Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Балова, Об оптимальном восстановлении решений задачи Дирихле по неточным исходным данным, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 3, 323–334

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3846>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 08:58:35

УДК 517.5

Об оптимальном восстановлении решений задачи Дирихле по неточным исходным данным

Е. А. Балова

В работе рассматривается задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле в d -мерном шаре на сфере радиуса r по неточно заданным следам решения на сферах радиусов R_1 и R_2 , $R_1 < r < R_2$. Изучается также задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле в d -мерном шаре по конечному набору коэффициентов Фурье граничной функции, заданных с погрешностью в среднеквадратичной и равномерной метриках.

Библиография: 9 названий.

В работах [1] и [2] (см. также [3]–[5]) было начато исследование ряда модельных задач восстановления решений уравнений математической физики на основе методов теории оптимального восстановления. При этом использовался общий подход к задачам оптимального восстановления линейных операторов по неточной информации об элементах, к которым применялись эти операторы, разработанный в работах [6] и [7]. В данной работе продолжено изучение ряда задач оптимального восстановления решений уравнений математической физики по неточным исходным данным на примере задачи Дирихле в d -мерном единичном шаре. Пусть

$$\mathbb{B}^d = \left\{ x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x|^2 = \sum_{j=1}^d x_j^2 < 1 \right\},$$

функция $u(\cdot)$ – решение задачи Дирихле в $\mathbb{B}^d$:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, \\ u|_{\mathbb{S}^{d-1}} &= f(x'), \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x' = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x'| = 1\},$$

а $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Предположим, что нам известны две функции $y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ такие, что

$$\|u(R_j x') - y_j(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta_j, \quad j = 1, 2, \quad 0 < R_1 < R_2 \leq 1.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-81004).

Требуется по этим функциям наилучшим образом восстановить решение задачи (1) на сфере радиуса r , где $R_1 < r < R_2$. В качестве методов восстановления будем рассматривать всевозможные отображения $\varphi: L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Погрешностью данного метода φ назовем величину

$$e_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2, \varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \|u(R_j x') - y_j(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta_j, j=1,2}} \|u(rx') - \varphi(y_1, y_2)(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2, \varphi) = \inf_{\varphi: L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow L_2(\mathbb{S}^{d-1})} e_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань называется *оптимальным*.

Известно (см. [8]), что

$$L_2(\mathbb{S}^{d-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k,$$

где $\dim H_0 = a_0 = 1$,

$$\dim H_k = a_k = (2k + d - 2) \frac{(k + d - 3)!}{(d - 2)! k!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

(H_k – множество сферических гармоник порядка k). Выберем в H_k ортонормированный базис $\{Y_j^{(k)}(\cdot)\}_{j=1}^{a_k}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < R_1 < r < R_2 < 1$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$. Положим

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= \begin{cases} \left(\frac{r}{R_1}\right)^{2(m-1)} \frac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - R_1^2}, & \delta_1 < \delta_2, \\ 0, & \delta_1 \geq \delta_2, \end{cases} \\ \hat{\lambda}_2 &= \begin{cases} \left(\frac{r}{R_2}\right)^{2(m-1)} \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, & \delta_1 < \delta_2, \\ 1, & \delta_1 \geq \delta_2, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

где m – натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^m \leq \frac{\delta_1}{\delta_2} < \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{m-1}.$$

Тогда

$$E_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2) = \sqrt{\hat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \hat{\lambda}_2 \delta_2^2},$$

а метод

$$\varphi(y_1, y_2)(x') = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=0}^{a_k} \frac{\hat{\lambda}_1 R_1^k y_{kj}^{(1)} + \hat{\lambda}_2 R_2^k y_{kj}^{(2)}}{\hat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \hat{\lambda}_2 R_2^{2k}} Y_j^{(k)}(x'),$$

где

$$y_{kj}^{(i)} = \int_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} y_i(x') Y_j^{(k)}(x') dx', \quad i = 1, 2,$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|u(rx')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \rightarrow \max, \quad \|u(R_i x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \leq \delta_i^2, \quad i = 1, 2, \quad f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}), \quad (3)$$

