Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. П. Осиленкер, Об одной экстремальной задаче для алгебраических полиномов в симметричном дискретном пространстве Гегенбауэра–Соболева, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 3, 411–425

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3843>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 11:09:17

УДК 517.538.3

Об одной экстремальной задаче для алгебраических полиномов в симметричном дискретном пространстве Гегенбауэра–Соболева

Б. П. Осиленкер

Изучаются дискретные пространства Соболева с симметричным скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle_\alpha = \int_{-1}^1 fg d\mu_\alpha + M[f(1)g(1) + f(-1)g(-1)] + K[f'(1)g'(1) + f'(-1)g'(-1)],$$

где $M \geq 0$, $K \geq 0$; $d\mu_\alpha(x) = (\Gamma(2\alpha + 2)/(2^{2\alpha+1}\Gamma^2(\alpha + 1)))(1 - x^2)^\alpha dx$, $\alpha > -1$, – вероятностная мера Гегенбауэра. Получено решение следующей экстремальной задачи: вычислить

$$\inf_{a_0, a_1, \dots, a_{N-r}} \left\{ \langle P_N^{(r)}, P_N^{(r)} \rangle_\alpha, 1 \leq r \leq N-1, P_N^{(r)}(x) = \sum_{j=N-r+1}^N a_j^0 x^j + \sum_{j=0}^{N-r} a_j x^j \right\},$$

где a_j^0 , $j = N-r+1, N-r+2, \dots, N-1, N$, $a_N^0 > 0$, – фиксированные числа, и указать экстремальный полином.

Библиография: 26 названий.

1. Введение. Пусть $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство со скалярным произведением $[\cdot, \cdot]$. Рассмотрим в $\mathbb{H}$ последовательность линейно независимых векторов

$$g_0, g_1, g_2, \dots, g_n, \dots \quad (1.1)$$

и назовем *обобщенным полиномом* по данной системе выражение

$$\Pi_n = \sum_{k=0}^n a_k g_k, \quad a_k \in \mathbb{R}^1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Проведя ортогонализацию системы векторов (1.1) по Граму–Шмидту, получим ортонормированную систему элементов

$$\widehat{e}_0, \widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_n, \dots,$$

где

$$\widehat{e}_n = \sum_{s=0}^n l_s^{(n)} g_s, \quad l_n^{(n)} > 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (1.2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00192).

© Б. П. Осиленкер, 2007

Можно обратить матрицу $(l_s^{(n)})$, $s = 0, 1, \dots, n$, и потому

$$g_n = \sum_{s=0}^n \theta_s^{(n)} \widehat{e}_s, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

т.е. совпадают линейные оболочки $L\{\widehat{e}_0, \widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \dots, \widehat{e}_n\} = L\{g_0, g_1, g_2, \dots, g_n\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Среди обобщенных полиномов по системе (1.1) рассмотрим обобщенный полином

$$\Pi_N^{(r)} = a_N^0 g_N + a_{N-1}^0 g_{N-1} + \dots + a_{N-r+1}^0 g_{N-r+1} + \sum_{s=0}^{N-r} a_s g_s, \quad a_N^0 > 0,$$

где $r = 1, 2, \dots, N-1$, с фиксированными коэффициентами $a_N^0, a_{N-1}^0, \dots, a_{N-r+1}^0$. Разложим этот полином по ортонормированной системе $\{\widehat{e}_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, воспользуемся формулами (1.2):

$$\Pi_N^{(r)} = \sum_{j=0}^N \alpha_j^{(N)} \widehat{e}_j = \sum_{j=0}^N \alpha_j^{(N)} \sum_{s=0}^j l_s^{(j)} g_s = \sum_{s=0}^N \left[\sum_{j=s}^N l_s^{(j)} \alpha_j^{(N)} \right] g_s,$$

и сравним коэффициенты при $g_{N-r+1}, \dots, g_{N-1}, g_N$. В силу линейной независимости элементов системы (1.1) получим

$$\sum_{j=s}^N l_s^{(j)} \alpha_j^{(N)} = a_s^0, \quad s = N-r+1, \dots, N-1, N. \quad (1.3)$$

Эта система для определения коэффициентов $\alpha_j^{(N)}$ имеет треугольный вид с ненулевыми элементами на главной диагонали. Решая ее, находим значения $\alpha_j^{(N),0}$. Итак,

$$\Pi_N^{(r)} = \sum_{j=N-r+1}^N \alpha_j^{(N),0} \widehat{e}_j + \sum_{s=0}^{N-r} \alpha_s^{(N)} \widehat{e}_s.$$

Вычислим, используя ортонормированность $\{\widehat{e}_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$[\Pi_N^{(r)}, \Pi_N^{(r)}] = \sum_{j=N-r+1}^N (\alpha_j^{(N),0})^2 + \sum_{s=0}^{N-r} (\alpha_s^{(N)})^2.$$

Получаем следующее утверждение

ЛЕММА 1.1. *Справедливо соотношение*

$$\kappa_N^{(r)} := \inf_{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-r}} [\Pi_N^{(r)}, \Pi_N^{(r)}] = \sum_{j=N-r+1}^N (\alpha_j^{(N),0})^2,$$

где $\alpha_j^{(N),0}$, $j = N-r+1, N-r+2, \dots, N-1, N$, – решение системы (1.3), при этом экстремальный полином имеет следующий вид:

$$\Pi_N^{(r), \text{extr}} = \sum_{j=N-r+1}^N \alpha_j^{(N),0} \widehat{e}_j.$$

Пусть μ_k , $k = 0, 1, 2, \dots, m$, – конечные положительные борелевские меры с носителем на промежутке $[a, b]$. Выражение

$$\langle f, g \rangle = \sum_{s=0}^m \int_a^b f^{(s)}(x) g^{(s)}(x) d\mu_s(x) \quad (1.4)$$

определяет скалярное произведение в линейном пространстве $\mathbb{P}$ полиномов с вещественными коэффициентами. Пополнение $\mathbb{P}$ по норме $|f| = \langle f, f \rangle^{1/2}$ приводит к соответствующему пространству Соболева $\mathbb{S}$. Процесс Грама–Шмидта по отношению к скалярному произведению (1.4), примененный к каноническому базису $\mathbb{P}$, порождает ортонормированную последовательность полиномов $\{\hat{p}_n(x), n \in \mathbb{Z}_+\}$:

$$\hat{p}_n(x) = \hat{k}_n^{(n)} x^n + \hat{k}_{n-1}^{(n)} x^{n-1} + \dots, \quad \hat{k}_n^{(n)} > 0.$$

Как хорошо известно, это скалярное произведение и соответствующая система ортонормированных полиномов находят важные приложения в ряде проблем функционального анализа, теории функций, математической физики и вычислительной математики [1]–[11]. В приложениях они важны при исследовании нагруженных материальных систем.

