Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Райгородский, О числах Рамсея для полных дистанционных графов специального вида, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 3, 477–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3844>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 06:47:55

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О числах Рамсея для полных дистанционных графов специального вида

А. М. Райгородский

1. Введение

Настоящая работа возникла в результате изучения двух классических проблем, лежащих на стыке комбинаторики и комбинаторной геометрии. Первая из этих проблем состоит в отыскании так называемых *чисел Рамсея*; вторая сводится к нахождению *хроматических чисел дистанционных графов*. Естественно, желая перейти к постановке задачи, которой, собственно, и посвящена данная заметка, мы скажем сначала несколько слов о каждой из упомянутых проблем.

1.1. О числах Рамсея. Для данного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через K_n *полный граф* на n вершинах (здесь и далее см. [1] на предмет теоретико-графовой терминологии). Тот факт, что какой-то граф $G' = (V', E')$ является подграфом в некотором графе $G = (V, E)$, мы выразим в виде $G' \subseteq G$ (мы допускаем, чтобы $G' = G$). Если в графе G есть полный подграф H , имеющий s вершин, то мы будем писать $G \supseteq K_s$. Пусть, далее, G – произвольный граф на n вершинах, т.е. G – *основной* подграф в K_n (напишем $G = (V, E) \preceq K_n$). В этом случае через $\overline{G} = (V, \overline{E}) \preceq K_n$ мы обозначим граф с тем же множеством вершин, но с “дополнительным” множеством ребер; иными словами, $e \in \overline{E}$ тогда и только тогда, когда $e \notin E$, коль скоро $e \in V \times V$ (впрочем, порядок вершин в e , как обычно, не важен).

Для любых натуральных s, t положим

$$R(s, t) = \min\{n \in \mathbb{N} : \forall G \preceq K_n \text{ либо } G \supseteq K_s, \text{ либо } \overline{G} \supseteq K_t\}.$$

Величины $R(s, t)$ называются *числами Рамсея*. Известно (см. [2]–[5]), что $R(s, t)$ всегда существует и что, например,

$$(\sqrt{2} + o(1))^s \leq R(s, s) \leq (4 + o(1))^s.$$

О числах Рамсея имеется огромная литература (см., скажем, [4], [5]).

1.2. О дистанционных графах. Пусть $a > 0$ – произвольное вещественное число. Граф $G = (V, E)$ называется *дистанционным* (или *графом расстояний*), если $V \subseteq \mathbb{R}^n$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, а

$$E \subseteq \{(x, y) \in V \times V : |x - y| = a\}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00383), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-1312.2006.1), гранта Президента РФ МД-4235.2006.1, гранта ИНТАС 03-51-5070 и гранта фонда “Династия”.

(здесь через $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ обозначено евклидово расстояние между векторами). Для определенности говорят обычно, что G – n -мерный дистанционный граф, а величину α называют критическим расстоянием. Одна из наиболее ярких задач комбинаторной геометрии состоит в отыскании хроматических чисел $\chi(G)$ дистанционных графов G , причем особенно интересны графы, которые труднее всего поддаются раскраске. Сейчас известно (см. [6]), что

$$(1.239 \dots + o(1))^n \leq \max_G \chi(G) \leq (3 + o(1))^n,$$

когда скоро максимум берется по всем n -мерным дистанционным графам.

Хроматическим числам дистанционных графов посвящен ряд книг и обзоров (см., например, [6]–[8]). Однако нам будет достаточно знать, что неравенство $\max_G \chi(G) \geq (1.239 \dots + o(1))^n$ достигается на одном из графов $G = (V, E)$ с $V \subset \{-1, 0, 1\}^n$. Иными словами, множество вершин плохо раскрашиваемого дистанционного графа состоит из векторов, координаты которых суть нули, единицы и минус единицы. Впрочем, экспоненциальные нижние оценки величины $\max_G \chi(G)$ обеспечиваются и менее сложными конструкциями.

