglelefteq G$, т.е. $X_{\Pi} \trianglelefteq G$ и подгруппа X_{Π} абелева. Покажем, что $|G : X| = p$ для некоторого $p \in \Pi$. Предположим противное. Пусть P есть силовская p -подгруппа группы G , $p \in \Pi$. Так как $|G : X| \neq p$, по предположению, и X есть максимальная собственная нормальная подгруппа группы G , то $PX \neq G$. Очевидно, подгруппа PX удовлетворяет условиям теоремы и по индукции по $|G|$ ее утверждениям, т.е. $PX_{\Pi} \trianglelefteq PX$ и подгруппа PX_{Π} абелева. Следовательно, $P \subseteq C_G(X_{\Pi})$ для всех $p \in \Pi$. Значит, $H \subseteq C_G(X_{\Pi})$. Так как $C_G(X_{\Pi}) \trianglelefteq G$ и $|G : C_G(X_{\Pi})|$ по выше установленному факту не может быть Π' -числом, то $C_G(X_{\Pi}) = G$, т.е. $X_{\Pi} \subseteq Z(G)$. Из абелевости подгруппы P для всех $p \in \Pi$ и теоремы 5.6 [8] вытекает, что p не делит $|G' \cap X_{\Pi}|$ для всех $p \in \pi(X_{\Pi})$. Следовательно, $G' \neq G$, и так как группа G не содержит нормальных подгрупп, индекс которых в G есть Π' -число, то $|G : G'|$ есть Π -число. Можем считать, что $G' \subseteq X$ и, следовательно, $|G : X| = p$ для некоторого $p \in \Pi$.

Пусть λ есть линейная неприводимая компонента характера $\varphi_{X_{\Pi}}$ и $T = I_G(\lambda)$. Предположим, что $T = G$. Тогда $\varphi_{X_{\Pi}} = \varphi(1)\lambda$, т.е. $\varphi(x) = \varphi(1)\lambda(x)$ для всех

$x \in X_\Pi$. Значит, $X_\Pi \subseteq Z(\varphi) = Z(G)$ и $X = X_\Pi \times M$, т.е. $M \trianglelefteq G$. Согласно лемме 2 [10] группа G имеет такой неприводимый характер ψ , что $\psi(1) = \varphi(1)$ и $X_\Pi = \text{Ker } \psi$. По индукции

$$H \text{Ker } \psi / \text{Ker } \psi \trianglelefteq G / \text{Ker } \psi,$$

т.е. $H \text{Ker } \psi \trianglelefteq G$, и поскольку $\text{Ker } \psi \subseteq H$, то $H \trianglelefteq G$. Абелевость подгруппы H очевидна.

Пусть теперь $T \neq G$. По теореме 6.11 [8] существует такой характер $\xi \in \text{Irr}(T)$, что $\varphi = \xi^G$ и

$$(\xi_{X_\Pi}, \lambda)_{X_\Pi} \neq 0.$$

Поскольку $\varphi(1) = \xi(1)|G : T|$ есть Π' -число, можем считать, что $H \subseteq T$. Значит, $MT = G$, т.е. $M \cap T$ есть $S_{\Pi'}$ -подгруппа из T .

Обозначим $I = I_X(\lambda)$. Легко видеть, что $I = X_\Pi(M \cap T)$. Тогда из леммы 13.3 [8] вытекает, что существует такое единственное продолжение $\mu \in \text{Irr}(I)$ характера λ , что

$$M \cap T \subseteq \text{Ker}(\det \mu),$$

и так как $\det \mu = \mu$ по упражнению 2.3 [8], то $M \cap T \subseteq \text{Ker } \mu$. Это означает, что $\mu_{M \cap T} = 1_{M \cap T}$. Отсюда, а также того, что

$$X = X_\Pi M = X_\Pi(M \cap T)M = IM,$$

и упражнения 5.2 [8], вытекает, что

$$\begin{aligned} (\mu^X)_M &= (\mu^{IM})_M = (\mu_{I \cap M})^M \\ &= (\mu_{X_\Pi(M \cap T) \cap M})^M = (\mu_{M \cap T})^M = (1_{M \cap T})^M. \end{aligned}$$

Но так как

$$((1_{M \cap T})^M, 1_M)_M \neq 0,$$

из последнего выражения следует, что

$$((\mu^X)_M, 1_M)_M \neq 0. \quad (1)$$

По теореме 6.11 [8] $\mu^X \in \text{Irr}(X)$. Далее, характер $\mu^G = (\mu^X)^G$ является либо неприводимым, либо приводимым.