Рассмотрим полином

$$\Pi_N^{(r)}(x) = \sum_{s=N-r+1}^N a_s^0 x^s + \sum_{s=0}^{N-r} a_s x^s, \quad (1.5)$$

где a_s^0 , $s = N - r + 1, N - r + 2, \dots, N - 1, N$, $a_N^0 > 0$, – фиксированные числа. Разложим его по ортонормированной системе полиномов $\{\hat{p}_j(x), j \in \mathbb{Z}_+\}$:

$$\Pi_N^{(r)}(x) = \sum_{j=0}^N \alpha_j^{(N)} \hat{p}_j(x).$$

Обозначим через $\alpha_s^{(N),0}$, $s = N - r + 1, N - r + 2, \dots, N - 1, N$, решение системы

$$\sum_{j=s}^N \hat{k}_s^{(j)} \alpha_j^{(N)} = a_s^0, \quad s = N - r + 1, N - r + 2, \dots, N - 1, N, \quad (1.6)$$

где $\hat{k}_s^{(n)}$ – коэффициенты полинома $\hat{p}_n(x)$.

Применяя лемму 1.1, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место формула*

$$\begin{aligned} \inf_{a_0, a_1, \dots, a_{N-r}} \left\{ \langle \Pi_N^{(r)}, \Pi_N^{(r)} \rangle, \Pi_N^{(r)}(x) = \sum_{k=N-r+1}^N a_k^0 x^k + \sum_{s=0}^{N-r} a_s x^s, a_N^0 > 0 \right\} \\ = \sum_{j=N-r+1}^N (\alpha_j^{(N),0})^2, \end{aligned}$$

где $\alpha_s^{(N),0}$, $s = N - r + 1, N - r + 2, \dots, N - 1, N$, – решение системы (1.6).

При этом экстремальный полином имеет следующий вид:

$$\Pi_N^{(r), \text{extr}}(x) = \sum_{s=N-r+1}^N \alpha_s^{(N), 0} \hat{p}_s(x).$$

В работе данная экстремальная задача исследуется в модельном случае симметричного дискретного пространства Гегенбауэра–Соболева. Отметим, что в случае непрерывного пространства Соболева асимптотическое поведение решения экстремальной задачи другими методами получено в [12], [13].

2. Экстремальная задача в симметричном дискретном пространстве Гегенбауэра–Соболева. Рассмотрим скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle_\alpha = \int_{-1}^1 fg \, d\mu_\alpha + M[f(1)g(1) + f(-1)g(-1)] + K[f'(1)g'(1) + f'(-1)g'(-1)], \quad (2.1)$$

где $M \geq 0$, $K \geq 0$ и

$$d\mu_\alpha(x) = \frac{\Gamma(2\alpha + 2)}{2^{2\alpha+1}\Gamma^2(\alpha + 1)} (1 - x^2)^\alpha dx, \quad \alpha > -1,$$

– вероятностная мера Гегенбауэра. Пространство $\mathbb{S}_\alpha$ со скалярным произведением (2.1) назовем *симметричным дискретным пространством Гегенбауэра–Соболева*.

Определим классические полиномы Гегенбауэра $R_n^{(\alpha)}(x)$ (ультрасферические полиномы) по формуле Родрига

$$R_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha + 1)}{2^n \Gamma(n + \alpha + 1)} (1 - x^2)^{-\alpha} ((1 - x^2)^{n+\alpha})^{(n)}, \quad \alpha > -1. \quad (2.2)$$

Тогда

$$\int_{-1}^1 R_m^{(\alpha)}(x) R_n^{(\alpha)}(x) (1 - x^2)^\alpha dx = 0, \quad m \neq n, \quad m, n \in \mathbb{Z}_+,$$

с начальным условием $R_n^{(\alpha)}(1) = 1$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

ЛЕММА 2.1 [14; гл. IV, с. 96]; [15; с. 269–270]. Для коэффициентов полинома Гегенбауэра

$$R_n^{(\alpha)}(x) = k(R_n^{(\alpha)})x^n + l(R_n^{(\alpha)})x^{n-2} + \dots \quad (2.3)$$

имеют место формулы

$$k(R_n^{(\alpha)}) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(2n + 2\alpha + 1)}{2^n \Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + 2\alpha + 1)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.4a)$$

$$l(R_n^{(\alpha)}) = -\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{2^n} \frac{(n - 1)n\Gamma(2n + 2\alpha - 1)}{\Gamma(n + \alpha)\Gamma(n + 2\alpha + 1)}, \quad n \geq 2. \quad (2.4b)$$

Бэвинк и Мейер [16], [17] ввели полиномы $\{B_n^{(\alpha)}(x) = B_n^{(\alpha)}(x; M, K)\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, ортогональные по отношению к скалярному произведению (2.1)

$$\langle B_m^{(\alpha)}(x; M, K), B_n^{(\alpha)}(x; M, K) \rangle_\alpha = 0, \quad m \neq n, \quad m, n \in \mathbb{Z}_+,$$

нормированные условием

$$B_n^{(\alpha)}(x; 0, 0) = R_n^{(\alpha)}(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

и доказали следующее представление (см. также [18]):

$$B_n^{(\alpha)}(x) = a_n(1-x^2)^2\{R_n^{(\alpha)}(x)\}^{(4)} + b_n(1-x^2)\{R_n^{(\alpha)}(x)\}^{(2)} + c_n R_n^{(\alpha)}(x), \quad (2.5)$$

где

$$a_n = MK \frac{1}{(\alpha+1)_3(\alpha+2)} \frac{(n-1)n(n+\alpha+2)}{n+2\alpha+1} (\delta_n^{(\alpha)})^2 + K \frac{1}{2(\alpha+1)_3} n \delta_n^{(\alpha)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.6)$$

$$b_n = -K \frac{1}{2(\alpha+1)(\alpha+3)} (n-2)n(n+2\alpha+3)\delta_n^{(\alpha)} - M \frac{2}{n+2\alpha+1} \delta_n^{(\alpha)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.7)$$

$$c_n = 1 - K \frac{1}{2(\alpha+1)_3} (n-2)_3(n+2\alpha+2)_2 \delta_n^{(\alpha)}, \quad n = 3, 4, \dots, \quad c_0 = c_1 = c_2 = 1, \quad (2.8)$$

$$\delta_n^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(n+2\alpha+2)}{\Gamma(2\alpha+3)n!}, \quad n \in \mathbb{Z}_+; \quad (2.9)$$

как обычно, $(d)_n$ есть сдвинутый факториал, определенный по формуле

$$(d)_n = d(d+1) \cdots (d+n-1) = \frac{\Gamma(n+d)}{\Gamma(d)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (d)_0 = 1.$$