Пусть, например, p – простое число, $n = 4p$, $N = C_n^{2p}$. Положим

$$V = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1\} \ \forall i, \ |\{i : x_i = 1\}| = 2p\}, \quad |V| = N,$$

$$E = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \times V : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{2p}\},$$

т.е. векторы из V находятся на критическом расстоянии, если множества их единичных координат пересекаются ровно по p общим элементам. Обозначим через $\mathcal{G}_N$ соответствующий граф. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике позволяет доказать (см. [6], [9]), что $\alpha(\mathcal{G}_N) \leq 2C_{n-1}^{p-1}$, где $\alpha(G)$ – число независимости графа G . Как следствие,

$$\chi(\mathcal{G}_N) \geq \frac{|V|}{\alpha(\mathcal{G}_N)} \geq \frac{C_n^{2p}}{2C_{n-1}^{p-1}} = (1.139 \dots + o(1))^n,$$

и это лишь на одну десятую хуже нынешнего рекорда. В дальнейшем мы будем работать именно с $\mathcal{G}_N$. Подчеркнем сразу, что $\mathcal{G}_N$ для нас – это отправная точка исследования; в принципе, ничто не мешает нам рассмотреть впоследствии любой другой подобный граф, имеющий большое хроматическое число. Заметим, наконец, что определение графа $\mathcal{G}_N$ довольно специфично, ведь оно опирается на предположение о простоте числа p . Тем не менее, эта специфика уже неизбежна, так как без нее не работает линейно-алгебраический метод (см. [6], [9]).

2. Постановка основной задачи

Назовем (в рамках этой статьи) граф $\mathcal{G}_N$, определенный в предыдущей главе, *полным* (n -мерным) *дистанционным* графом. Отметим, что между K_N из п. 1.1 и $\mathcal{G}_N$ есть ряд принципиальных различий. Во-первых, если у K_N было $C_N^2 \asymp N^2$ ребер, то у $\mathcal{G}_N$ их $T = (1/2)C_n^{2p}(C_{2p}^p)^2$. Применение формулы Стирлинга показывает, что $T = o(N^2)$, хотя и верно, что $T = N^{2+o(1)}$. Во-вторых, если для K_N величина N пробегала все натуральные числа, то для $\mathcal{G}_N$ это совсем не так. Впрочем, наука о распределении простых в натуральном ряде свидетельствует о том, что в некотором смысле и теперь множество значений N весьма “плотно” (см., например, [10]); и все-таки это далеко не все N .

Будем говорить, что граф $G \subseteq \mathcal{G}_N$ – *полный дистанционный* подграф полного n -мерного дистанционного графа, если G – *порожденный* подграф $\mathcal{G}_N$. Это и естественно, ведь в графе K_N (обычные) полные подграфы также порождены подмножествами множества его вершин. Правда, там они структурно представляют собою точные аналоги K_N , и потому мы обозначаем их K_s , $s \leq N$. Здесь ситуация иная: среди “полных” подграфов $\mathcal{G}_N$ имеются даже (большие) *множества независимости*, т.е. в некотором роде (большие) пустые подграфы (для K_N то же самое можно сказать лишь про K_1). Впрочем,

ясно, например, что $\mathcal{G}_N \not\supseteq K_s$ при $s > n \asymp \log N$, т.е. об обычных полных подграфах $\mathcal{G}_N$ вряд ли, вообще, стоит заводить речь. Таким образом, нынешняя терминология в известном смысле является прямым обобщением прежней, и мы будем придерживаться ее в дальнейшем.

Как и в п. 1.1, напомним $G \preceq \mathcal{G}_N$, коль скоро G – остовный подграф в $\mathcal{G}_N$. Сохраним мы и обозначение $\overline{G}$ для графа, который на сей раз “дополняет” $G \preceq \mathcal{G}_N$ до полного n -мерного дистанционного графа. Если в некотором графе $G \preceq \mathcal{G}_N$ есть подграф H , являющийся одновременно полным дистанционным подграфом в $\mathcal{G}_N$ и имеющий к тому же s вершин, то мы будем писать $G \supseteq \mathcal{C}_s$. Подчеркнем, что $\mathcal{C}_s$ не есть какой-либо конкретный граф, как это было в случае K_s ; запись $G \supseteq \mathcal{C}_s$ только символизирует наличие в G того или иного “полного” подграфа на s вершинах.

Для любых натуральных s, t положим

$$R_{\text{dist}}(s, t) = \min\{N = N(n) \in \mathbb{N} : \forall G \preceq \mathcal{G}_N \text{ либо } G \supseteq \mathcal{C}_s, \text{ либо } \overline{G} \supseteq \mathcal{C}_t\}.$$

Разумно называть величины $R_{\text{dist}}(s, t)$ числами Рамсея для полных дистанционных графов. В следующем разделе мы приведем новые оценки для $R_{\text{dist}}(s, t)$.