где $u(\cdot)$ – решение задачи (1). Если

$$f(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'), \quad (4)$$

то решение задачи (1) записывается в виде

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad (5)$$

где $r = |x|$, $x = rx'$. Тем самым, задача (3) имеет следующий вид:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \rightarrow \max, \quad \sum_{k=0}^{\infty} R_i^{2k} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \leq \delta_i^2, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Положим

$$u_k = \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2.$$

Тогда задача (6) будет иметь вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} u_k \rightarrow \max, \quad \sum_{k=0}^{\infty} R_i^{2k} u_k \leq \delta_i^2, \quad i = 1, 2, \quad u_k \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Рассмотрим функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(u, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-r^{2k} + \lambda_1 R_1^{2k} + \lambda_2 R_2^{2k}) u_k, \quad u = \{u_k\}_{k=0}^{\infty}.$$

Из результатов, полученных в работе [7] (см. также [9]), вытекает, что если найдутся такие $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2 \geq 0$, что для допустимой в задаче (7) последовательности $\hat{u} = \{\hat{u}_k\}_{k=0}^{\infty}$ выполнены условия

$$(a) \quad \min_{u_k \geq 0} \mathcal{L}(u, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(\hat{u}, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2),$$

$$(b) \quad \hat{\lambda}_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} R_i^{2k} \hat{u}_k - \delta_i^2 \right) = 0, \quad i = 1, 2,$$

то $\hat{u}$ – решение задачи (7), а ее значение равно $\hat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \hat{\lambda}_2 \delta_2^2$. Если при этом для всех $y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ существует решение $f_{y_1, y_2}(\cdot)$ экстремальной задачи

$$\hat{\lambda}_1 \|u(R_1 x') - y_1(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 + \hat{\lambda}_2 \|u(R_2 x') - y_2(x')\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \rightarrow \min, \quad f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \quad (8)$$

(где по-прежнему $u(\cdot)$ – решение задачи (1)), то

$$E_r(R_1, R_2, \delta_1, \delta_2) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2},$$

а метод

$$\varphi(y_1, y_2)(x') = u_{y_1, y_2}(rx'),$$

где $u_{y_1, y_2}(\cdot)$ – решение задачи (1) с граничной функцией $f_{y_1, y_2}(\cdot)$, является оптимальным.

Запишем функцию Лагранжа в виде

$$\mathcal{L}(u, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} g(k) u_k,$$

где

$$g(t) = -1 + \lambda_1 \left(\frac{R_1}{r} \right)^{2t} + \lambda_2 \left(\frac{R_2}{r} \right)^{2t}.$$

Пусть $\delta_1 < \delta_2$ и $m \in \mathbb{N}$ таково, что

$$\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^m \leq \frac{\delta_1}{\delta_2} < \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{m-1}.$$

Нетрудно проверить, что для $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$, определенных равенством (2), функция $g(t)$ при $t = m-1, m$ равна нулю. Так как функция $g(\cdot)$ является выпуклой, то $g(k) \geq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, при всех $u_k \geq 0$, $k = 0, 1, \dots$,

$$\mathcal{L}(u, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq 0.$$

Положим $\widehat{u}_k = 0$, $k \neq m-1, m$,

$$\widehat{u}_{m-1} = R_1^2 R_2^2 \frac{\delta_1^2 R_1^{-2m} - \delta_2^2 R_2^{-2m}}{R_2^2 - R_1^2}, \quad \widehat{u}_m = \frac{\delta_2^2 R_2^{-2(m-1)} - \delta_1^2 R_1^{-2(m-1)}}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Тогда

$$\mathcal{L}(\widehat{u}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0$$

и, следовательно, условие (а) выполнено. Непосредственной проверкой можно убедиться, что условия (б) также выполняются. Тем самым, $\widehat{u}$ – решение задачи (7).

Если $\delta_1 \geq \delta_2$, то положим

$$\widehat{\lambda}_1 = 0, \quad \widehat{\lambda}_2 = 1, \quad \widehat{u}_0 = \delta^2, \quad \widehat{u}_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Нетрудно проверить, что определенные так $\widehat{u}$, $\widehat{\lambda}_1$, $\widehat{\lambda}_2$ удовлетворяют условиям (а), (б) и $\widehat{u}$ – допустимая в (7) последовательность, а следовательно, $\widehat{u}$ – решение задачи (7).