Пусть

$$\{\widehat{B}_n^{(\alpha)}(x) = \widehat{B}_n^{(\alpha)}(x; M, K) = k(\widehat{B}_n^{(\alpha)})x^n + l(\widehat{B}_n^{(\alpha)})x^{n-2} + \dots\}, \quad x \in [-1, 1], \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

– ортонормированные полиномы Гегенбауэра–Соболева (симметричные дискретные ортонормированные полиномы Гегенбауэра–Соболева; при $\alpha = 0$ – полиномы Лежандра–Соболева):

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{2^{2\alpha+1}\Gamma^2(\alpha+1)} \int_{-1}^1 \widehat{B}_m^{(\alpha)}(x) \widehat{B}_n^{(\alpha)}(x) (1-x^2)^\alpha dx \\ & + M[\widehat{B}_m^{(\alpha)}(1)\widehat{B}_n^{(\alpha)}(1) + \widehat{B}_m^{(\alpha)}(-1)\widehat{B}_n^{(\alpha)}(-1)] \\ & + K[\{\widehat{B}_m^{(\alpha)}\}'(1)\{\widehat{B}_n^{(\alpha)}\}'(1) + \{\widehat{B}_m^{(\alpha)}\}'(-1)\{\widehat{B}_n^{(\alpha)}\}'(-1)] = \delta_{m,n}, \\ & m, n \in \mathbb{Z}_+, \quad M \geq 0, \quad K \geq 0. \end{aligned}$$

Отметим, что ряд свойств ортонормированных полиномов Гегенбауэра–Соболева $\widehat{B}_n^{(\alpha)}(x)$ отличны от соответствующих свойств классических ортонормированных полиномов Гегенбауэра $\widehat{R}_n^{(\alpha)}(x)$ (не выполняется трехчленное рекуррентное соотношение; иное распределение нулей; линейный дифференциальный оператор, собственными функциями которого являются полиномы $\widehat{B}_n^{(\alpha)}(x)$, имеет, вообще говоря, бесконечный порядок, и т.д.) [16]–[25].

В решении экстремальной задачи основную роль играет вычисление нормы симметричных ортогональных полиномов Гегенбауэра–Соболева.

Очевидно,

$$\widehat{B}_n^{(\alpha)}(x) = \lambda_n^{(n)} B_n^{(\alpha)}(x), \quad (2.10)$$

где

$$(\lambda_n^{(n)})^{-2} = \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{2^{2\alpha+1}\Gamma^2(\alpha+1)} \int_{-1}^1 [B_n^{(\alpha)}(x)]^2 (1-x^2)^\alpha dx + 2M[B_n^{(\alpha)}(1)]^2 + 2K[\{B_n^{(\alpha)}\}'(1)]^2.$$

ЛЕММА 2.2 [24] ($\alpha = 0, M = 0$), [25] ($N = 0$). *Справедливо следующее представление:*

$$\begin{aligned} (\lambda_n^{(n)})^{-2} &= \langle B_n^{(\alpha)}(x; M, K), B_n^{(\alpha)}(x; M, K) \rangle_\alpha \\ &= \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{2n+2\alpha+1} \frac{n!}{\Gamma(n+2\alpha+1)} \Omega_n^{(\alpha)}(M, K) \Omega_{n+2}^{(\alpha)}(M, K), \quad n \in \mathbb{Z}_+; \end{aligned} \quad (2.11)$$

здесь

$$\Omega_n^{(\alpha)}(M, K) = MK\zeta_n^{(\alpha)} + K\nu_n^{(\alpha)} + M\theta_n^{(\alpha)} + 1, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_n^{(\alpha)} &= \frac{1}{(\alpha+1)_3(\alpha+2)\Gamma^2(2\alpha+3)} \\ &\times (n-3)(n-2) \frac{\Gamma(n+2\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+3)}{[(n-2)!]^2}, \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \nu_n^{(\alpha)} &= \frac{\Gamma(n+2\alpha+2)}{2(\alpha+1)_3\Gamma(2\alpha+3)(n-3)!} \\ &\times [(\alpha+2)n^2 + (\alpha+2)(2\alpha-1)n - 2(\alpha+1)(2\alpha+3)], \quad n \geq 3, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\theta_n^{(\alpha)} = \frac{2}{\Gamma(2\alpha+3)} \frac{\Gamma(n+2\alpha+1)}{(n-2)!}, \quad n \geq 2. \quad (2.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $n = 4, 5, \dots$. Формула (3.9) из [18] в наших обозначениях (в статье [18] были использованы другие обозначения параметров) имеет вид

$$\begin{aligned} (\lambda_n^{(n)})^{-2} &= 2Mc_n^2 + 2K \left[\frac{n(n+2\alpha+1)}{2(\alpha+1)} + M \frac{(n+2\alpha+2)n(n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \delta_n^{(\alpha)} \right]^2 \\ &+ \frac{1}{2(\alpha+1)} \frac{n+2\alpha+1}{2n+2\alpha+1} \frac{1}{\delta_n^{(\alpha)}} [(n-3)_4(n+2\alpha+1)_4 a_n^2 \\ &\quad + n(n-1)(n+2\alpha+1)(n+2\alpha+2)b_n^2 \\ &\quad - 2(n-3)_4(n+2\alpha+1)(n+2\alpha+2)a_nb_n \\ &\quad + c_n^2 - 2(n-1)nb_nc_n + 2(n-3)_4a_nc_n], \end{aligned} \quad (2.16)$$

где a_n, b_n, c_n определены по формулам (2.6)–(2.9). Поскольку (см. (2.9))

$$\frac{1}{2(\alpha+1)} \frac{n+2\alpha+1}{2n+2\alpha+1} \frac{1}{\delta_n^{(\alpha)}} = \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{2n+2\alpha+1} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2\alpha+1)},$$

получаем

$$(\lambda_n^{(n)})^{-2} = \frac{\Gamma(2\alpha + 2)}{2n + 2\alpha + 1} \frac{n!}{\Gamma(n + 2\alpha + 1)} \times \{K^2[A_n M^2 + B_n M + C_n] + K[D_n M^2 + E_n M + F_n] + T_n M^2 + L_n M + R_n\}. \quad (2.17)$$