Предположим сначала, что $\mu^G \in \text{Irr}(G)$. По соответствию Фробениуса для характеров имеем, что

$$(\mu^G, \mu^G)_G = ((\mu^G)_I, \mu)_I \neq 0.$$

Так как $\mu_{X_\Pi} = \lambda$, то

$$((\mu^G)_{X_\Pi}, \lambda)_{X_\Pi} \neq 0.$$

Следовательно,

$$(\mu^G, \lambda^G)_G \neq 0.$$

Отсюда и соответствия Фробениуса для характеров вытекает, что

$$(\mu^G, \lambda^G)_G = \left(((\mu^G)_H)_{X_\Pi}, \lambda \right)_{X_\Pi} = \left(((\mu^G)_H, \lambda^H) \right)_H \neq 0. \quad (2)$$

Поскольку $|H : X_\Pi| = |G : X| = p$ и $H \subseteq T$, то характер λ^H приводим и все его неприводимые компоненты линейны. Пусть τ есть одна из общих неприводимых компонент характеров $(\mu^G)_H$ и λ^H , существующих согласно соотношению (2). Значит,

$$((\mu^G)_H, \tau)_H = (\mu^G, \tau^G)_G \neq 0. \quad (3)$$

С другой стороны, из неравенства (1) вытекает, что

$$\begin{aligned} 0 \neq ((\mu^X)_M, 1_M)_M &\leq \sum_{x \in G/X} \left(((\mu^X)^x)_M, 1_M \right)_M = \left(\left(\sum_{x \in G/X} (\mu^X)^x \right)_M, 1_M \right)_M \\ &= \left(((\mu^G)_X)_M, 1_M \right)_M = ((\mu^G)_M, 1_M)_M = (\mu^G, 1_M^G)_G. \end{aligned}$$

Отсюда, из соотношения (3) и теоремы 2 [10] следует, что $\mu^G(1)$ является Π' -числом. Но

$$\mu^G(1) = |G : I| = |G : X_\Pi(M \cap T)| = \frac{|H||M|}{|X_\Pi||M \cap T|} = p|M : M \cap T|$$

делится на $p = |H : X_\Pi|$. Противоречие.

Пусть теперь характер μ^G не является неприводимым. Значит,

$$\mu^G = \sum_{i=1}^p \psi_i, \quad \psi_{i=\overline{1,p}} \in \text{Irr}(G).$$

Очевидно, что $(\psi_k)_X = \mu^X$ для некоторого $1 \leq k \leq p$. Тогда

$$\psi_k(1) = \mu^X(1) = \mu(1)|X : I| = |X : X_\Pi(M \cap T)| = |X_\Pi M : X_\Pi(M \cap T)| = |M : M \cap T|,$$

и

$$\varphi(1) = \xi(1)|G : T| = \xi(1)|HM : H(M \cap T)| = \xi(1)|M : M \cap T|,$$

т.е. получаем, что $\psi_k(1)$ делит $\varphi(1)$. Далее, из соотношения (1) получаем, что

$$((\mu^X)_M, 1_M)_M = \left(((\psi_k)_X)_M, 1_M \right)_M = ((\psi_k)_M, 1_M)_M = (\psi_k, (1_M)^G)_G \neq 0.$$

