Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Широков, О сильном СЕ-свойстве выпуклых множеств, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 3, 441–458

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3845>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 11:34:02

О сильном СЕ-свойстве выпуклых множеств

М. Е. Широков

Рассматривается класс выпуклых ограниченных подмножеств сепарабельного банахового пространства, включающий в себя все выпуклые компакты, а также некоторые важные для приложений некомпактные множества. Для множеств этого класса получен простой критерий сильного СЕ-свойства, состоящего в том, что выпуклое замыкание любой непрерывной ограниченной функции является непрерывной ограниченной функцией. Получены некоторые результаты о расширении функций, заданных на множестве крайних точек выпуклого множества рассматриваемого класса, до выпуклых или вогнутых функций, определенных на всем этом множестве, с сохранением свойств замкнутости и непрерывности. Рассмотрены некоторые приложения полученных результатов в квантовой теории информации.

Библиография: 22 названия.

1. Введение. Понятие выпуклого замыкания функции [1], [2],¹ определенной на выпуклом подмножестве линейного топологического пространства, широко используется в современном выпуклом анализе и его приложениях. Выпуклое замыкание функции можно определить как наибольшую замкнутую выпуклую функцию, не превосходящую данную функцию. Естественно возникают вопросы о явном аналитическом представлении для выпуклого замыкания, о его совпадении с выпуклой оболочкой – наибольшей выпуклой функцией, не превосходящей данную функцию, и о связи свойств непрерывности исходной функции и ее выпуклого замыкания. Последний вопрос имеет принципиальное значение для приложений в квантовой теории информации [4], где выпуклое замыкание некоторой функции используется как характеристика физической системы (см. раздел 6).

Для любой непрерывной функции, заданной на выпуклом компакте, ее выпуклое замыкание совпадает с ее выпуклой оболочкой [3], однако уже в $\mathbb{R}^3$ существуют выпуклые компакты и заданные на них непрерывные функции, в частности, вогнутые непрерывные функции, выпуклое замыкание которых разрывно. Выпуклый компакт обладает СЕ-свойством, если *любая вогнутая* непрерывная функция на этом компакте имеет непрерывное выпуклое замыкание [5], [6]. В данной статье для широкого класса выпуклых множеств, названных μ -компактными, рассматривается усиленная версия СЕ-свойства, состоящая в том, что для *любой* непрерывной

Работа выполнена при поддержке научной программы отделения математики РАН “Современные проблемы теоретической математики” и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00164-а).

¹Также используется термин нижняя обертывающая (“lower envelope”) [3].

ограниченной функции на выпуклом μ -компакте ее выпуклое замыкание непрерывно и ограничено. Это свойство естественно назвать сильным СЕ-свойством. Класс μ -компактных множеств состоит из подмножеств сепарабельного банахового пространства, характеризующихся определенным свойством барицентрического отображения, которое заменяет свойство компактности при доказательстве многих результатов, в частности, некоторых результатов теории Шоке [7]. Этот класс включает в себя все выпуклые компакты, а также некоторые важные для приложений некомпактные множества, такие, как симплекс всех распределений вероятностей со счетным числом исходов и его некоммутативный аналог – множество операторов плотности на сепарабельном гильбертовом пространстве.

В статье получен простой критерий, который позволил установить сильное СЕ-свойство как для широкого класса выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$, так и для указанных выше некомпактных множеств. Рассмотрены некоторые следствия сильного СЕ-свойства, связанные с проблемой расширения непрерывных и замкнутых функций, определенных на множестве крайних точек выпуклого μ -компактного множества, до выпуклых или вогнутых функций на всем этом множестве, обладающих определенными свойствами непрерывности.

В разделе 2 дано определение μ -компактного множества, приведены достаточное условие и критерий μ -компактности. Получены некоторые вспомогательные результаты о свойствах μ -компактных множеств, в частности, обобщение теоремы Шоке о барицентрическом разложении.

В разделе 3 рассматривается вопрос о представлении выпуклого замыкания произвольной замкнутой ограниченной снизу функции на μ -компактном выпуклом множестве. Установлено совпадение выпуклой оболочки и выпуклого замыкания любой непрерывной ограниченной функции – обобщение следствия I.3.6 из [3].

В разделе 4 доказана теорема о равносильности сильного СЕ-свойства и двух других свойств μ -компактного выпуклого множества. С помощью этой теоремы установлено сильное СЕ-свойство для всех Р-множеств в $\mathbb{R}^n$ – множеств с определенными свойствами непрерывности границы [8], а также для симплекса всех распределений вероятностей со счетным числом исходов и множества операторов плотности на сепарабельном гильбертовом пространстве.

В разделе 5 получены некоторые результаты о расширении замкнутых ограниченных снизу функций, заданных на множестве крайних точек μ -компактного выпуклого множества, обладающего сильным СЕ-свойством, до выпуклых или вогнутых функций, определенных на всем этом множестве, с сохранением свойства замкнутости. В частности, доказано существование у любой непрерывной ограниченной функции, определенной на множестве крайних точек, непрерывного ограниченного выпуклого расширения, обладающего определенными свойствами максимальности. Получен критерий непрерывности выпуклого замыкания вогнутых функций.

В разделе 6 рассмотрены некоторые приложения полученных результатов в квантовой теории информации.

В разделе 7 обсуждаются возможности обобщения основных результатов статьи на более широкий класс выпуклых множеств.

2. Об одном классе выпуклых множеств. В разделах 2–6 будем предполагать, что $\mathcal{A}$ – замкнутое ограниченное подмножество сепарабельного банахова пространства. Будем использовать следующие обозначения:

$\text{co}(\mathcal{A})$, $\sigma\text{-co}(\mathcal{A})$ и $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$ – соответственно выпуклая оболочка, σ -выпуклая оболочка² и выпуклое замыкание множества $\mathcal{A}$;

$\text{extr } \mathcal{A}$ – множество крайних точек выпуклого множества $\mathcal{A}$;

$C(\mathcal{A})$ – множество непрерывных ограниченных функций на множестве $\mathcal{A}$;

$P(\mathcal{A})$ и $\hat{P}(\mathcal{A})$ – соответственно множество выпуклых непрерывных ограниченных функций на выпуклом множестве $\mathcal{A}$ и множество функций, представимых в виде поточечных пределов монотонных последовательностей функций из $P(\mathcal{A})$;

$\text{co } f$ и $\overline{\text{co}} f$ – соответственно выпуклая оболочка и выпуклое замыкание функции f , определенной на выпуклом множестве $\mathcal{A}$ [1], [2];

$\mathfrak{P}_n = \{\{\pi_i\}_{i=1}^n \mid \pi_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \pi_i = 1\}$ – симплекс всех распределений вероятностей с $n \leq +\infty$ исходами.

Выпуклое множество всех борелевских вероятностных мер на множестве $\mathcal{A}$, снабженное топологией слабой сходимости [9], обозначим через $M_1^+(\mathcal{A})$. Меру из $M_1^+(\mathcal{A})$, сосредоточенную в точке $x \in \mathcal{A}$, обозначим через $\delta(x)$. Рассмотрим барицентрическое отображение

$$M_1^+(\mathcal{A}) \ni \mu \mapsto b(\mu) = \int_{\mathcal{A}} x \mu(dx) \in \overline{\text{co}} \mathcal{A}, \quad (1)$$

где интеграл определяется как интеграл Бохнера. Выпуклое замкнутое подмножество множества $M_1^+(\mathcal{A})$, состоящее из таких мер μ , что $b(\mu) = x \in \overline{\text{co}} \mathcal{A}$, обозначим через $M_x(\mathcal{A})$.

Отображение (1) непрерывно (см., например, [10; раздел 2]); следовательно, образ любого компактного подмножества множества $M_1^+(\mathcal{A})$ при отображении (1) является компактным подмножеством множества $\overline{\text{co}} \mathcal{A}$. Выделим класс выпуклых множеств, для которых имеет место обратное утверждение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество $\mathcal{A}$ назовем μ -компактным, если прообраз любого компактного подмножества множества $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$ при отображении (1) является компактным подмножеством множества $M_1^+(\mathcal{A})$.