Найдем коэффициенты в соотношении (2.17). Подставляя значения a_n , b_n , c_n (см. формулы (2.6)–(2.9)) в (2.16), получаем коэффициенты при K^2 в (2.17):

$$A_n = \frac{[\delta_n^{(\alpha)}]^4}{(\alpha + 1)_3^2 (\alpha + 2)^2} \frac{(n - 3)_4 (n - 1)^2 n^2 (n + 2\alpha + 2)^2}{n + 2\alpha + 1}, \quad (2.18)$$

$$B_n = \frac{[\delta_n^{(\alpha)}]^3}{2(\alpha + 1)_3^2 (\alpha + 2)} \frac{1}{n + 2\alpha + 1} (n - 2)(n - 1)^2 n^2 (n + 2\alpha + 2)^2 (n + 2\alpha + 3) \times [(\alpha + 2)n^4 + 2(\alpha + 2)(2\alpha + 1)n^3 + (6\alpha^3 + 15\alpha^2 - 14)n^2 + (4\alpha^4 + 8\alpha^3 - 15\alpha^2 - 41\alpha - 16)n - 2(\alpha + 1)(\alpha + 2)(2\alpha + 1)(2\alpha + 3)], \quad (2.19)$$

$$C_n = \frac{[\delta_n^{(\alpha)}]^2}{4(\alpha + 1)_3^2} (n - 2)(n - 1)n^2 (n + 2\alpha + 2)(n + 2\alpha + 3) \times [(\alpha + 2)n^4 + 2(\alpha + 2)(2\alpha + 1)n^3 + (\alpha + 2)(4\alpha^3 + 8\alpha^2 - 5\alpha - 14)n^2 + 2(\alpha + 2)(4\alpha^3 + 16\alpha^2 + 23\alpha + 8)n + 4(\alpha + 1)(2\alpha + 3)]. \quad (2.20)$$

Принимая во внимание (2.13) и (2.14), из (2.18)–(2.20) имеем

$$A_n = \zeta_n^{(\alpha)} \zeta_{n+2}^{(\alpha)}, \quad B_n = \zeta_n^{(\alpha)} \nu_{n+2}^{(\alpha)} + \zeta_{n+2}^{(\alpha)} \nu_n^{(\alpha)}, \quad C_n = \nu_n^{(\alpha)} \nu_{n+2}^{(\alpha)}.$$

Поэтому выражение, содержащее K^2 в (2.17), имеет следующий вид:

$$K^2 \{ \zeta_n^{(\alpha)} \zeta_{n+2}^{(\alpha)} M^2 + [\zeta_n^{(\alpha)} \nu_{n+2}^{(\alpha)} + \zeta_{n+2}^{(\alpha)} \nu_n^{(\alpha)}] M + \nu_n^{(\alpha)} \nu_{n+2}^{(\alpha)} \}. \quad (2.21)$$

Найдем коэффициенты при K . Как следует из (2.16),

$$D_n = [\delta_n^{(\alpha)}]^3 \left[\frac{4}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)^2} \frac{(2n + 2\alpha + 1)(n + 2\alpha + 2)^2 n^2 (n - 1)^2}{n + 2\alpha + 1} + \frac{4}{(\alpha + 1)_3 (\alpha + 2)} \frac{(n - 3)(n - 2)(n - 1)^2 n^2 (n + 2\alpha + 2)^2}{n + 2\alpha + 1} \right] = \frac{4[\delta_n^{(\alpha)}]^3}{(\alpha + 1)_3 (\alpha + 2)} \frac{(n - 1)^2 n^2 (n + 2\alpha + 2)^2}{n + 2\alpha + 1} [n^2 + (2\alpha + 1)n + (2\alpha^2 + 7\alpha + 9)].$$

В силу определений (2.13) и (2.15) следует

$$D_n = \zeta_n^{(\alpha)} \theta_{n+2}^{(\alpha)} + \zeta_{n+2}^{(\alpha)} \theta_n^{(\alpha)}. \quad (2.22)$$

Аналогично

$$E_n = \frac{2[\delta_n^{(\alpha)}]^2}{(\alpha+1)_3(\alpha+2)} \frac{n(n-1)(n+2\alpha+2)}{n+2\alpha+1} \times [(\alpha^2+4\alpha+5)n^4+2(2\alpha^3+9\alpha^2+14\alpha+5)n^3+ (4\alpha^4+16\alpha^3+31\alpha^2+40\alpha+31)n^2+ (-8\alpha^4+16\alpha^3+26\alpha^2+68\alpha+26)n+ 4(\alpha+1)(\alpha+2)(2\alpha+1)(2\alpha+3)],$$

и в силу (2.13)–(2.15) получаем

$$E_n = \nu_n^{(\alpha)}\theta_{n+2}^{(\alpha)} + \nu_{n+2}^{(\alpha)}\theta_n^{(\alpha)} + \zeta_n^{(\alpha)} + \zeta_{n+2}^{(\alpha)}. \quad (2.23)$$

Как и выше, из (2.16) вытекает

$$F_n = n \frac{\delta_n^{(\alpha)}}{(\alpha+1)_3} [(\alpha+2)(\alpha+3)n(2n+2\alpha+1)(n+2\alpha+1) - (n-2)(n-1)(2n+2\alpha+2)(2n+2\alpha+3) + (\alpha+2)(n-2)_3(n+2\alpha+3) + (n-3)_4],$$

и прямым вычислением получаем

$$F_n = \frac{1}{(\alpha+1)_3} n\delta_n^{(\alpha)} [(\alpha+2)n^4+2(\alpha+2)(2\alpha+1)n^3+ (6\alpha^3+23\alpha^2+34\alpha+22)n^2+ (2\alpha+1)(2\alpha^3+11\alpha^2+25\alpha+20)n-4(\alpha+1)(2\alpha+3)].$$

В силу обозначений (2.14)

$$F_n = \nu_n^{(\alpha)} + \nu_{n+2}^{(\alpha)}. \quad (2.24)$$

Собирая вместе слагаемые из (2.22)–(2.24), получаем следующее представление коэффициента в (2.17), содержащего K :

$$K\{[\zeta_n^{(\alpha)}\theta_{n+2}^{(\alpha)}+\zeta_{n+2}^{(\alpha)}\theta_n^{(\alpha)}]M^2+[\nu_n^{(\alpha)}\theta_{n+2}^{(\alpha)}+\nu_{n+2}^{(\alpha)}\theta_n^{(\alpha)}+\zeta_n^{(\alpha)}+\zeta_{n+2}^{(\alpha)}]M+[\nu_n^{(\alpha)}+\nu_{n+2}^{(\alpha)}]\}. \quad (2.25)$$

Найдем оставшиеся коэффициенты в (2.17). Используя (2.15), из (2.16) получаем

$$T_n = \frac{4}{\Gamma^2(2\alpha+3)} \frac{\Gamma(n+2\alpha+1)}{(n-2)!} \frac{\Gamma(n+2\alpha+3)}{n!} = \theta_n^{(\alpha)}\theta_{n+2}^{(\alpha)},$$

$$L_n = \frac{4}{\Gamma(2\alpha+3)} \frac{\Gamma(n+2\alpha+1)}{n+1} [n^2+(2\alpha+1)n+(\alpha+1)(2\alpha+1)] = \theta_n^{(\alpha)} + \theta_{n+2}^{(\alpha)},$$

$$R_n = 1.$$

Последние три формулы дают следующее представление для выражения в (2.17), не содержащего K :

$$\theta_n^{(\alpha)}\theta_{n+2}^{(\alpha)}M^2 + [\theta_n^{(\alpha)} + \theta_{n+2}^{(\alpha)}]M + 1. \quad (2.26)$$