Обозначим ядро характера ψ_k через K . Пусть также $\overline{G} = G/K$, $\overline{M} = MK/K$ и $\overline{\psi}_k \in \text{Irr}(\overline{G})$ есть характер, соответствующий в смысле леммы 2.22 из [8] характеру ψ_k группы G , согласно которой $\overline{\psi}_k(gK) = \psi_k(gk) = \psi_k(g)$ для любых $g \in G$ и $k \in K$. По определению 2.16 [8]

$$\begin{aligned} (\psi_k, 1_{MK/K}^{G/K})_{G/K} &= ((\psi_k)_{MK/K}, 1_{MK/K})_{MK/K} \\ &= \frac{1}{|MK/K|} \sum_{gK \in MK/K} (\psi_k)_{MK/K}(gK) 1_{MK/K}(gK) \\ &= \frac{M \cap K}{|M||K|} \sum_{g \in MK} \psi_k(g) = \frac{M \cap K}{|M|} \sum_{g \in \widetilde{M}} \psi_k(g) \\ &= \frac{M \cap K}{|M|} \sum_{g(M \cap K) \in M/M \cap K} (\psi_k)_{M/M \cap K}(g(M \cap K)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|M|} \sum_{g \in M} (\psi_k)_M(g) = ((\psi_k)_M, 1_M)_M \\
&= (\psi_k, 1_M^G)_G \neq 0.
\end{aligned}$$

Выше $\widetilde{M}$ есть множество представителей всех смежных классов M по $M \cap K$, взятых по одному из каждого класса. Как видим

$$(\overline{\psi}_k, (1_{\overline{M}})^{\overline{G}})_{\overline{G}} \neq 0.$$

Мы показали, что группа $\overline{G}$ и характер $\overline{\psi}_k$ удовлетворяют условию теоремы 3 [11]. По этой теореме $HK/K \trianglelefteq G/K$. Отсюда $HK \trianglelefteq G$. Поскольку $(\psi_k)_X = \mu^X$, то

$$K \cap X \subseteq \text{Ker } \mu \subseteq I = X_{\Pi}(M \cap T).$$

Пусть $M \subseteq K$. Но $M \subseteq X$. Тогда из последних включений получаем, что $M \subseteq M \cap T$, т.е. $M \subseteq T$. Так как $H \subseteq T$, то $G = HM \subseteq T$, т.е. $T = G$. В этом случае, как мы убедились, теорема верна. Следовательно, $M \not\subseteq K$ и $HK \neq G$. Это противоречит тому, что группа G не содержит нормальную подгруппу, индекс которой в G есть Π' -число. Итак, и в случае $X_{\Pi} \neq 1$ теорема верна.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. L. Winter, "On the structure of certain p -solvable linear groups", *J. Algebra*, **31**:3 (1974), 543–546.
- [2] I. M. Isaacs, "Complex p -solvable linear groups", *J. Algebra*, **24**:3 (1973), 513–530.
- [3] А. А. Ядченко, А. В. Романовский, "К проблеме Айзекса о конечных p -разрешимых линейных группах", *Матем. заметки*, **69**:1 (2001), 144–152.
- [4] А. А. Ядченко, "О нормальных холловских подгруппах π -обособленных линейных групп", *Весті НАН Беларусі*, **3**:1 (2005), 35–39.
- [5] I. M. Isaacs, "Characters of solvable groups", *The Santa Cruz conference on finite groups* (Univ. California, Santa Cruz, Calif., 1979), Proc. Sympos. Pure Math., **37**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980, 377–384.
- [6] D. L. Winter, "On finite solvable linear groups", *Illinois J. Math.*, **15**:3 (1971), 425–428.
- [7] D. Gorenstein, *Finite groups*, Harper's Series in Modern Mathematics, Harper & Row, New York–London, 1968.
- [8] I. M. Isaacs, *Character theory of finite groups*, Pure Appl. Math. (N. Y.), **69**, Academic Press, New York–London, 1976.
- [9] G. Glauberman, "Correspondence of character for relatively prime groups", *Canad. J. Math.*, **20** (1968), 1465–1488.
- [10] А. В. Романовский, А. А. Ядченко, "О силовских подгруппах линейных групп", *Матем. сб.*, **137**:4 (1988), 568–573.
- [11] А. В. Романовский, А. В. Ядченко, "Мономиальные характеры и нормальные подгруппы конечных групп", *Укр. матем. журн.*, **43**:7–8 (1991), 991–996.

А. А. Ядченко

Институт математики НАН Беларуси

E-mail: yadchenko_56@mail.ru

Поступило

27.02.2006