Заметим, что всякое компактное множество $\mathcal{A}$ является μ -компактным, поскольку из компактности $\mathcal{A}$ следует компактность $M_1^+(\mathcal{A})$ [9].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Выпуклое множество $\mathcal{A}$ является μ -компактным тогда и только тогда, когда для любого компактного подмножества $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует компактное подмножество $\mathcal{K}_\varepsilon \subseteq \mathcal{A}$ такое, что для любого $x \in \mathcal{K}$ из разложения $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, где $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \in \mathfrak{P}_n$, следует $\sum_{i: x_i \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{K}_\varepsilon} \lambda_i < \varepsilon$.

Выпуклое множество $\mathcal{A}$ является μ -компактным, если существует семейство $F(\mathcal{A})$ вогнутых неотрицательных функций на $\mathcal{A}$, обладающее следующими свойствами:

- множество $\{x \in \mathcal{A} : f(x) \leq c\}$ относительно компактно для любой функции $f \in F(\mathcal{A})$ и любого $c > 0$;
- для любого компактного подмножества $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$ найдется функция $f \in F(\mathcal{A})$ такая, что $\sup_{x \in \mathcal{K}} f(x) < +\infty$.

²Множество всех счетных выпуклых комбинаций элементов множества $\mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение предложения 1 следует из теоремы Прохорова [9], поскольку указанное в нем свойство означает плотность множества всех мер из $M_1^+(\mathcal{A})$ с конечным носителем и барицентром в $\mathcal{K}$, которая в силу приведенной ниже леммы 1 и теоремы 6.1 из [9] равносильна плотности множества всех мер из $M_1^+(\mathcal{A})$ с барицентром в $\mathcal{K}$.

Доказательство второго утверждения является обобщением рассуждений в доказательстве предложения 2 в [11]. Пусть $\mathcal{K}$ – компактное подмножество $\mathcal{A}$ и f – функция из $F(\mathcal{A})$ такая, что $\sup_{x \in \mathcal{K}} f(x) = c < +\infty$. Для любого $\varepsilon > 0$ пусть $\mathcal{K}_\varepsilon = \{x \in \mathcal{A} : f(x) \leq c/\varepsilon\}$ – относительно компактное подмножество множества $\mathcal{A}$. В силу вогнутости и неотрицательности функции f для произвольного x из $\mathcal{K}$ и его разложения $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ имеем

$$c \geq f(x) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \geq \sum_{i: x_i \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{K}_\varepsilon} \lambda_i f(x_i) > \frac{c}{\varepsilon} \sum_{i: x_i \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{K}_\varepsilon} \lambda_i,$$

откуда следует $\sum_{i: x_i \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{K}_\varepsilon} \lambda_i < \varepsilon$.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{A}$ – выпуклое множество. Тогда каждая мера μ_0 из $M_1^+(\mathcal{A})$ является пределом последовательности $\{\mu_n\}$ мер из $M_1^+(\mathcal{A})$ с конечным носителем таких, что $b(\mu_n) = b(\mu_0)$ для всех n .

Доказательство этой леммы является естественным обобщением доказательства леммы 1 из [11].

С помощью приведенного в предложении 1 достаточного условия можно показать μ -компактность некомпактного множества $\mathfrak{P}_{+\infty}$ всех распределений вероятностей со счетным числом исходов. Для этого в качестве $F(\mathfrak{P}_{+\infty})$ можно взять семейство функций вида $\{p_i\}_{i=1}^{+\infty} \mapsto \sum_{i=1}^{+\infty} p_i h_i$, где $\{h_i\}_{i=1}^{+\infty}$ – произвольная возрастающая последовательность положительных чисел, стремящаяся к $+\infty$.

Многие результаты теории Шоке, развитой для компактных выпуклых множеств, легко обобщаются на случай μ -компактных выпуклых множеств. Дальнейшее изложение существенно опирается на следующее обобщение теоремы Шоке [7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\mathcal{A}$ – μ -компактное множество. Любой элемент из $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$ является барицентром некоторой меры из $M_1^+(\mathcal{A})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \in \overline{\text{co}}(\mathcal{A})$. По определению выпуклого замыкания существует последовательность $\{x_n\} \subseteq \text{co}(\mathcal{A})$, сходящаяся к x_0 . При каждом n элемент x_n является барицентром некоторой меры μ_n из $M_1^+(\mathcal{A})$ с конечным носителем. В силу μ -компактности множества $\mathcal{A}$ последовательность $\{\mu_n\}$ относительно компактна и, следовательно, имеет частичный предел $\mu_0 \in M_1^+(\mathcal{A})$. Из непрерывности отображения (1) следует, что x_0 является барицентром меры μ_0 .

Если $\mathcal{A}$ – выпуклое множество, то на множестве $M_1^+(\mathcal{A})$ можно ввести следующее отношение частичного порядка, часто называемое порядком Шоке [7], [12]. Будем считать, что $\mu \succ \nu$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathcal{A}} f(y) \mu(dy) \geq \int_{\mathcal{A}} f(y) \nu(dy) \quad \forall f \in P(\mathcal{A}).$$

Мера $\mu \in M_1^+(\mathcal{A})$ называется максимальной, если из $\nu \succ \mu$ следует $\nu = \mu$ для любой меры $\nu \in M_1^+(\mathcal{A})$.

Нам потребуются следующие свойства частичного порядка Шоке.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathcal{A}$ – выпуклое μ -компактное³ множество.

А) Если μ и ν – меры из $M_1^+(\mathcal{A})$ такие, что $\mu \succ \nu$, то

$$b(\mu) = b(\nu) \quad \text{и} \quad \int_{\mathcal{A}} f(y) \mu(dy) \geq \int_{\mathcal{A}} f(y) \nu(dy) \quad \forall f \in \widehat{P}(\mathcal{A}).$$

Б) Пусть $\{\mu_n\}$ и $\{\nu_n\}$ – последовательности мер из $M_1^+(\mathcal{A})$, сходящиеся соответственно к мерам μ и ν из $M_1^+(\mathcal{A})$, такие, что $\mu_n \succ \nu_n$ для всех n . Тогда $\mu \succ \nu$.

В) Если $\text{extr } \mathcal{A} = \overline{\text{extr } \mathcal{A}}$, то множество максимальных мер в $M_1^+(\mathcal{A})$ совпадает с $M_1^+(\text{extr } \mathcal{A})$. Если дополнительно $\mathcal{A} = \overline{\text{co}}(\text{extr } \mathcal{A})$, то для любой меры μ из $M_1^+(\mathcal{A})$ существует максимальная в $M_1^+(\mathcal{A})$ мера $\widehat{\mu}$ такая, что $\widehat{\mu} \succ \mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения А и Б легко выводятся из определений и теоремы о монотонной сходимости для интеграла Лебега.

Первую часть утверждения В можно доказать, используя теорему 5.2 из [10], теорему 6.3.9 из [12] и рассуждение в доказательстве теоремы 1.1 из [13]. Конструктивное доказательство второй части утверждения В можно получить, используя лемму 1 и приведенную ниже лемму 3.

ЛЕММА 3. Пусть $\mathcal{A}$ – μ -компактное выпуклое множество такое, что $\text{extr } \mathcal{A} = \overline{\text{extr } \mathcal{A}}$ и $\mathcal{A} = \overline{\text{co}}(\text{extr } \mathcal{A})$. Для любой последовательности $\{\mu_n\}$ мер из $M_1^+(\mathcal{A})$ с конечным носителем, сходящейся к некоторой мере μ_0 из $M_1^+(\mathcal{A})$, существуют подпоследовательность $\{\mu_{n_k}\}$ и последовательность $\{\widehat{\mu}_k\}$ мер из $M_1^+(\text{extr } \mathcal{A})$, сходящаяся к некоторой мере $\widehat{\mu}_0$ из $M_1^+(\text{extr } \mathcal{A})$, такие, что

$$b(\widehat{\mu}_k) = b(\mu_{n_k}) \quad \forall k \quad \text{и} \quad \widehat{\mu}_0 \succ \mu_0.$$

Если $\mathcal{A} = \sigma\text{-co}(\text{extr } \mathcal{A})$, то в качестве $\{\widehat{\mu}_k\}$ можно выбрать последовательность, состоящую из атомических мер.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 2 при каждом n каждый атом x_i^n меры $\mu_n = \sum_{i=1}^{m(n)} \pi_i^n \delta(x_i^n)$ является барицентром некоторой меры μ_i^n из $M_1^+(\text{extr } \mathcal{A})$. Нетрудно видеть, что $\widehat{\mu}_n = \sum_{i=1}^{m(n)} \pi_i^n \mu_i^n$ – мера из $M_1^+(\text{extr } \mathcal{A})$ такая, что $b(\widehat{\mu}_n) = b(\mu_n)$ и $\widehat{\mu}_n \succ \mu_n$. Из непрерывности отображения (1) следует компактность множества $\{b(\mu_n)\}_{n \geq 0}$, которое совпадает с замыканием множества $b(\{\widehat{\mu}_n\}_{n > 0})$. В силу μ -компактности множества $\mathcal{A}$ последовательность $\{\widehat{\mu}_n\}_{n > 0}$ относительно компактна в $M_1^+(\text{extr } \mathcal{A})$, а значит, содержит подпоследовательность $\{\widehat{\mu}_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой мере $\{\widehat{\mu}_0\}$ из $M_1^+(\text{extr } \mathcal{A})$. Поскольку $\widehat{\mu}_{n_k} \succ \mu_{n_k}$ для всех k , из утверждения Б леммы 2 следует, что $\widehat{\mu}_0 \succ \mu_0$. Обозначив $\widehat{\mu}_k = \widehat{\mu}_{n_k}$, получаем основное утверждение леммы.