Окончательно, подставляя выражения (2.21), (2.25) и (2.26) в (2.17), получаем

$$\begin{aligned}
 (\lambda_n^{(n)})^{-2} &= \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{2n+2\alpha+1} \frac{n!}{\Gamma(n+2\alpha+1)} \\
 &\times \{ [\zeta_n^{(\alpha)} \zeta_{n+2}^{(\alpha)} M^2 + (\zeta_n^{(\alpha)} \nu_{n+2}^{(\alpha)} + \zeta_{n+2}^{(\alpha)} \nu_n^{(\alpha)}) M + \nu_n^{(\alpha)} \nu_{n+2}^{(\alpha)}] K^2 \\
 &\quad + [(\zeta_n^{(\alpha)} \theta_{n+2}^{(\alpha)} + \zeta_{n+2}^{(\alpha)} \theta_n^{(\alpha)}) M^2 + (\nu_n^{(\alpha)} \theta_{n+2}^{(\alpha)} + \nu_{n+2}^{(\alpha)} \theta_n^{(\alpha)}) \\
 &\quad + \zeta_n^{(\alpha)} + \zeta_{n+2}^{(\alpha)}] M + \nu_n^{(\alpha)} + \nu_{n+2}^{(\alpha)}] K \\
 &\quad + \theta_n^{(\alpha)} \theta_{n+2}^{(\alpha)} M^2 + (\theta_n^{(\alpha)} + \theta_{n+2}^{(\alpha)}) M + 1 \},
 \end{aligned}$$

что, как нетрудно видеть, совпадает с (2.11) и (2.12). Лемма 2.2 доказана при $n = 4, 5, \dots$. Покажем справедливость формул (2.11)–(2.15) в случае $n = 0, 1, 2, 3$. Действительно, из (2.11)–(2.15) при этих значениях “ n ” имеем

$$\begin{aligned}
 \Omega_0^{(\alpha)}(M, K) &= \Omega_1^{(\alpha)}(M, K) = 1, \quad \Omega_2^{(\alpha)}(M, K) = 2M + 1, \\
 \Omega_3^{(\alpha)}(M, K) &= 2(2\alpha + 3)(M + K) + 1, \\
 \Omega_4^{(\alpha)}(M, K) &= \frac{4(2\alpha + 3)^2(2\alpha + 5)}{\alpha + 1} MK \\
 &\quad + \frac{2(2\alpha + 5)(2\alpha + 3)^2}{\alpha + 1} K + 2(\alpha + 2)(2\alpha + 3)M + 1, \\
 \Omega_5^{(\alpha)}(M, K) &= \frac{4}{3} \frac{(2\alpha + 3)^2(2\alpha + 5)^2(2\alpha + 7)}{\alpha + 1} MK \\
 &\quad + \frac{\Gamma(2\alpha + 7)}{2(\alpha + 1)_3 \Gamma(2\alpha + 3)} (3\alpha^2 + 15\alpha + 17)K + \frac{1}{3} \frac{\Gamma(2\alpha + 6)}{\Gamma(2\alpha + 3)} M + 1.
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

С другой стороны, из соотношений (2.5)–(2.9) следует

$$\begin{aligned}
 B_0^{(\alpha)}(x) &= 1, \quad B_1^{(\alpha)}(x) = x, \\
 B_2^{(\alpha)}(x) &= \frac{1}{2(\alpha + 1)} \{ (2\alpha + 3)(2M + 1)x^2 - [2(2\alpha + 3)M + 1] \}, \\
 B_3^{(\alpha)}(x) &= \left[\frac{(2\alpha + 3)(2\alpha + 5)}{\alpha + 1} M + \frac{(2\alpha + 3)(2\alpha + 5)}{\alpha + 1} K + \frac{2\alpha + 5}{2(\alpha + 1)} \right] x^3 \\
 &\quad - \left[\frac{(2\alpha + 3)(2\alpha + 5)}{\alpha + 1} M + \frac{3(2\alpha + 3)(2\alpha + 5)}{\alpha + 1} K + \frac{3}{2(\alpha + 1)} \right] x.
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Поэтому по определению скалярного произведения (2.1) получаем

$$\begin{aligned}
 \langle B_0^{(\alpha)}(x; M, K), B_0^{(\alpha)}(x; M, K) \rangle_\alpha &= 2M + 1 = \Omega_0^{(\alpha)}(M, K) \Omega_2^{(\alpha)}(M, K), \\
 \langle B_1^{(\alpha)}(x; M, K), B_1^{(\alpha)}(x; M, K) \rangle_\alpha \\
 &= 2(M + K) + \frac{1}{2\alpha + 3} = \frac{1}{2\alpha + 3} \Omega_1^{(\alpha)}(M, N) \Omega_3^{(\alpha)}(M, K),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle B_2^{(\alpha)}(x; M, K), B_2^{(\alpha)}(x; M, K) \rangle_\alpha \\
&= \frac{8(2\alpha+3)^2}{(\alpha+1)^2} (M^2K + MK) + \frac{2(2\alpha+3)^2}{(\alpha+1)^2} K \\
&\quad + \frac{4(\alpha+2)(2\alpha+3)}{(\alpha+1)(2\alpha+5)} M^2 + \frac{2(2\alpha^2+7\alpha+7)}{(\alpha+1)(2\alpha+5)} M + \frac{1}{(\alpha+1)(2\alpha+5)} \\
&= \frac{2\Gamma(2\alpha+2)}{(2\alpha+5)\Gamma(2\alpha+3)} \Omega_2^{(\alpha)}(M, K) \Omega_4^{(\alpha)}(M, K), \\
& \langle B_3^{(\alpha)}(x; M, K), B_3^{(\alpha)}(x; M, K) \rangle_\alpha \\
&= \frac{8(2\alpha+3)^2(2\alpha+5)^2}{(\alpha+1)^2} (MK^2 + M^2K) \\
&\quad + \frac{8(2\alpha+3)(2\alpha+5)(7\alpha^2+36\alpha+44)}{(\alpha+1)^2(2\alpha+7)} MK + \frac{4(\alpha+2)(2\alpha+3)(2\alpha+5)}{(\alpha+1)(2\alpha+7)} M^2 \\
&\quad + \frac{6}{(\alpha+1)^2(2\alpha+7)} (6\alpha^3+45\alpha^2+110\alpha+86)K + \frac{2(2\alpha^2+9\alpha+13)}{(\alpha+1)(2\alpha+7)} M \\
&\quad + \frac{3}{(\alpha+1)(2\alpha+3)(2\alpha+7)} \\
&= \frac{6\Gamma(2\alpha+2)}{(2\alpha+7)\Gamma(2\alpha+5)} \Omega_3^{(\alpha)}(M, K) \Omega_5^{(\alpha)}(M, K).
\end{aligned}$$

Лемма 2.2 полностью доказана.