Перейдем к решению задачи (8). Она может быть записана в виде

$$\widehat{\lambda}_1 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} (R_1^k c_{kj} - y_{kj}^{(1)})^2 + \widehat{\lambda}_2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} (R_2^k c_{kj} - y_{kj}^{(2)})^2 \rightarrow \min, \quad f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}),$$

где c_{kj} – коэффициенты Фурье $f(\cdot)$ (см. (4)). Решая эту задачу, получаем, что

$$f_{y_1, y_2}(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \frac{\widehat{\lambda}_1 R_1^k y_{kj}^{(1)} + \widehat{\lambda}_2 R_2^k y_{kj}^{(2)}}{\widehat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \widehat{\lambda}_2 R_2^{2k}} Y_j^{(k)}(x'),$$

а метод

$$\varphi(y_1, y_2)(x') = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=1}^{a_k} \frac{\widehat{\lambda}_1 R_1^k y_{kj}^{(1)} + \widehat{\lambda}_2 R_2^k y_{kj}^{(2)}}{\widehat{\lambda}_1 R_1^{2k} + \widehat{\lambda}_2 R_2^{2k}} Y_j^{(k)}(x')$$

является оптимальным.

Займемся теперь восстановлением решения задачи Дирихле, когда известен конечный набор приближенно заданных коэффициентов Фурье граничной функции. Более точно, предположим, что для любой функции $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ известен вектор

$$\widetilde{f}^N = \{y_{kj}\}, \quad \begin{aligned} k &= 0, 1, \dots, n_0 - 1, \quad j = 1, \dots, a_k, \\ k &= n_0, \quad j = 1, \dots, J_{n_0}, \quad 0 \leq J_{n_0} < a_{n_0}, \end{aligned} \quad N = a_0 + \dots + a_{n_0-1} + J_{n_0},$$

такой, что

$$\|\widetilde{f}^N - f^N\|_{l_p^N} \leq \delta,$$

где $\delta > 0$,

$$f^N = \{c_{kj}\}, \quad \begin{aligned} k &= 0, 1, \dots, n_0 - 1, \quad j = 1, \dots, a_k, \\ k &= n_0, \quad j = 1, \dots, J_{n_0}, \quad 0 \leq J_{n_0} < a_{n_0}, \end{aligned}$$

c_{kj} – коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$ (см. (4)) и для $a = (a_1, \dots, a_N)$

$$\|a\|_{l_p^N} = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^N |a_k|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{k=1, \dots, N} |a_k|, & p = \infty. \end{cases}$$

Наша задача заключается в том, чтобы по информации о векторе $\widetilde{f}^N$ восстановить решение задачи (1). Будем предполагать, что функция $f(\cdot)$ принадлежит обобщенному соболевскому классу

$$W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}) = \{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) : \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq 1\},$$

где для произвольного $\beta > 0$ оператор $(-\Delta_S)^{\beta/2}$ определяется равенством

$$(-\Delta_S)^{\beta/2} Y(x') = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\beta/2} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x')$$

для

$$Y(x') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'),$$

а $-\Lambda_k = -k(k + d - 2)$ – собственные числа оператора Бельтрами–Лапласа Δ_S (см. [8]). В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные операторы $\varphi: l_p^N \rightarrow L_2(\mathbb{B}^d)$. Назовем *погрешностью восстановления метода* φ величину

$$e_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta, \varphi) = \sup_{f(\cdot) \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{\tilde{f}^N \in l_p^N \\ \|f^N - \tilde{f}^N\|_{l_p^N} \leq \delta}} \|u(\cdot) - \varphi(\tilde{f}^N)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \inf_{\varphi: l_p^N \rightarrow L_2(\mathbb{B}^d)} e_{N,p}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta, \varphi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется *оптимальным*.

Рассмотрим сначала случай $p = 2$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть δ и β – произвольные положительные числа, $N = a_0 + \dots + a_{n_0-1} + J_{n_0}$, $0 \leq J_{n_0} < a_{n_0}$, $n_0 > 0$. Тогда

$$E_{N,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{d} + \frac{1}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0 + d)}},$$

а метод

$$\varphi(\tilde{f}^N)(x) = \sum_{k=0}^{n_0-1} |x|^k \left(1 + \frac{d}{2n_0 + d} \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{n_0}}\right)^\beta\right)^{-1} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj} Y_j^{(k)} \left(\frac{x}{|x|}\right)$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|u(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 \rightarrow \max, \quad \|f^N\|_{l_2^N}^2 \leq \delta^2, \quad \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \leq 1, \quad (9)$$