Если $\mathcal{A} = \sigma\text{-co}(\text{extr } \mathcal{A})$, то меры μ_i^n в приведенном выше рассуждении можно выбрать атомическими.

Из леммы 3 следует наблюдение о плотности атомических мер в множестве всех максимальных мер с данным барицентром.

³Условие μ -компактности используется только в доказательстве второго утверждения пункта В – оно позволяет показать существование меры $\widehat{\mu}$ без использования леммы Цорна.

ЛЕММА 4. Пусть $\mathcal{A}$ – μ -компактное выпуклое множество такое, что $\text{extr } \mathcal{A} = \overline{\text{extr } \mathcal{A}}$ и $\mathcal{A} = \sigma\text{-co}(\text{extr } \mathcal{A})$. Любая мера μ_0 из $M_1^+(\text{extr } \mathcal{A})$ является пределом последовательности $\{\mu_n\}$ атомических мер из $M_1^+(\text{extr } \mathcal{A})$ таких, что $b(\mu_n) = b(\mu_0)$ для всех n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 любая мера μ_0 из $M_1^+(\text{extr } \mathcal{A})$ является пределом последовательности $\{\mu_n\}$ мер из $M_1^+(\mathcal{A})$ с конечным носителем такой, что $b(\mu_n) = b(\mu_0)$ для всех n . Применяя лемму 3 и учитывая максимальность в $M_1^+(\mathcal{A})$ меры μ_0 , которая следует из утверждения В леммы 2, получаем последовательность мер $\{\hat{\mu}_n\}$ с требуемыми свойствами.

3. О выпуклом замыкании. Для любой замкнутой ограниченной снизу функции f на замкнутом множестве $\mathcal{A}$ функционал

$$\mu \mapsto \int_{\mathcal{A}} f(x) \mu(dx) \quad (2)$$

корректно определен и полунепрерывен снизу на множестве $M_1^+(\mathcal{A})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Выпуклое замыкание любой ограниченной снизу замкнутой функции f на μ -компактном выпуклом множестве $\mathcal{A}$ определяется выражением

$$\overline{\text{co}} f(x) = \inf_{\mu \in M_x(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} f(y) \mu(dy) \quad \forall x \in \mathcal{A}. \quad (3)$$

Для любого $x \in \mathcal{A}$ существует мера μ_x^f в $M_x(\mathcal{A})$ такая, что

$$\overline{\text{co}} f(x) = \int_{\mathcal{A}} f(y) \mu_x^f(dy).$$

Если $\text{extr } \mathcal{A} = \overline{\text{extr } \mathcal{A}}$ и $\mathcal{A} = \overline{\text{co}}(\text{extr } \mathcal{A})$, а f – вогнутая ограниченная снизу замкнутая функция такая, что $-f \in \hat{P}(\mathcal{A})$, то в качестве μ_x^f можно выбрать меру с носителем в $\text{extr } \mathcal{A}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В выражении (3) точную нижнюю грань по всем мерам из $M_x(\mathcal{A})$ в общем случае нельзя заменить на точную нижнюю грань по всем атомическим мерам из $M_x(\mathcal{A})$ (т.е. интеграл нельзя заменить на конечную или счетную сумму). Существуют функции f , для которых эти точные нижние грани различны (см. примеры в замечаниях 1 и 2 в [14]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу утверждения А приведенной ниже леммы 5 функция $\check{f}_{\mathcal{A}} = \inf_{\mu \in M_x(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} f(y) \mu(dy)$ выпукла и замкнута на множестве $\mathcal{A}$. Поэтому $\check{f}_{\mathcal{A}}(x) \leq \overline{\text{co}} f(x)$ для всех x из $\mathcal{A}$. Поскольку $\overline{\text{co}} f$ – выпуклая замкнутая функция, мажорируемая функцией f , из неравенства Йенсена следует, что

$$\overline{\text{co}} f(x) \leq \inf_{\mu \in M_x(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} \overline{\text{co}} f(y) \mu(dy) \leq \inf_{\mu \in M_x(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} f(y) \mu(dy) = \check{f}_{\mathcal{A}}(x)$$

для всех x из $\mathcal{A}$. Поэтому $\check{f}_{\mathcal{A}} = \overline{\text{co}} f$.

Существование меры μ_x^f следует из утверждения А леммы 5.

Пусть f – вогнутая ограниченная снизу замкнутая функция такая, что $-f \in \hat{P}(\mathcal{A})$, а μ_x^f – мера, существование которой для любого $x \in \mathcal{A}$ установлено выше.

В силу утверждения В леммы 2 существует максимальная в $M_1^+(\mathcal{A})$ мера $\hat{\mu}_x^f$, принадлежащая $M_1^+(\text{extr } \mathcal{A})$, такая, что $\hat{\mu}_x^f \succ \mu_x^f$. В силу утверждения А леммы 2 $b(\hat{\mu}_x^f) = x$ и точная нижняя грань в выражении для $\overline{\text{co}} f(x)$ достигается на мере $\hat{\mu}_x^f$.

ЛЕММА 5. Пусть f – замкнутая ограниченная снизу функция на множестве $\mathcal{A}$.

А) Если $\mathcal{A}$ μ -компактно, то функция

$$\check{f}_{\mathcal{A}}(x) = \inf_{\mu \in M_x(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} f(y) \mu(dy)$$

выпукла и замкнута на множестве $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$, причем для любого $x \in \overline{\text{co}}(\mathcal{A})$ точная нижняя грань в определении величины $\check{f}_{\mathcal{A}}(x)$ достигается на некоторой мере из $M_x(\mathcal{A})$.

Б) Если отображение $M_1^+(\mathcal{A}) \ni \mu \mapsto b(\mu) \in \overline{\text{co}}(\mathcal{A})$ открыто и сюръективно, то функция

$$\hat{f}_{\mathcal{A}}(x) = \sup_{\mu \in M_x(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} f(y) \mu(dy)$$

вогнута и замкнута на множестве $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А) Функция $\check{f}_{\mathcal{A}}$ корректно определена на $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$, поскольку в силу предложения 2 множество $M_x(\mathcal{A})$ непусто для любого x из $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$. Выпуклость этой функции прямо следует из ее определения и выпуклости множества $M_1^+(\mathcal{A})$. В силу полунепрерывности снизу функционала (2) и компактности множества $M_x(\mathcal{A})$, которая следует из μ -компактности множества $\mathcal{A}$, для каждого x из $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$ точная нижняя грань в определении величины $\check{f}_{\mathcal{A}}(x)$ достигается на некоторой мере из $M_x(\mathcal{A})$.

Предположим, что функция $\check{f}_{\mathcal{A}}$ не является замкнутой. Тогда существует последовательность $\{x_n\} \subset \overline{\text{co}}(\mathcal{A})$, сходящаяся к $x_0 \in \overline{\text{co}}(\mathcal{A})$, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \check{f}_{\mathcal{A}}(x_n) < \check{f}_{\mathcal{A}}(x_0). \quad (4)$$

В силу предыдущего наблюдения для каждого $n = 1, 2, \dots$ в $M_{x_n}(\mathcal{A})$ существует мера μ_n такая, что

$$\check{f}_{\mathcal{A}}(x_n) = \int_{\mathcal{A}} f(y) \mu_n(dy).$$

Из μ -компактности множества $\mathcal{A}$ и компактности последовательности $\{x_n\}_{n \geq 0}$ следует относительная компактность последовательности мер $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$. Следовательно, из нее можно выделить подпоследовательность $\{\mu_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой мере μ_0 . Из непрерывности отображения (1) следует, что μ_0 – мера из $M_{x_0}(\mathcal{A})$. В силу полунепрерывности снизу функционала (2) имеем

$$\check{f}_{\mathcal{A}}(x_0) \leq \int_{\mathcal{A}} f(y) \mu_0(dy) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{A}} f(y) \mu_{n_k}(dy) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \check{f}_{\mathcal{A}}(x_{n_k}),$$

что противоречит (4).