ЛЕММА 2.3. Для коэффициентов полинома $B_n^{(\alpha)}(x) = B_n^{(\alpha)}(x; M, K)$, $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$B_n^{(\alpha)}(x) = k(B_n^{(\alpha)})x^n + l(B_n^{(\alpha)})x^{n-2} + \dots \quad (2.29)$$

справедливо следующее представление:

$$k(B_n^{(\alpha)}) = \Omega_n^{(\alpha)}(M, K)k(R_n^{(\alpha)}), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned}
l(B_n^{(\alpha)}) = & \left\{ \Omega_n^{(\alpha)}(M, K) + MK \frac{8(n-3)(n-2)}{(\alpha+1)_3 \Gamma^2(2\alpha+3)} \frac{\Gamma(n+2\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+3)}{n!(n-2)!} \right. \\
& + K \frac{2(n-2)(n+2\alpha-1)}{(\alpha+1)\Gamma(2\alpha+3)} \frac{\Gamma(n+2\alpha+2)}{(n-1)!} \\
& \left. + M \frac{4}{\Gamma(2\alpha+2)} \frac{\Gamma(n+2\alpha+1)}{n!} \right\} l(R_n^{(\alpha)}), \quad n \geq 2, \quad (2.31)
\end{aligned}$$

где $k(R_n^{(\alpha)})$, $l(R_n^{(\alpha)})$, $\Omega_n^{(\alpha)}(M, K)$ определены в (2.4a), (2.4b), (2.12)–(2.15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, прежде всего, что формула (2.30) справедлива при $n = 0, 1, 2$. Действительно, из формул (2.4a), (2.4b), (2.27), (2.28) получаем

$$\begin{aligned}
k(B_0^{(\alpha)}) &= 1, & \Omega_0^{(\alpha)}(M, K) &= 1, & k(R_0^{(\alpha)}) &= 1, \\
k(B_1^{(\alpha)}) &= 1, & \Omega_1^{(\alpha)}(M, K) &= 1, & k(R_1^{(\alpha)}) &= 1, \\
k(B_2^{(\alpha)}) &= \frac{(2\alpha+3)(2M+1)}{2(\alpha+1)}, & \Omega_2^{(\alpha)}(M, K) &= 2M+1, & k(R_2^{(\alpha)}) &= \frac{2\alpha+3}{2(\alpha+1)},
\end{aligned}$$

что и доказывает (2.30) при $n = 0, 1, 2$.

Подставим (2.3) и (2.29) в (2.5):

$$\begin{aligned} k(B_n^{(\alpha)})x^n + l(B_n^{(\alpha)})x^{n-2} + \dots \\ = a_n(x^4 - 2x^2 + 1)[(n-3)_4k(R_n^{(\alpha)})x^{n-4} + (n-5)_4l(R_n^{(\alpha)})x^{n-6} + \dots] \\ + b_n(1-x^2)[(n-1)nk(R_n^{(\alpha)})x^{n-2} + (n-3)(n-2)l(R_n^{(\alpha)})x^{n-4} + \dots] \\ + c_n[k(R_n^{(\alpha)})x^n + l(R_n^{(\alpha)})x^{n-2} + \dots]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Сравним в этом равенстве коэффициенты при x^n :

$$k(B_n^{(\alpha)}) = [(n-3)_4a_n - (n-1)nb_n + c_n]k(R_n^{(\alpha)}),$$

и подставим значения a_n , b_n , c_n из (2.6)–(2.9), получим ($n \geq 3$)

$$\begin{aligned} (n-3)_4a_n - (n-1)nb_n + c_n \\ = MK \frac{1}{(\alpha+1)_3(\alpha+2)\Gamma^2(2\alpha+3)} \frac{(n-3)_4\Gamma(n+2\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+3)}{(n-2)!n!} \\ + K \frac{1}{2(\alpha+1)_3\Gamma(2\alpha+3)} \frac{(n-3)_4\Gamma(n+2\alpha+2)}{(n-1)!} \\ + K \frac{1}{2(\alpha+1)(\alpha+3)\Gamma(2\alpha+3)} \frac{(n-1)n(n-2)(n+2\alpha+3)\Gamma(n+2\alpha+2)}{(n-1)!} \\ - K \frac{1}{2(\alpha+1)_3\Gamma(2\alpha+3)} \frac{\Gamma(n+2\alpha+4)}{(n-3)!} \\ + M \frac{2}{\Gamma(2\alpha+3)} \frac{(n-1)n\Gamma(n+2\alpha+1)}{n!} + 1, \end{aligned}$$

откуда в силу (2.12)–(2.15) вытекает

$$(n-3)_4a_n - (n-1)nb_n + c_n = \Omega_n^{(\alpha)}(M, K) \quad (2.33)$$

и, следовательно, формула (2.30).

В силу (2.4a) и (2.4b) имеем

$$k(R_n^{(\alpha)}) = -\frac{2(2n+2\alpha-1)}{(n-1)n} l(R_n^{(\alpha)}).$$

Поэтому, сравнивая коэффициенты при x^{n-2} в соотношении (2.32), получаем

$$\begin{aligned} l(B_n^{(\alpha)}) &= a_n[(n-5)_4l(R_n^{(\alpha)}) - 2(n-3)_4k(R_n^{(\alpha)})] \\ &\quad + b_n[(n-1)nk(R_n^{(\alpha)}) - (n-3)(n-2)l(R_n^{(\alpha)})] + c_nl(R_n^{(\alpha)}) \\ &= l(R_n^{(\alpha)})\{[(n-5)_4 + 4(n-3)(n-2)(2n+2\alpha-1)]a_n \\ &\quad - [(n-3)(n-2) + 2(2n+\alpha-1)]b_n + c_n\} \\ &= \{[(n-3)_4a_n - (n-1)nb_n + c_n] \\ &\quad + 8(\alpha+2)(n-3)(n-2)a_n - 4(\alpha+1)b_n\}l(R_n^{(\alpha)}). \end{aligned}$$

Соотношение (2.33) дает

$$l(B_n^{(\alpha)}) = [\Omega_n^{(\alpha)}(M, K) + 8(\alpha+2)(n-3)(n-2)a_n - 4(\alpha+1)b_n]l(R_n^{(\alpha)}).$$

Подставляя сюда следующее равенство, вытекающее из (2.6), (2.7) и (2.9),

$$\begin{aligned} & 8(\alpha+2)(n-3)(n-2)a_n - 4(\alpha+1)b_n \\ &= MK \frac{8(n-3)(n-2)}{(\alpha+1)_3 \Gamma^2(2\alpha+3)} \frac{\Gamma(n+2\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+3)}{(n-2)!n!} \\ &+ K \frac{2(\alpha+2)(\alpha+3)}{(\alpha+1)_3 \Gamma(2\alpha+3)} (n-2)(n+2\alpha-1) \frac{\Gamma(n+2\alpha+2)}{(n-1)!} \\ &+ M \frac{8(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+3)} \frac{\Gamma(n+2\alpha+1)}{n!}, \end{aligned}$$

получаем соотношение (2.31).