3. Формулировки результатов, идеи их доказательств и некоторые замечания

Как и в науке о классических числах Рамсея, наиболее актуален здесь вопрос об асимптотическом поведении “диагональных” величин $R_{\text{dist}}(s, s)$.

ТЕОРЕМА. *Имеют место оценки*

$$s^{\zeta_1 + o(1)} \leq R_{\text{dist}}(s, s) \leq s^{\zeta_2 + o(1)},$$

где $\zeta_1 = 1.067\dots$, $\zeta_2 = 1.233\dots$

Верхняя оценка из теоремы обусловлена тем фактом, что

$$\alpha(\mathcal{G}_N) = (4 \cdot 3^{-3/4} + o(1))^n = (1.754\dots + o(1))^n$$

(ср. п. 1.2). Для доказательства нижней оценки нужно ввести понятие *случайного n -мерного дистанционного графа* $\mathfrak{G}(N, p)$. Это вероятностное пространство, в котором элементарные события суть все возможные остовные подграфы графа $\mathcal{G}_N$ (их 2^T штук, см. п. 2); соответственно, вероятность $P(G)$ для $G = (V, E) \preceq \mathcal{G}_N$ задается формулой $P(G) = p^{|E|}(1-p)^{T-|E|}$, где $p = p(n) \in (0, 1)$. Иными словами, мы кладем в случайный n -мерный дистанционный граф каждое ребро полного n -мерного дистанционного графа с вероятностью p независимо от остальных ребер (ср. [5]). Коль скоро пространство $\mathfrak{G}(N, p)$ введено, остается показать, что при некотором p и некоторых N, s (на самом деле, $N = N(s) = s^{\zeta_1 + o(1)}$) с положительной вероятностью ни в графе $G \preceq \mathcal{G}_N$, ни в его дополнении $\overline{G}$ нет подграфа, который бы представлял собой полный дистанционный подграф графа $\mathcal{G}_N$ и имел s вершин. Для этого приходится аккуратно исследовать реберную структуру подграфов $\mathcal{G}_N$, и уже при $p = 1/2$ получается заявленный результат.

По-видимому, $R_{\text{dist}}(s, s) \sim cs^{\zeta_2}(\log s)^\gamma$, где $c > 0$ и γ – абсолютные постоянные.

Нетрудно проверить также, что величина $R_{\text{dist}}(s, t)$ всегда существует. Кроме того, для многих s, t удастся установить хорошие оценки наших чисел. Однако это предмет другой, более подробной, работы. Заметим напоследок, что значительный интерес представляет изучение величин $R_{\text{dist}}(s, t; k, l)$, определяемых следующим образом. Пусть $G \supseteq \mathcal{C}_{s,k}$, коль скоро $G \preceq \mathcal{G}_N$ и в G есть подграф H , являющийся полным дистанционным подграфом в $\mathcal{G}_N$ и имеющий s вершин и k ребер. Тогда

$$R_{\text{dist}}(s, t; k, l) = \min\{N \in \mathbb{N} : \forall G \preceq \mathcal{G}_N \text{ либо } G \supseteq \mathcal{C}_{s,k}, \text{ либо } \overline{G} \supseteq \mathcal{C}_{t,l}\}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. Харари, *Теория графов*, Мир, М., 1973. [2] F. P. Ramsey, *Proc. London Math. Soc.* (2), **30** (1929), 264–286. [3] P. Erdős, G. Szekeres, *Compos. Math.*, **2** (1935), 463–470. [4] R. L. Graham, B. L. Rothschild, J. H. Spencer, *Ramsey theory*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley and Sons, NY, 1990. [5] B. Bollobás, *Random Graphs*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **73**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001. [6] А. М. Райгородский, *УМН*, **56**:1 (2001), 107–146. [7] L. A. Székely, *Paul Erdős and his Mathematics, II* (Budapest, 1999), Bolyai Soc. Math. Stud., **11**, Springer, Berlin, 2002, 649–666. [8] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer, NY, 2005. [9] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007. [10] К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Мир, М., 1967.

А. М. Райгородский

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: araigor@avangard.ru

Поступило
26.01.2007