Б) Функция $\hat{f}_{\mathcal{A}}$ корректно определена на $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$, поскольку в силу сюръективности барицентрического отображения множество $M_x(\mathcal{A})$ непусто для любого x из $\overline{\text{co}}(\mathcal{A})$. Вогнутость этой функции прямо следует из ее определения и выпуклости

множества $M_1^+(\mathcal{A})$. Предположим, что функция $\widehat{f}_{\mathcal{A}}$ не является замкнутой. Тогда существует последовательность $\{x_n\} \subset \overline{\text{co}}(\mathcal{A})$, сходящаяся к $x_0 \in \overline{\text{co}}(\mathcal{A})$, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \widehat{f}_{\mathcal{A}}(x_n) < \widehat{f}_{\mathcal{A}}(x_0). \quad (5)$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ пусть μ_0^ε – такая мера из $M_{x_0}(\mathcal{A})$, что

$$\widehat{f}_{\mathcal{A}}(x_0) < \int_{\mathcal{A}} f(y) \mu_0^\varepsilon(dy) + \varepsilon.$$

В силу открытости барицентрического отображения существуют подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ и последовательность $\{\mu_k\}$ мер из $M_1^+(\mathcal{A})$, сходящаяся к мере μ_0^ε , такие, что $b(\mu_k) = x_{n_k}$ при каждом k . В силу полунепрерывности снизу функционала (2) имеем

$$\widehat{f}_{\mathcal{A}}(x_0) \leq \int_{\mathcal{A}} f(y) \mu_0^\varepsilon(dy) + \varepsilon \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{A}} f(y) \mu_k(dy) + \varepsilon \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \widehat{f}_{\mathcal{A}}(x_{n_k}) + \varepsilon,$$

что ввиду произвольности ε противоречит (5).

Из предложения 3 и леммы 1 вытекает следующее утверждение, которое является обобщением следствия I.3.6 из [3] на случай μ -компактных выпуклых множеств.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\mathcal{A}$ – μ -компактное выпуклое множество, то выпуклое замыкание любой функции $f \in C(\mathcal{A})$ определяется выражением

$$\overline{\text{co}} f(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=1}^n \pi_i f(x_i) \mid \sum_{i=1}^n \pi_i x_i = x, \{x_i\} \subset \mathcal{A}, \{\pi_i\} \in \mathfrak{P}_n \right\} \quad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Это выражение означает, что $\overline{\text{co}} f = \text{co } f$ для любой функции $f \in C(\mathcal{A})$.

4. Сильное СЕ-свойство для выпуклых μ -компактных множеств.

СЕ-свойство для выпуклого компакта $\mathcal{A}$ состоит в том, что выпуклое замыкание любой вогнутой функции из $C(\mathcal{A})$ является функцией из $C(\mathcal{A})$ [5], [6]. Следуя этой терминологии, введем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Выпуклое топологическое пространство $\mathcal{A}$ обладает сильным СЕ-свойством, если выпуклое замыкание любой функции из $C(\mathcal{A})$ является функцией из $C(\mathcal{A})$.

В [5] показано, что для выпуклого компакта $\mathcal{A}$ из СЕ-свойства следует замкнутость множества $\text{extr } \mathcal{A}$ и что СЕ-свойство равносильно открытости отображения $M_1^+(\text{extr } \mathcal{A}) \ni \mu \mapsto b(\mu) \in \mathcal{A}$ (которое является сюръективным в силу теоремы Шоке).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{A}$ – выпуклое μ -компактное множество. Следующие свойства равносильны:

- (i) отображение $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times [0, 1] \ni (x, y, \lambda) \mapsto \lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathcal{A}$ открыто;
- (ii) барицентрическое отображение $M_1^+(\mathcal{A}) \ni \mu \mapsto b(\mu) \in \mathcal{A}$ открыто;
- (iii) множество $\mathcal{A}$ обладает сильным СЕ-свойством.

Из свойств (i)–(iii) следует замкнутость множества $\text{extr } \mathcal{A}$, а при условии $\mathcal{A} = \overline{\text{co}}(\text{extr } \mathcal{A})$ и открытость отображения $M_1^+(\text{extr } \mathcal{A}) \ni \mu \mapsto b(\mu) \in \mathcal{A}$.⁴

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii) Покажем, что из свойства (i) следует открытость отображения

$$\Psi_n: \mathcal{A}^{\times n} \times \mathfrak{P}_n \ni (\{x_i\}_{i=1}^n, \{\pi_i\}_{i=1}^n) \mapsto \sum_{i=1}^n \pi_i x_i \in \mathcal{A},$$

где

$$\mathcal{A}^{\times n} = \underbrace{\mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}}_n$$

при любом n . Свойство (i) означает открытость отображения Ψ_2 . Предположим, что отображение Ψ_{n-1} открыто. В силу симметрии достаточно показать открытость отображения Ψ_n на открытом множестве

$$\mathfrak{M}_0 = \mathcal{A}^{\times n} \times (\mathfrak{P}_n \setminus \underbrace{\{(0, 0, \dots, 0, 1)\}}_{n-1}).$$

Нетрудно видеть, что открытым является отображение Π_n :

$$\mathfrak{P}_n \setminus \underbrace{\{(0, 0, \dots, 0, 1)\}}_{n-1} \ni \{\pi_i\}_{i=1}^n \mapsto \left(\left\{ \frac{\pi_i}{1 - \pi_n} \right\}_{i=1}^{n-1}, \{1 - \pi_n, \pi_n\} \right) \in \mathfrak{P}_{n-1} \times \mathfrak{P}_2.$$

Открытость отображения Ψ_n на множестве $\mathfrak{M}_0$ следует из его представления в виде произведения открытого на множестве $\mathfrak{M}_0$ отображения $\text{Id}_{\mathcal{A}^{\times n}} \times \Pi_n$, отображения

$$(\{x_i\}_{i=1}^n, \{\pi_i\}_{i=1}^{n-1}, \{v, 1 - v\}) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n-1} \pi_i x_i, x_n, \{v, 1 - v\} \right)$$

из $\mathcal{A}^{\times n} \times \mathfrak{P}_{n-1} \times \mathfrak{P}_2$ в $\mathcal{A}^{\times 2} \times \mathfrak{P}_2$, которое открыто по предположению индукции, и открытого в силу свойства (i) отображения Ψ_2 .

Пусть U – произвольное открытое подмножество $M_1^+(\mathcal{A})$. Предположим, что множество $b(U)$ не является открытым. Тогда для некоторого $x_0 \in b(U)$ существует последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{A} \setminus b(U)$, сходящаяся к x_0 .

Пусть μ_0 – мера из U такая, что $b(\mu_0) = x_0$. В силу леммы 1 можно считать, что μ_0 – мера с конечным носителем, т.е. $\mu_0 = \sum_{i=1}^m \pi_i^0 \delta(x_i^0)$ при некоторых $\{x_i^0\}_{i=1}^m \in \mathcal{A}^m$, $\{\pi_i^0\}_{i=1}^m \in \mathfrak{P}_m$, $m \in \mathbb{N}$. В силу установленной открытости отображения Ψ_m существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ и последовательность мер $\{\mu_k = \sum_{i=1}^m \pi_i^k \delta(x_i^k)\}$, сходящаяся к мере μ_0 , такие, что $b(\mu_k) = \sum_{i=1}^m \pi_i^k x_i^k = x_{n_k}$ для всех k . Из открытости U следует, что μ_k лежит в U для всех достаточно больших k , что противоречит определению последовательности $\{x_n\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) В силу предложения 3 полунепрерывность сверху функции $\overline{\text{co}} f$ при выполнении свойства (ii) следует из утверждения Б леммы 5, примененной к функции $-f$.