Лемма 2.3 доказана.

Рассмотрим ортонормированный полином Гегенбауэра–Соболева

$$\widehat{B}_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \widehat{k}_{n-2s}^{(n)} x^{n-2s}.$$

Отметим, что $\widehat{k}_n^{(n)} = k(\widehat{B}_n^{(\alpha)})$, $\widehat{k}_{n-2}^{(n)} = l(\widehat{B}_n^{(\alpha)})$ – коэффициенты полинома $\widehat{B}_n^{(\alpha)}(x)$ при x^n и x^{n-2} , соответственно.

Полином $P_N^{(r)}(x)$, определенный в правой части (1.5), разложим по системе $\{\widehat{B}_n^{(\alpha)}(x)\}$, $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$P_N^{(r)}(x) = \sum_{s=0}^N \gamma_s^{(N)} \widehat{B}_s^{(\alpha)}(x).$$

Учитывая способ получения (1.6), определим числа $\gamma_i^{(N),0}$ как решение системы

$$\begin{cases} \sum_{s=0}^m \gamma_{N-2s}^{(N)} \widehat{k}_{N-2m}^{(N-2s)} = a_{N-2m}^0, & m = 0, 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor, \\ \sum_{s=0}^m \gamma_{N-(2s+1)}^{(N)} \widehat{k}_{N-(2m+1)}^{(N-(2s+1))} = a_{N-(2m+1)}^0, & m = 0, 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{r-2}{2} \right\rfloor, \end{cases} \quad (2.34)$$

при этом будем считать $\gamma_i^{(N),0} = 0$, если $i > N$.

Применяя теорему 1, получаем основной результат работы.

ТЕОРЕМА 2. *Для величины*

$$\kappa_N^{(r)}(\alpha) := \inf_{a_0, a_1, \dots, a_{N-r}} \left\{ \langle P_N^{(r)}, P_N^{(r)} \rangle_\alpha, P_N^{(r)}(x) = \sum_{s=0}^{N-r} a_s x^s + \sum_{s=N-r+1}^N a_s^0 x^s, a_N^0 > 0 \right\}$$

справедлива формула

$$\kappa_N^{(r)}(\alpha) = \sum_{j=N-r+1}^N (\gamma_j^{(N),0})^2,$$

где числа $\gamma_j^{(N),0}$ определены из системы (2.34). При этом экстремальный полином имеет следующий вид:

$$P_N^{(r), \text{extr}}(x) = \sum_{j=N-r+1}^N \gamma_j^{(N),0} \widehat{B}_j^{(\alpha)}(x).$$

Приведем частные случаи данного результата.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Справедлива формула*

$$\inf_{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}} \left\{ \langle P_N^{(1)}, P_N^{(1)} \rangle_\alpha, P_N^{(1)}(x) = x^N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i x^i \right\} \\ = \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{\Gamma^2(\alpha+1)} \frac{2^{2N}}{2N+2\alpha+1} \frac{N! \Gamma^2(N+\alpha+1) \Gamma(N+2\alpha+1)}{\Gamma^2(2N+2\alpha+1)} \frac{\Omega_{N+2}^{(\alpha)}(M, K)}{\Omega_N^{(\alpha)}(M, K)} \quad (2.35)$$

и экстремальный полином имеет вид

$$P_N^{(1), \text{extr}}(x) = \frac{\sqrt{\Gamma(2\alpha+2)}}{\Gamma(\alpha+1)} \sqrt{\frac{N! \Gamma(N+2\alpha+1)}{2N+2\alpha+1}} \\ \times \frac{2^N \Gamma(N+\alpha+1)}{\Gamma(2N+2\alpha+1)} \sqrt{\frac{\Omega_{N+2}^{(\alpha)}(M, K)}{\Omega_N^{(\alpha)}(M, K)}} \widehat{B}_N^{(\alpha)}(x; M, K).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в этом случае

$$\kappa_N^{(1)}(\alpha) = \frac{1}{(\widehat{k}_N^{(N)})^2}, P_N^{(1), \text{extr}}(x) = \frac{1}{\widehat{k}_N^{(N)}} \widehat{B}_N^{(\alpha)}(x),$$

где $\widehat{k}_N^{(N)} = k(\widehat{B}_N^{(\alpha)})$ – старший коэффициент полинома $\widehat{B}_N^{(\alpha)}(x)$. С другой стороны, из соотношений (2.3), (2.4a), (2.4b) (2.10), (2.11), (2.29), (2.30) вытекает цепочка равенств:

$$\frac{1}{(\widehat{k}(B_N^{(\alpha)}))^2} = \frac{1}{(\lambda_N^{(N)})^2 (k(B_N^{(\alpha)}))^2} \\ = \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{2N+2\alpha+1} \frac{N!}{\Gamma(N+2\alpha+1)} \\ \times \frac{2^{2N} \Gamma^2(N+\alpha+1) \Gamma^2(N+2\alpha+1)}{\Gamma^2(\alpha+1) \Gamma^2(2N+2\alpha+1)} \frac{\Omega_{N+2}^{(\alpha)}(M, K)}{\Omega_N^{(\alpha)}(M, K)},$$

что и приводит к формуле (2.35). С помощью таких же рассуждений устанавливается вид экстремального полинома.

Аналогичным образом доказываются следующие утверждения (случай $r = 2$ – задача Е. И. Золотарева в квадратичной метрике [26; с. 97]).