где $u(\cdot)$ – решение задачи (1). Ее можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k + d} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \rightarrow \max, \quad \sum_{k=0}^{n_0-1} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 + \sum_{j=1}^{J_{n_0}} c_{n_0j}^2 \leq \delta^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \leq 1.$$

Введем обозначения

$$u_k = \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2, \quad u'_{n_0} = \sum_{j=1}^{J_{n_0}} c_{n_0j}^2.$$

В новых обозначениях получим задачу

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{2k + d} \rightarrow \max, \quad \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + u'_{n_0} \leq \delta^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta u_k \leq 1, \\ u_k \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad u_{n_0} \geq u'_{n_0} \geq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Введем для задачи (10) функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\{u_k\}_0^\infty, u'_{n_0}, \mu_1, \mu_2) = & \sum_{k=0}^{n_0-1} \left(-\frac{1}{2k+d} + \mu_1 + \mu_2 \Lambda_k^\beta \right) u_k \\ & + \mu_1 u'_{n_0} + \sum_{k=n_0}^\infty \left(-\frac{1}{2k+d} + \mu_2 \Lambda_k^\beta \right) u_k. \end{aligned}$$

Для рассматриваемого случая из работ [7], [9] следует, что если найдутся неотрицательные $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$ и допустимые в (10) $\{\hat{u}_k\}_0^\infty$, $\hat{u}'_{n_0}$ такие, что

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \min_{\substack{u_k \geq 0 \\ u_{n_0} \geq u'_{n_0}}} \mathcal{L}(\{u_k\}_0^\infty, u'_{n_0}, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2) = \mathcal{L}(\{\hat{u}_k\}_0^\infty, \hat{u}'_{n_0}, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2), \\ \text{(b)} \quad & \hat{\mu}_1 \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} \hat{u}_k + \hat{u}'_{n_0} - \delta^2 \right) + \hat{\mu}_2 \left(\sum_{k=1}^\infty \Lambda_k^\beta \hat{u}_k - 1 \right) = 0, \end{aligned}$$

то $\{\hat{u}_k\}_0^\infty$ – решение задачи (10). Если при этом для любого фиксированного вектора $\tilde{f}^N \in l_2^N$ существует решение $\tilde{f}(\cdot)$ экстремальной задачи

$$\hat{\mu}_1 \|f^N - \tilde{f}^N\|_{l_2^N}^2 + \hat{\mu}_2 \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \rightarrow \min, \quad f(\cdot) \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \quad (11)$$

то метод, задаваемый формулой (5) при $f(\cdot) = \tilde{f}(\cdot)$, является оптимальным, а для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$E_{N,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\hat{\mu}_1 \delta^2 + \hat{\mu}_2}. \quad (12)$$

Положим

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_1 &= \frac{1}{d}, \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{\Lambda_{n_0}^\beta (2n_0 + d)}, \\ \hat{u}_0 &= \delta^2, \quad \hat{u}_{n_0} = \frac{1}{\Lambda_{n_0}^\beta}, \quad \hat{u}'_{n_0} = 0, \quad \hat{u}_k = 0, \quad k \neq 0, n_0. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в том, что определенные так $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$, $\{\hat{u}_k\}_0^\infty$, $\hat{u}'_{n_0}$ удовлетворяют условию (b). Подставляя в функцию Лагранжа $\hat{\mu}_1$ и $\hat{\mu}_2$, убеждаемся в том, что $\mathcal{L}(\{u_k\}_0^\infty, u'_{n_0}, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2) \geq 0$ для всех допустимых в (10) $\{u_k\}_0^\infty$ и u'_{n_0} , а $\mathcal{L}(\{\hat{u}_k\}_0^\infty, \hat{u}'_{n_0}, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2) = 0$, т.е. и условие (a) тоже выполнено.