⁴См. замечание после доказательства теоремы.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Пусть $U_r(x)$ – шаровая окрестность точки $x \in \mathcal{A}$ радиуса r . Нетрудно видеть, что свойство (i) равносильно следующему: для любых x и y из $\mathcal{A}$, любого λ из $[0, 1]$ и любой последовательности $\{z_n\} \subset \mathcal{A}$, сходящейся к $\lambda x + (1 - \lambda)y$, при каждом $m = 1, 2, 3 \dots$ в $U_{1/m}(x)$ и в $U_{1/m}(y)$ существуют точки x_m и y_m такие, что

$$\lambda_m x_m + (1 - \lambda_m) y_m \in \{z_n\}_{n>m}$$

при некотором $\lambda_m \in [0, 1]$. Поэтому нарушение свойства (i) гарантирует существование таких x_0 и y_0 из $\mathcal{A}$, λ_0 из $[0, 1]$, последовательности $\{z_n\}$, сходящейся к $\lambda_0 x_0 + (1 - \lambda_0) y_0$, и числа m_0 , что

$$\text{co}(U_{1/m_0}(x_0) \cup U_{1/m_0}(y_0)) \cap \{z_n\}_{n>m_0} = \emptyset. \quad (6)$$

Пусть f – непрерывная функция на $\mathcal{A}$ с множеством значений $[0, 1]$ такая, что

$$f(x_0) = f(y_0) = 0 \quad \text{и} \quad f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathcal{A} \setminus (U_{1/2m_0}(x_0) \cup U_{1/2m_0}(y_0)).$$

Предположим, что функция $\overline{\text{co}} f$, совпадающая в силу следствия 1 с функцией $\text{co} f$, является непрерывной. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{co} f(z_n) = \text{co} f(\lambda_0 x_0 + (1 - \lambda_0) y_0) = 0. \quad (7)$$

При каждом n любую меру из $M_{z_n}(\mathcal{A})$ с конечным носителем можно представить в виде

$$\sum_i \pi_i^n \delta(x_i^n) + \sum_j v_j^n \delta(y_j^n) + \sum_k \eta_k^n \delta(r_k^n), \quad (8)$$

где $\{x_i^n\} \subset U_{1/2m_0}(x_0)$, $\{y_j^n\} \subset U_{1/2m_0}(y_0)$, $\{r_k^n\} \subset \mathcal{A} \setminus (U_{1/2m_0}(x_0) \cup U_{1/2m_0}(y_0))$ и $\{\pi_i^n\}$, $\{v_j^n\}$, $\{\eta_k^n\}$ – наборы положительных чисел такие, что

$$\sum_i \pi_i^n + \sum_j v_j^n + \sum_k \eta_k^n = 1 \quad \text{и} \quad \sum_i \pi_i^n x_i^n + \sum_j v_j^n y_j^n + \sum_k \eta_k^n r_k^n = z_n.$$

Из (7) следует существование при каждом n меры вида (8) такой, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_i \pi_i^n f(x_i^n) + \sum_j v_j^n f(y_j^n) + \sum_k \eta_k^n f(r_k^n) \right) = 0.$$

По определению функции f это возможно, только если $\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{\eta}_n = 0$, где $\bar{\eta}_n = \sum_k \eta_k^n$. Пусть $\bar{\pi}_n = \sum_i \pi_i^n$, $\bar{v}_n = \sum_j v_j^n$ и $\bar{r}_n = \bar{\eta}_n^{-1} \sum_k \eta_k^n r_k^n$. Заметим, что

$$\bar{x}_n = \bar{\pi}_n^{-1} \sum_i \pi_i^n x_i^n \in U_{1/2m_0}(x_0) \quad \text{и} \quad \bar{y}_n = \bar{v}_n^{-1} \sum_j v_j^n y_j^n \in U_{1/2m_0}(y_0)$$

в силу выпуклости окрестностей $U_{1/2m_0}(x_0)$ и $U_{1/2m_0}(y_0)$.

Без ограничения общности можно считать, что $\bar{\pi}_n \geq \bar{v}_n$ при каждом n . Положим $\bar{x}'_n = (\bar{\pi}_n + \bar{\eta}_n)^{-1} (\bar{\pi}_n \bar{x}_n + \bar{\eta}_n \bar{r}_n)$, $\bar{\pi}'_n = \bar{\pi}_n + \bar{\eta}_n$. Тогда

$$z_n = \bar{\pi}'_n \bar{x}'_n + \bar{v}_n \bar{y}_n \quad \forall n. \quad (9)$$

Из стремления к нулю последовательности $\{\bar{\eta}_n\}$ и ограниченности множества $\mathcal{A}$ следует, что $\bar{x}'_n \in U_{1/m_0}(x_0)$ при всех достаточно больших n , что с учетом $\bar{y}_n \in U_{1/2m_0}(y_0)$ и (9) противоречит (6).

Равносильность свойств (i)–(iii) доказана.

Из свойства (i) непосредственно следует замкнутость множества $\text{extr } \mathcal{A}$.

Для доказательства того, что из свойств (i)–(iii) следует открытость отображения $M_1^+(\text{extr } \mathcal{A}) \ni \mu \mapsto b(\mu) \in \mathcal{A}$, достаточно показать, что для любой меры μ_0 из $M_1^+(\text{extr } \mathcal{A})$ и любой последовательности $\{x_n\} \subset \mathcal{A}$, сходящейся к $b(\mu_0) = x_0$, существуют подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ и последовательность $\{\mu_k\}$ мер из $M_1^+(\text{extr } \mathcal{A})$, сходящаяся к мере μ_0 , такие, что $b(\mu_k) = x_{n_k}$ для всех k . Свойство (ii) гарантирует для данных меры μ_0 и последовательности $\{x_n\}$ существование подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ и последовательности $\{\mu_k\}$ мер из $M_1^+(\mathcal{A})$, сходящейся к мере μ_0 , таких, что $b(\mu_k) = x_{n_k}$ для всех k . В силу леммы 1 можно считать, что последовательность $\{\mu_k\}$ состоит из мер с конечным носителем. В силу леммы 3 существует подпоследовательность $\{x_{n_{k_m}}\}$ последовательности $\{x_{n_k}\}$ и последовательность $\{\hat{\mu}_m\}$ мер из $M_1^+(\text{extr } \mathcal{A})$, сходящаяся к некоторой мере $\hat{\mu}_0$ из $M_1^+(\text{extr } \mathcal{A})$, такие, что

$$b(\hat{\mu}_m) = b(\mu_{k_m}) = x_{n_{k_m}} \quad \forall m \quad \text{и} \quad \hat{\mu}_0 \succ \mu_0.$$

Из максимальной в $M_1^+(\mathcal{A})$ меры μ_0 , которая гарантируется леммой 2, следует, что $\hat{\mu}_0 = \mu_0$. Таким образом, подпоследовательность $\{x_{n_{k_m}}\}$ и последовательность мер $\{\hat{\mu}_m\}$ обладают требуемыми свойствами.

С помощью теоремы 1 можно показать, что класс выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$, обладающих сильным СЕ-свойством, достаточно широк и включает в себя класс Р-множеств в $\mathbb{R}^n$ (см. определение в [8], [2]). Действительно, используя теоремы 1.8.1 и 1.8.2 из [2], нетрудно показать открытость отображения $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (x, y) \mapsto \lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathcal{A}$ при каждом фиксированном $\lambda \in [0, 1]$ для любого Р-множества $\mathcal{A}$ в $\mathbb{R}^n$, что гарантирует выполнение свойства (i) для этого множества. Отметим, что класс Р-множеств включает в себя все выпуклые многогранники и все строго выпуклые компакты в $\mathbb{R}^n$ и что любой выпуклый компакт в $\mathbb{R}^2$ является Р-множеством [2]. Однако, уже в $\mathbb{R}^3$ не всякий выпуклый компакт, обладающий сильным СЕ-свойством, является Р-множеством, как показывает пример 1.8.1 из [2].

Заметим также, что в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 3$ есть выпуклые компакты, не обладающие сильным СЕ-свойством. В силу теоремы 1 в качестве примера можно взять любой компакт с незамкнутым множеством крайних точек. Протасов (устное сообщение) доказал, что для выпуклых компактов в $\mathbb{R}^3$ свойство (i) равносильно замкнутости множества крайних точек и построил пример выпуклого компакта в $\mathbb{R}^4$, имеющего замкнутое множество крайних точек и обладающего СЕ-свойством, для которого свойство (i) не имеет места. Таким образом, различие между СЕ-свойством и сильным СЕ-свойством для выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$ проявляется при $n \geq 4$.