СЛЕДСТВИЕ 2. *Справедлива формула*

$$\inf_{a_0, a_1, \dots, a_{N-2}} \left\{ \langle P_N^{(2)}, P_N^{(2)} \rangle_\alpha, P_N^{(2)}(x) = a_N^0 x^N + a_{N-1}^0 x^{N-1} + \sum_{s=0}^{N-2} a_s x^s, a_N^0 > 0 \right\} \\ = \left(\frac{a_N^0}{k(\widehat{B}_N^{(\alpha)})} \right)^2 + \left(\frac{a_{N-1}^0}{k(\widehat{B}_{N-1}^{(\alpha)})} \right)^2,$$

при этом экстремальный полином имеет вид

$$P_N^{(2), \text{extr}}(x) = \frac{a_N^0}{k(\widehat{B}_N^{(\alpha)})} \widehat{B}_N^{(\alpha)}(x) + \frac{a_{N-1}^0}{k(\widehat{B}_{N-1}^{(\alpha)})} \widehat{B}_{N-1}^{(\alpha)}(x).$$

СЛЕДСТВИЕ 3 (случай $r = 3$). *Справедлива формула*

$$\inf_{a_0, a_1, \dots, a_{N-3}} \left\{ \langle P_N^{(3)}, P_N^{(3)} \rangle_\alpha, \right. \\ \left. P_N^{(3)}(x) = a_N^0 x^N + a_{N-1}^0 x^{N-1} + a_{N-2}^0 x^{N-2} + \sum_{s=0}^{N-3} a_s x^s, a_N^0 > 0 \right\} \\ = \left(\frac{a_N^0}{k(\widehat{B}_N^{(\alpha)})} \right)^2 + \left(\frac{a_{N-1}^0}{k(\widehat{B}_{N-1}^{(\alpha)})} \right)^2 + \frac{1}{k^2(\widehat{B}_{N-2}^{(\alpha)})} \left[a_{N-2}^0 - \frac{l(\widehat{B}_N^{(\alpha)})}{k(\widehat{B}_N^{(\alpha)})} a_N^0 \right]^2,$$

при этом экстремальный полином имеет вид

$$P_N^{(3), \text{extr}}(x) = \frac{a_N^0}{k(\widehat{B}_N^{(\alpha)})} \widehat{B}_N^{(\alpha)}(x) + \frac{a_{N-1}^0}{k(\widehat{B}_{N-1}^{(\alpha)})} \widehat{B}_{N-1}^{(\alpha)}(x) \\ + \frac{1}{k(\widehat{B}_{N-2}^{(\alpha)})} \left[a_{N-2}^0 - \frac{l(\widehat{B}_N^{(\alpha)})}{k(\widehat{B}_N^{(\alpha)})} a_N^0 \right] \widehat{B}_{N-2}^{(\alpha)}(x).$$

Подставляя, как и в следствии 1, вместо $k(\widehat{B}_N^{(\alpha)})$, $k(\widehat{B}_{N-1}^{(\alpha)})$, $k(\widehat{B}_{N-2}^{(\alpha)})$ и $l(\widehat{B}_N^{(\alpha)})$ их значения из соотношений (2.4a), (2.4b), (2.10), (2.11), (2.12)–(2.15), (2.30), (2.31), получаем эффективные формулы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. Аткинсон, *Непрерывные и дискретные задачи*, Мир, М., 1968.
- [2] Е. Г. Дьяконов, *Энергетические пространства и их применения*, МГУ, М., 2001.
- [3] Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, т. 1, Гостехиздат, М., 1951.
- [4] С. Т. Fulton, S. Pruess, “Numerical methods for a singular eigenvalue problem with eigenparameter in the boundary conditions”, *J. Math. Anal. Appl.*, **71**:2 (1979), 431–462.
- [5] А. А. Гончар, “О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **97 (139)**:4 (8) (1975), 607–629.
- [6] Ж. Кампе де Ферье, Р. Кемпбелл, Г. Петью, Т. Фогель, *Функции математической физики*, Физматгиз, М., 1963.
- [7] A. Krall, *Hilbert space, Boundary Value Problems and Orthogonal Polynomials*, Operator Theory: Advances and Applications, **133**, Birkhauser, Basel, 2002.
- [8] Г. Лопес, “Сходимость аппроксимаций Паде мероморфных функций стильтесовского типа и сравнительная асимптотика для ортогональных многочленов”, *Матем. сб.*, **136 (178)**:2 (6) (1988), 206–226.
- [9] F. Marcellan, M. Alfaro, M. L. Rezola, “Orthogonal polynomials: old and new directions”, *J. Comput. Appl. Math.*, **48**:1–2 (1993), 113–131.
- [10] В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, т. 4, Наука. Физматлит, М., 1957.
- [11] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука. Физматлит, М., 1966.
- [12] A. Martinez-Finkelshtein, “Asymptotic properties of Sobolev orthogonal polynomials”, Proceedings of the VIIIth Symposium on Orthogonal Polynomials and Their Applications, *J. Comput. Appl. Math.*, **99**:1–2 (1998), 491–510.
- [13] A. Martinez Finkelshtein, H. P. Carbera, “Strong asymptotics for Sobolev orthogonal polynomials”, *J. Anal. Math.*, **78** (1999), 143–156.
- [14] G. Cer, *Ортогональные многочлены*, ГИФМЛ, М., 1962.

- [15] П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены*, Наука, М., 1979.
- [16] H. Bavinck, H. G. Meijer, “Orthogonal polynomials with respect to a symmetric inner product involving derivatives”, *Appl. Anal.*, **33**:1–2 (1989), 103–117.
- [17] H. Bavinck, H. G. Meijer, “On orthogonal polynomials with respect to an inner product involving derivatives: zeros and recurrence relations”, *Indag. Math. (N.S.)*, **1**:1 (1990), 7–14.
- [18] A. Moreno Foulquie, F. Marcellan, B. P. Osilenker, “Estimates for polynomials orthogonal with respect to some Gegenbauer–Sobolev inner product”, *J. Inequal. Appl.*, **3**:4 (1999), 401–419.
- [19] R. Koekoek, “Differential equations for symmetric generalized ultraspherical polynomials”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **345**:1 (1994), 47–72.
- [20] H. Bavinck, “Differential operators having Sobolev – type Gegenbauer polynomials as eigenfunctions”, *J. Comput. Appl. Math.*, **118**:1–2 (2000), 23–42.
- [21] Ф. Марчеллан, Б. П. Осиленкер, “Оценки полиномов, ортогональных по отношению к скалярному произведению Лежандра–Соболева”, *Матем. заметки*, **62**:6 (1997), 871–880.
- [22] J. Arvesu, R. Alvarez-Nodarse, F. Marcellan, K. Pan, “Jacobi–Sobolev-type orthogonal polynomials: Second-order differential equation and zeros”, *J. Comput. Appl. Math.*, **90**:2 (1998), 135–156.
- [23] W. D. Evans, L. Littlejohn Lance, F. Marcellan, C. Markett, A. Ronveaux, “On recurrence relations for Sobolev orthogonal polynomials”, *SIAM J. Math. Anal.*, **26**:2 (1995), 446–467.
- [24] Б. П. Осиленкер, “Симметричные полиномы Лежандра–Соболева в пространствах Понтрягина–Соболева”, *Матем. физика, анализ, геометрия*, **9**:3 (2002), 385–393.
- [25] Б. П. Осиленкер, “Симметричные ортогональные полиномы Гегенбауэра в пространстве с индефинитной метрикой”, *Сб. научных трудов МГСУ*, 2003, № 10, 39–45.
- [26] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, МГУ, М., 1976.

Б. П. Осиленкер

Московский государственный строительный университет

E-mail: b_osilenker@mail.ru

Поступило

26.05.2006

Исправленный вариант

16.01.2007