Для построения оптимального метода решим экстремальную задачу (11), которая может быть представлена в виде

$$\hat{\mu}_1 \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} \sum_{j=1}^{a_k} (c_{kj} - y_{kj})^2 + \sum_{j=1}^{J_{n_0}} (c_{n_0j} - y_{n_0j})^2 \right) + \hat{\mu}_2 \sum_{k=1}^\infty \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^\infty c_{kj}^2 \rightarrow \min.$$

Решив эту задачу, после подстановки значений $\hat{\mu}_1$ и $\hat{\mu}_2$ получим

$$\begin{aligned} \hat{c}_{kj} &= \left(1 + \frac{\Lambda_k^\beta d}{\Lambda_{n_0}^\beta (2n_0 + d)} \right)^{-1} y_{kj}, & k &= 0, 1, \dots, n_0 - 1, \quad j = 1, \dots, a_k, \\ & & k &= n_0, \quad j = 1, \dots, J_{n_0}, \\ \hat{c}_{kj} &= 0, & k &= n_0, \quad j = J_{n_0+1}, \dots, a_{n_0}, \\ & & k &\geq n_0 + 1, \quad j = 1, \dots, a_k. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в формулу (5), получаем, что метод

$$\begin{aligned}\varphi_1(\tilde{f}^N)(x) &= \sum_{k=0}^{n_0-1} |x|^k \left(1 + \frac{d}{2n_0 + d} \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{n_0}}\right)^\beta\right)^{-1} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj} Y_j^{(k)} \left(\frac{x}{|x|}\right) \\ &\quad + |x|^{n_0} \frac{2n_0 + d}{2(n_0 + d)} \sum_{j=1}^{J_{n_0}} y_{n_0 j} Y_j^{(n_0)} \left(\frac{x}{|x|}\right)\end{aligned}$$

является оптимальным. Подставляя в формулу (12) $\hat{\mu}_1$ и $\hat{\mu}_2$, получаем

$$E_{N,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{d} + \frac{1}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0 + d)}}.$$

Покажем, что метод

$$\varphi(\tilde{f}^N)(x) = \sum_{k=0}^{n_0-1} |x|^k \left(1 + \frac{d}{2n_0 + d} \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{n_0}}\right)^\beta\right)^{-1} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj} Y_j^{(k)} \left(\frac{x}{|x|}\right),$$

используя меньший объем информации, также является оптимальным. Рассмотрим задачу (9) для $J_{n_0} = 0$. Положим

$$N_1 = \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k.$$

По доказанному выше метод

$$\varphi(\tilde{f}^{N_1})(x) = \sum_{k=0}^{n_0-1} |x|^k \left(1 + \frac{d}{2n_0 + d} \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{n_0}}\right)^\beta\right)^{-1} \sum_{j=1}^{a_k} y_{kj} Y_j^{(k)} \left(\frac{x}{|x|}\right)$$

является оптимальным для этого случая и

$$E_{N_1,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{d} + \frac{1}{\Lambda_{n_0}^\beta(2n_0 + d)}}.$$

Используя определение оптимального метода и погрешности оптимального восстановления, а также учитывая, что

$$\|f^{N_1} - \tilde{f}^{N_1}\|_{l_2^{N_1}} \leq \|f^N - \tilde{f}^N\|_{l_2^N}$$

и

$$\varphi(\tilde{f}^{N_1})(x) \equiv \varphi(\tilde{f}^N)(x),$$

имеем

$$\begin{aligned}E_{N_1,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) &= \sup_{f(\cdot) \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{\tilde{f}^{N_1} \in l_2^{N_1} \\ \|f^{N_1} - \tilde{f}^{N_1}\|_{l_2^{N_1}} \leq \delta}} \|u(\cdot) - \varphi(\tilde{f}^{N_1})(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \\ &\geq \sup_{f \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{\tilde{f}^N \in l_2^N \\ \|f^N - \tilde{f}^N\|_{l_2^N} \leq \delta}} \|u(\cdot) - \varphi(\tilde{f}^N)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sup_{f \in W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1})} \sup_{\substack{\tilde{f}^{N_1} \in l_2^{N_1} \\ \|f^{N_1} - \tilde{f}^{N_1}\|_{l_2^{N_1}} \leq \delta}} \|u(x) - \varphi_1(\tilde{f}^N)(x)\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \\
&= E_{N,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta).
\end{aligned}$$

В силу равенства

$$E_{N_1,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = E_{N,2}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta),$$

получаем, что метод $\varphi(\tilde{f}^N)(\cdot)$ является оптимальным.

Из доказанной теоремы следует, что можно построить оптимальный метод, не использующий коэффициенты $y_{n_0j}, j = 1, \dots, J_{n_0}$, если $J_{n_0} > 0$ (т.е. количество коэффициентов в последней группе меньше размерности H_{n_0}).

Перейдем к случаю равномерной метрики ($p = \infty$).