В [5] показано, что образ любого компакта, обладающего СЕ-свойством, при открытом непрерывном аффинном отображении также обладает СЕ-свойством. Аналог этого утверждения для сильного СЕ-свойства установлен в приведенном ниже следствии (с условием а)), которое легко доказать, используя равносильность свойств (i) и (iii) в теореме 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\mathcal{A}$ – μ -компактное выпуклое множество, обладающее сильным СЕ-свойством, а Φ – непрерывное аффинное отображение множества $\mathcal{A}$

на μ -компактное множество $\mathcal{B}$. Множество $\mathcal{B}$ обладает сильным СЕ-свойством при выполнении одного из следующих условий:

- а) Φ – открытое отображение;
- б) $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ и $\Phi^2 = \Phi$.

Используя следствие 2 с условием б) и предложение 4 из раздела 6, можно установить сильное СЕ-свойство для μ -компактного множества $\mathfrak{P}_{+\infty}$ всех распределений вероятностей со счетным числом исходов. В качестве Φ в этом случае следует взять отображение, ставящее в соответствие любому оператору плотности набор его диагональных элементов в некотором фиксированном базисе.

5. О выпуклом и вогнутом расширениях. Пусть $\mathcal{A}$ – μ -компактное выпуклое множество такое, что $\text{extr } \mathcal{A} = \overline{\text{extr } \mathcal{A}}$ и $\mathcal{A} = \overline{\text{co}}(\text{extr } \mathcal{A})$, а f – замкнутая ограниченная снизу функция на $\text{extr } \mathcal{A}$. В силу предложения 2 множество $M_x(\text{extr } \mathcal{A})$ всех мер из $M_1^+(\text{extr } \mathcal{A})$ с барицентром x непусто для каждого x из $\mathcal{A}$. Следовательно, на множестве $\mathcal{A}$ корректно определены функции

$$f_*(x) = \inf_{\mu \in M_x(\text{extr } \mathcal{A})} \int_{\text{extr } \mathcal{A}} f(y) \mu(dy), \quad f^*(x) = \sup_{\mu \in M_x(\text{extr } \mathcal{A})} \int_{\text{extr } \mathcal{A}} f(y) \mu(dy). \quad (10)$$

В силу выпуклости множества $M_1^+(\text{extr } \mathcal{A})$ первая из этих функций выпукла, а вторая – вогнута на $\mathcal{A}$. Поскольку функции f_* и f^* совпадают с f на множестве $\text{extr } \mathcal{A}$, эти функции можно рассматривать соответственно как выпуклое и вогнутое расширения функции f на множество $\mathcal{A}$. Свойства этих расширений определяет следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{A}$ – выпуклое μ -компактное множество такое, что $\text{extr } \mathcal{A} = \overline{\text{extr } \mathcal{A}}$ и $\mathcal{A} = \overline{\text{co}}(\text{extr } \mathcal{A})$, а f – замкнутая ограниченная снизу функция на $\text{extr } \mathcal{A}$.

А) Функция f_* является наибольшим выпуклым замкнутым расширением функции f на множество $\mathcal{A}$.⁵ Для каждого x из $\mathcal{A}$ существует мера $\hat{\mu}_x^f$ из $M_x(\text{extr } \mathcal{A})$ такая, что

$$f_*(x) = \int_{\text{extr } \mathcal{A}} f(y) \hat{\mu}_x^f(dy).$$

Б) Если отображение $M_1^+(\text{extr } \mathcal{A}) \ni \mu \mapsto b(\mu) \in \mathcal{A}$ открыто, то функция f^* является замкнутой. Если дополнительно $\mathcal{A} = \sigma\text{-co}(\text{extr } \mathcal{A})$, то функция f^* является наименьшим вогнутым ограниченным снизу расширением функции f на множество $\mathcal{A}$ и

$$f^*(x) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i f(x_i) \mid \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i x_i = x, \{x_i\} \subset \text{extr } \mathcal{A}, \{\pi_i\} \in \mathfrak{P}_{+\infty} \right\} \quad \forall x \in \mathcal{A}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В силу теоремы 1 все основные условия теоремы 2 выполнены для выпуклого μ -компактного множества $\mathcal{A}$, обладающего сильным СЕ-свойством, такого, что $\mathcal{A} = \overline{\text{co}}(\text{extr } \mathcal{A})$.

Аналоги утверждений теоремы 2 о существовании меры $\hat{\mu}_x^f$ и о представлении для функции f^* в случае $\mathcal{A} = \sigma\text{-co}(\text{extr } \mathcal{A})$ не имеют места для функций f^* и f_*

⁵Такая функция в [3] называется нижней обертывающей для f .

соответственно (см. примеры в замечании 2 в [14]). Условие ограниченности снизу в утверждении Б существенно. Действительно, функция

$$g(x) = \begin{cases} f^*(x), & x \in \text{co}(\text{extr } \mathcal{A}), \\ -\infty, & x \in \mathcal{A} \setminus \text{co}(\text{extr } \mathcal{A}), \end{cases}$$

является вогнутым расширением функции f на множество $\mathcal{A}$, мажорируемым функцией f^* .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 5 (для множества $\text{extr } \mathcal{A}$) с учетом μ -компактности множества $\text{extr } \mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ и предложения 2 следует замкнутость функций f_* и f^* , а также утверждение о существовании меры $\hat{\mu}_x^f$.

Пусть g – выпуклое замкнутое ограниченное снизу расширение функции f на множество $\mathcal{A}$. Из неравенства Йенсена следует, что

$$g(x) \leq \inf_{\mu \in M_x(\text{extr } \mathcal{A})} \int_{\text{extr } \mathcal{A}} g(y) \mu(dy) = \inf_{\mu \in M_x(\text{extr } \mathcal{A})} \int_{\text{extr } \mathcal{A}} f(y) \mu(dy) = f_*(x)$$

для всех x из $\mathcal{A}$. Поэтому f_* – максимальное выпуклое замкнутое расширение функции f на множество $\mathcal{A}$.

Если $\mathcal{A} = \sigma\text{-co}(\text{extr } \mathcal{A})$, то из леммы 4 следует плотность атомических мер в $M_x(\text{extr } \mathcal{A})$ для каждого x из $\mathcal{A}$. Учитывая это и полунепрерывность снизу функционала (2), нетрудно показать, что точную верхнюю грань в определении величины $f^*(x)$ можно брать только по множеству атомических мер в $M_x(\text{extr } \mathcal{A})$.

Пусть g – ограниченное снизу вогнутое расширение функции f на множество $\mathcal{A}$. Применяя к этой функции неравенство Йенсена, получаем

$$\begin{aligned} g(x) &\geq \sup \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i g(x_i) \mid \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i x_i = x, \{x_i\} \subset \text{extr } \mathcal{A}, \{\pi_i\} \in \mathfrak{P}_\infty \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i f(x_i) \mid \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i x_i = x, \{x_i\} \subset \text{extr } \mathcal{A}, \{\pi_i\} \in \mathfrak{P}_\infty \right\} = f^*(x) \end{aligned}$$

для всех x из $\mathcal{A}$. Поэтому f^* – минимальное ограниченное снизу вогнутое расширение функции f на множество $\mathcal{A}$.

Из теоремы 2 вытекает следующее обобщение предложения 9 из [5] на случай μ -компактных выпуклых множеств.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\mathcal{A}$ – выпуклое μ -компактное множество, обладающее сильным СЕ-свойством, такое, что $\mathcal{A} = \overline{\text{co}}(\text{extr } \mathcal{A})$.

Для любой функции $f \in C(\text{extr } \mathcal{A})$ функция f_* , определенная первой формулой в (10), является непрерывным ограниченным выпуклым расширением функции f на множество $\mathcal{A}$, совпадающим с точной верхней гранью всех выпуклых замкнутых расширений функции f на множество $\mathcal{A}$. Если дополнительно $\mathcal{A} = \sigma\text{-co}(\text{extr } \mathcal{A})$, то

$$f_*(x) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i f(x_i) \mid \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i x_i = x, \{x_i\} \subset \text{extr } \mathcal{A}, \{\pi_i\} \in \mathfrak{P}_\infty \right\} \quad \forall x \in \mathcal{A},$$

и функция f_* совпадает с точной верхней гранью всех выпуклых ограниченных сверху расширений функции f на множество $\mathcal{A}$.

Для функции f^* можно сформулировать утверждение, двойственное утверждению следствия 3.

Заметим, что если множество $\mathcal{A}$, удовлетворяющее условиям следствия 3, не является компактным, то существование у любой функции из $C(\text{extr } \mathcal{A})$ хотя бы одного выпуклого расширения из $C(\mathcal{A})$ не является очевидным. Для компакта $\mathcal{A}$ указанное свойство равносильно замкнутости множества $\text{extr } \mathcal{A}$ [5; следствие 2].

Отметим следующий критерий непрерывности выпуклого замыкания вогнутых функций, который будет использован в следующем разделе.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\mathcal{A}$ – выпуклое μ -компактное множество, обладающее сильным СЕ-свойством, такое, что $\mathcal{A} = \overline{\text{co}}(\text{extr } \mathcal{A})$.

Пусть f – вогнутая ограниченная снизу замкнутая функция на $\mathcal{A}$ такая, что $-f \in \hat{P}(\mathcal{A})$. Тогда

$$\{\overline{\text{co}} f \in C(\mathcal{A})\} \Leftrightarrow \{f|_{\text{extr } \mathcal{A}} \in C(\text{extr } \mathcal{A})\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 3 с учетом последнего утверждения теоремы 1 для любой функции f указанного вида имеем

$$\overline{\text{co}} f(x) = \inf_{\mu \in M_x(\text{extr } \mathcal{A})} \int_{\text{extr } \mathcal{A}} f(y) \mu(dy) = f_*(x) \quad \forall x \in \mathcal{A}.$$

Если функция f непрерывна и ограничена на множестве $\text{extr } \mathcal{A}$, то в силу следствия 3 функция $\overline{\text{co}} f = f_*$ непрерывна и ограничена на множестве $\mathcal{A}$. Обратное утверждение очевидно, поскольку в силу предложения 3 функции f и $\overline{\text{co}} f$ совпадают на множестве $\text{extr } \mathcal{A}$.

6. Некоторые приложения. Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ – сепарабельное банахово пространство всех ядерных операторов в $\mathcal{H}$ со следовой нормой $\|A\|_1 = \text{Tr } \sqrt{A^*A}$. Оператором плотности (квантовым состоянием) называется положительный ядерный оператор ρ с единичным следом [4], [15]. Множество всех операторов плотности $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ – выпуклое замкнутое подмножество $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$, которое является компактным тогда и только тогда, когда пространство $\mathcal{H}$ конечномерно. Множество $\text{extr } \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ замкнуто и состоит из чистых состояний – одномерных проекторов, причем в силу спектральной теоремы $\mathfrak{S}(\mathcal{H}) = \sigma\text{-co}(\text{extr } \mathfrak{S}(\mathcal{H}))$. Чистое состояние – проектор на подпространство, порожденное единичным вектором φ , будем обозначать P_φ .

С помощью приведенного в предложении 1 достаточного условия можно доказать μ -компактность множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Для этого в качестве $F(\mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ можно взять семейство функций вида $\rho \mapsto \text{Tr } H\rho$, где H – произвольный неограниченный положительный оператор с дискретным спектром конечной кратности (см. подробности в [11]). Используя лемму 3 в [16] при $m = 2$ и теорему 1, получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ является выпуклым μ -компактным множеством, обладающим сильным СЕ-свойством.

Заметим, что из μ -компактности множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и леммы 4 следует полезный результат о плотности атомических мер в множестве всех вероятностных мер на $\text{extr } \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ с заданным барицентром: каждая мера μ_0 из $M_1^+(\text{extr } \mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ является

пределом последовательности $\{\mu_n\}$ атомических мер из $M_1^+(\text{extr } \mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ таких, что $b(\mu_n) = b(\mu_0)$ для всех n .

Энтропия фон Неймана оператора плотности ρ определяется выражением

$$H(\rho) = - \sum_i \lambda_i \log \lambda_i,$$

в котором $\{\lambda_i\}$ – набор собственных значений оператора ρ , и является замкнутой вогнутой функцией на $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ со значениями в $[0, +\infty]$ [17].

Рассмотрим составную квантовую систему, состояния которой – это операторы плотности в тензорном произведении $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ двух сепарабельных гильбертовых пространств $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$, характеризующих отдельные подсистемы. Рассмотрим энтропию частичного состояния – замкнутую вогнутую функцию

$$f_{\mathcal{H}}: \omega \mapsto H(\text{Tr}_{\mathcal{K}} \omega) \in [0, +\infty]$$

на $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, где $\text{Tr}_{\mathcal{K}}(\cdot)$ – частичный след по пространству $\mathcal{K}$ [4]. Значение выпуклого замыкания функции $f_{\mathcal{H}}$ в состоянии $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ является важной характеристикой этого состояния, называемой *сцепленностью формирования* (Entanglement of Formation=EoF) и обозначаемой $E_F(\omega)$ [18], [19], т.е.

$$E_F(\omega) = \overline{\text{co}} f_{\mathcal{H}}(\omega) \quad \forall \omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}).$$

Нетрудно показать, что $E_F(\omega) = 0$ тогда и только тогда, когда ω является *несцепленным* состоянием, т.е. лежит в выпуклом замыкании множества чистых состояний-произведений.

Аналогично можно определить функцию $f_{\mathcal{K}}: \omega \mapsto H(\text{Tr}_{\mathcal{H}} \omega)$. Несмотря на то, что функции $f_{\mathcal{H}}$ и $f_{\mathcal{K}}$ различны, они совпадают на множестве $\text{extr } \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ [4]. Поэтому определение ЕоF не зависит от выбора пространства, по которому берется частичный след, т.е.

$$E_F = \overline{\text{co}} f_{\mathcal{H}} = \overline{\text{co}} f_{\mathcal{K}}. \quad (11)$$

Из представленных выше результатов с учетом предложения 4 можно получить следующие наблюдения о свойствах ЕоF.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. А) ЕоF является максимальной замкнутой выпуклой функцией, совпадающей на множестве чистых состояний с энтропией частичного состояния.

Б) Пусть $\mathcal{L}$ – некоторое подпространство $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. ЕоF непрерывна и ограничена на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{L}) = \{\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}) \mid \text{supp } \omega \subseteq \mathcal{L}\}$ тогда и только тогда, когда функция

$$\varphi \mapsto f_{\mathcal{H}}(P_{\varphi}) = H(\text{Tr}_{\mathcal{K}} P_{\varphi})$$

непрерывна и ограничена на единичной сфере подпространства $\mathcal{L}$.

В) ЕоF непрерывна и ограничена на $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ тогда и только тогда, когда либо $\dim \mathcal{H} < +\infty$, либо $\dim \mathcal{K} < +\infty$.⁶

⁶Заметим, что непосредственное доказательство непрерывности ЕоF в случае, когда $\dim \mathcal{H} < +\infty$ и $\dim \mathcal{K} < +\infty$ не является тривиальным [20].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение А следует из предложения 3 и утверждения А теоремы 2.

Утверждение Б вытекает из следствия 4.

Утверждение В следует из Б с учетом (11).

Утверждение А предложения 5 интересно в связи с тем, что всякая функция, претендующая на роль меры сцепленности, должна совпадать на множестве чистых состояний с энтропией частичного состояния – функцией $f_{\mathcal{H}}$ [5].

Если $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ – бесконечномерные пространства, то ЕоФ не является непрерывной функцией на $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, но в $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ существуют такие подпространства $\mathcal{L}$, что несмотря на неограниченность функций $f_{\mathcal{H}}$ и $f_{\mathcal{K}}$ на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{L})$, условие утверждения Б предложения 5 выполнено. В силу этого утверждения ЕоФ непрерывна и ограничена на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{L})$. Важность этого результата связана с тем, что в силу наблюдения из [21] выходную энтропию любого квантового канала можно представить в виде сужения ЕоФ на множество $\mathfrak{S}(\mathcal{L})$ при некотором $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. Практически доказать выполнение условия утверждения Б для заданного подпространства $\mathcal{L}$ можно с помощью достаточного условия непрерывности квантовой энтропии для некомпактных множеств состояний [22].

Из следствия 3 с учетом предложения 4 и спектральной теоремы получаем следующее утверждение, которое можно использовать для построения непрерывных выпуклых (вогнутых) характеристик квантовых состояний.