ТЕОРЕМА 3. Пусть δ и β – произвольные положительные числа, $N = a_0 + \dots + a_{n_0-1} + J_{n_0}$, $0 \leq J_{n_0} < a_{n_0}$, $n_0 > 0$. Положим $\hat{m} = \min\{m_0, n_0\}$, где

$$m_0 = \max \left\{ m \in \mathbb{Z} : \delta^2 \sum_{k=1}^{m-1} a_k \Lambda_k^\beta < 1 \right\}.$$

Тогда

$$E_{N,\infty}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\delta^2 \sum_{k=0}^{\hat{m}-1} \left(\frac{1}{2k+d} - \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{\hat{m}}} \right)^\beta \frac{1}{2\hat{m}+d} \right) + \frac{1}{\Lambda_{\hat{m}}^\beta (2\hat{m}+d)}},$$

а метод

$$\varphi(\tilde{f}^N)(x) = \sum_{k=0}^{\hat{m}-1} |x|^k \sum_{j=1}^{a_k} \left(1 - \frac{2k+d}{2\hat{m}+d} \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{\hat{m}}} \right)^\beta \right) y_{kj} Y_j^{(k)} \left(\frac{x}{|x|} \right) \quad (13)$$

является оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|u\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 \rightarrow \max, \quad \|f^N\|_{l_\infty^N}^2 \leq \delta, \quad \|(-\Delta_S)^{\beta/2} f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}^2 \leq 1. \quad (14)$$

Ее можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+d} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 &\rightarrow \max, & \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 &\leq 1, \\
c_{kj}^2 &\leq \delta^2, & k &= 0, 1, \dots, n_0 - 1, \quad j = 1, \dots, a_k, \\
& & k &= n_0, \quad j = 1, \dots, J_{n_0}.
\end{aligned}$$

Введем обозначения $c_{kj}^2 = v_{kj}$. Задача (14) в этих переменных имеет вид

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+d} \sum_{j=1}^{a_k} v_{kj} &\rightarrow \max, & \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{a_k} v_{kj} &\leq 1, \\
v_{kj} &\leq \delta^2, & k &= 0, 1, \dots, n_0 - 1, \quad j = 1, \dots, a_k, \\
& & k &= n_0, \quad j = 1, \dots, J_{n_0}, \\
v_{kj} &\geq 0, & k &= 0, 1, \dots, \quad j = 1, \dots, a_k.
\end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим функцию Лагранжа для этой задачи

$$\mathcal{L}(v, \mu, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2k+d} + \lambda \Lambda_k^{\beta} \right) \sum_{j=1}^{a_k} v_{kj} + \sum_{k=0}^{n_0-1} \sum_{j=1}^{a_k} \mu_{kj} v_{kj} + \sum_{j=1}^{J_{n_0}} \mu_{n_0j} v_{n_0j},$$

где

$$\begin{aligned} v &= \{v_{kj}\}, & k &= 0, 1, \dots, \quad j = 1, \dots, a_k, \\ \mu &= \{\mu_{kj}\}, & k &= 0, 1, \dots, n_0 - 1, \quad j = 1, \dots, a_k, \\ & & k &= n_0, \quad j = 1, \dots, J_{n_0}. \end{aligned}$$

Используя те же общие результаты из работ [7] и [9], что и в предыдущих доказательствах, сведем задачу к нахождению неотрицательных $\hat{\mu}_{kj}$, $\hat{\lambda}$ и допустимых в задаче (15) $\hat{v}_{kj}$ таких, что

$$\begin{aligned} (a) \quad & \min_{v_{kj} \geq 0} \mathcal{L}(v, \hat{\mu}, \hat{\lambda}) = \mathcal{L}(\hat{v}, \hat{\mu}, \hat{\lambda}), \\ (b) \quad & \sum_{k=0}^{n_0-1} \sum_{j=1}^{a_k} \hat{\mu}_{kj} (\hat{v}_{kj} - \delta^2) + \sum_{j=1}^{J_{n_0}} \hat{\mu}_{n_0j} (\hat{v}_{n_0j} - \delta^2) + \hat{\lambda} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\beta} \sum_{j=1}^{a_k} \hat{v}_{kj} - 1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Если при этом для любого фиксированного вектора $\tilde{f}^N \in l_{\infty}^N$ существует решение $\tilde{f}(\cdot)$ экстремальной задачи