СЛЕДСТВИЕ 5. Для любой функции $f \in C(\text{extr } \mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ функция

$$f_*(\rho) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i f(\rho_i) \mid \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i \rho_i = \rho, \{\rho_i\} \subset \text{extr } \mathfrak{S}(\mathcal{H}), \{\pi_i\} \in \mathfrak{P}_{\infty} \right\}$$

является выпуклым непрерывным ограниченным расширением функции f на множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Эта функция совпадает с точной верхней гранью всех выпуклых замкнутых расширений функции f на множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и с точной верхней гранью всех выпуклых ограниченных сверху расширений функции f на множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

Поскольку множество $\text{extr } \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ состоит из чистых состояний – одномерных проекторов – множество $C(\text{extr } \mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ изоморфно множеству непрерывных ограниченных функций на единичной сфере гильбертова пространства $\mathcal{H}$, обладающих свойством инвариантности по отношению к умножению аргумента на комплексные числа, равные по модулю единице.

С помощью следствия 5 можно построить непрерывную ограниченную квазимеру сцепленности,⁷ которая тесно связана с сцепленностью формирования E_F . Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для произвольного чистого состояния ω из $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ пусть

$$f_{\mathcal{H}}^n(\omega) = - \sum_{i=1}^n \lambda_i \log \lambda_i + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \log \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right),$$

где $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ – множество n наибольших собственных значений (с учетом кратности) состояний $\text{Tr}_{\mathcal{K}} \omega \cong \text{Tr}_{\mathcal{H}} \omega$. В силу предложения 4 из [17] последовательность $\{f_{\mathcal{H}}^n\}$

⁷Как было отмечено выше, всякая мера сцепленности совпадает на множестве чистых состояний с энтропией частичного состояния и, следовательно, не может быть непрерывной в бесконечномерном случае.

функций из $C(\text{extr } \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}))$ возрастает и поточечно сходится к энтропии частичного состояния – функции $f_{\mathcal{H}}$.

Пусть E_F^n – расширение $(f_{\mathcal{H}}^n)_*$ функции $f_{\mathcal{H}}^n$ на множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$, определенное в следствии 5 при $f = f_{\mathcal{H}}^n$. В силу этого следствия E_F^n – функция из $P(\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}))$. По построению функция E_F^n обладает следующими свойствами:

- 1) $E_F^n(\omega) = 0$ тогда и только тогда, когда ω – несцепленное состояние;
- 2) $E_F^n(\omega) \leq E_F(\omega)$ для любого состояния ω ;
- 3) $E_F^n(\omega) = E_F(\omega)$ для любого состояния ω , у которого либо $\text{rank Tr}_{\mathcal{H}} \omega \leq n$, либо $\text{rank Tr}_{\mathcal{H}} \omega \leq n$;
- 4) $0 \leq E_F^n(\omega) \leq \log n$ для любого состояния ω .

Последовательность $\{E_F^n\}$ функций из $P(\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}))$ возрастающая. Следовательно, ее поточечный предел $E_F^{+\infty}$ – выпуклая замкнутая функция на $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$, совпадающая на множестве чистых состояний с энтропией частичного состояния. Интересный вопрос – соотношение между $E_F^{+\infty}$ и E_F . По построению $E_F^{+\infty}(\omega) \leq E_F(\omega)$ для произвольного состояния ω , причем равенство имеет место для любого чистого состояния ω , а также, в силу свойства 3), для любого состояния ω , у которого либо $\text{rank Tr}_{\mathcal{H}} \omega < +\infty$, либо $\text{rank Tr}_{\mathcal{H}} \omega < +\infty$. Доказательство совпадения $E_F^{+\infty}$ и E_F на всем множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ означало бы, что E_F – функция класса $\hat{P}(\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}))$.

7. Возможные обобщения. Сепарабельность, метризуемость и μ -компактность множества $\mathcal{A}$ существенно использовались в доказательствах основных результатов статьи. Поскольку эти условия достаточно ограничительны, кратко обсудим возможности обобщения этих результатов на более широкий класс выпуклых множеств.

Прежде всего отметим, что основной результат статьи – теорема 1 – непосредственно обобщается на класс компактных выпуклых подмножеств произвольного локально выпуклого линейного топологического пространства. Для получения такого обобщения необходимо вместо леммы 1 использовать предложение I.2.3 из [3] и несколько видоизменить доказательство теоремы 1. Однако ослабление требования компактности в этом случае вызывает большие затруднения.

Отметим также, что равносильность свойств (i) и (iii) в теореме 1 можно доказать, заменив требование μ -компактности множества на требование совпадения выпуклого замыкания и выпуклой оболочки произвольной непрерывной ограниченной функции на этом множестве.

Автор благодарен В. М. Тихомирову и участникам его семинара, в особенности, В. Ю. Протасову, а также Е. С. Половинкину и М. В. Балашову за интересное обсуждение. Автор благодарен рецензенту за полезные замечания, учтенные при переработке первоначальной версии статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач, Нелинейный анализ и его приложения*, Наука, М., 1974.
- [2] Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*, Физматлит, М., 2004.

- [3] E. Alfsen, *Compact convex sets and boundary integrals*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **57**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1971.
- [4] А. С. Холево, *Введение в квантовую теорию информации*, МЦНМО, М., 2002.
- [5] A. Lima, “On continuous convex functions and split faces”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **25**:3 (1972), 27–40.
- [6] С. С. Кутателадзе, “Границы Шоке в K -пространствах”, *УМН*, **30**:4 (1975), 107–146.
- [7] Р. Фелпс, *Лекции о теоремах Шоке*, Мир, М., 1968.
- [8] М. В. Балашов, “О P -свойстве выпуклых компактов”, *Матем. заметки*, **71**:3 (2002), 323–333.
- [9] K. Parthasarathy, *Probability measures on metric spaces*, Probability and Mathematical Statistics, **3**, Academic Press, New York–London, 1967.
- [10] G. A. Edgar, “Extremal integral representations”, *J. Funct. Anal.*, **23**:2 (1976), 145–161.
- [11] А. С. Холево, М. Е. Широков, “Непрерывные ансамбли и классическая пропускная способность квантовых каналов бесконечной размерности”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **50**:1 (2006), 98–114; [arXiv: quant-ph/0408176](#).
- [12] R. D. Bourgin, *Geometric aspects of convex sets with the Radon-Nikodiy property*, Lecture Notes in Math., **993**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [13] R. D. Bourgin, G. A. Edgar, “Noncompact simplexes in Banach spaces with the Radon-Nikodiy property”, *J. Funct. Anal.*, **23**:2 (1976), 162–176.
- [14] М. Е. Широков, *Properties of probability measures on the set of quantum states and their applications*, [arXiv: math-ph/0607019](#).
- [15] M. Keyl, “Fundamentals of Quantum Information Theory”, *Phys. Rep.*, **369**:5 (2002), 431–548; [arXiv: quant-ph/0202122](#).
- [16] М. Е. Широков, “The Holevo capacity of infinite dimensional channels and the additivity problem”, *Comm. Math. Phys.*, **262**:1 (2006), 137–159; [arXiv: quant-ph/0408009](#).
- [17] G. Lindblad, “Expectation and Entropy Inequalities for Finite Quantum Systems”, *Comm. Math. Phys.*, **39**:2 (1974), 111–119.
- [18] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, W. K. Wootters, “Mixed-State Entanglement and Quantum Error Correction”, *Phys. Rev. A* (3), **54**:5 (1996), 3824–3851; [arXiv: quant-ph/9604024](#).
- [19] М. Е. Широков, *On entropic quantities related to the classical capacity of infinite dimensional quantum channels*, [arXiv: quant-ph/0411091](#).
- [20] M. A. Nielsen, “Continuity bounds for entanglement”, *Phys. Rev. A* (3), **61**:6 (2000).
- [21] K. Matsumoto, T. Shimono, A. Winter, “Remarks on additivity of the Holevo channel capacity and of the entanglement of formation”, *Comm. Math. Phys.*, **246**:3 (2004), 427–442.
- [22] М. Е. Широков, *The convex closure of the output entropy of infinite dimensional channels and the additivity problem*, [arXiv: quant-ph/0608090](#).

М. Е. Широков

Математический институт им. В. А. Стеклова

E-mail: msh@mi.ras.ru

Поступило

14.08.2006

Исправленный вариант

22.02.2007