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n_0-1} \sum_{j=1}^{a_k} \hat{\mu}_{kj} (c_{kj} - y_{kj})^2 + \sum_{j=1}^{J_{n_0}} \hat{\mu}_{n_0j} (c_{n_0j} - y_{n_0j})^2 + \hat{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k^{\beta} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj}^2 \rightarrow \min, \\ f(\cdot) \in W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}), \end{aligned} \quad (16)$$

(c_{kj} – коэффициенты Фурье функции $f(\cdot)$), то метод, задаваемый формулой (5) при $\tilde{f}(\cdot) = \tilde{f}(\cdot)$, является оптимальным и

$$E_{N,\infty}(W_2^{\beta}(\mathbb{S}^{d-1}), \delta) = \sqrt{\delta^2 \left(\sum_{k=0}^{n_0-1} \sum_{j=1}^{a_k} \hat{\mu}_{kj} + \sum_{j=1}^{J_{n_0}} \hat{\mu}_{n_0j} \right) + \hat{\lambda}}. \quad (17)$$

Положим

$$\begin{aligned} \hat{v}_{kj} &= \delta^2, & k &= 0, 1, \dots, m_0 - 1, \quad j = 1, \dots, a_k, \\ \hat{v}_{m_0,j} &= \frac{1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{m_0-1} a_k \Lambda_k^{\beta}}{a_{m_0} \Lambda_{m_0}^{\beta}}, & j &= 1, \dots, a_{m_0}, \\ \hat{v}_{kj} &= 0, & k &> m_0, \quad j = 1, \dots, a_k. \end{aligned}$$

Докажем допустимость последовательности $\hat{v}$. При $m_0 \leq n_0$ (в случае, когда $m_0 \geq n_0 + 1$, это очевидно) докажем, что $\hat{v}_{m_0j} \leq \delta^2$, $j = 1, \dots, a_{m_0}$. Если предположить противное, то

$$\frac{1 - \delta^2 \sum_{k=1}^{m_0-1} a_k \Lambda_k^{\beta}}{a_{m_0} \Lambda_{m_0}^{\beta}} > \delta^2.$$

Отсюда вытекает, что

$$\delta^2 \sum_{k=1}^{m_0} a_k \Lambda_k^\beta < 1,$$

что противоречит определению m_0 . Положим

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\Lambda_{\hat{m}}^\beta (2\hat{m} + d)}, \quad \hat{\mu}_{kj} = \frac{1}{2k + d} - \frac{1}{2\hat{m} + d} \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{\hat{m}}} \right)^k, \\ k = 0, 1, \dots, \hat{m} - 1, \quad j = 1, \dots, a_k.$$

Остальные $\hat{\mu}_{kj}$ положим равными 0. Подставляя в функцию Лагранжа $\hat{\mu}$, $\hat{\lambda}$ и $\hat{v}$, нетрудно проверить, что $\mathcal{L}(v, \hat{\mu}, \hat{\lambda}) \geq 0$ для всех допустимых v и $\mathcal{L}(\hat{v}, \hat{\mu}, \hat{\lambda}) = 0$. Тем самым, условие (а) выполнено. Непосредственная проверка показывает, что условие (b) тоже выполнено.

Перейдем к построению оптимального метода. Для этого рассмотрим задачу (16). Ее решением будут коэффициенты

$$\hat{c}_{kj} = \frac{\hat{\mu}_{kj}}{\hat{\mu}_{kj} + \hat{\lambda} \Lambda_k^\beta} y_{kj}, \quad k = 0, 1, \dots, \hat{m} - 1, \quad j = 1, \dots, a_k, \\ \hat{c}_{kj} = 0, \quad k \geq \hat{m}, \quad j = 1, \dots, a_k.$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (5) и учитывая вид $\hat{\mu}_{kj}$ и $\hat{\lambda}$, получаем, что метод (13) является оптимальным. Подставляя $\hat{\mu}_{kj}$ и $\hat{\lambda}$ в формулу (17), получаем выражение для $E_{N,\infty}(W_2^\beta(\mathbb{S}^{d-1}), \delta)$.

Пусть фиксирована погрешность $\delta > 0$ вычисления коэффициентов Фурье граничной функции $f(\cdot)$ в задаче Дирихле. Из теоремы 3 вытекает, что для максимально точного восстановления решения задачи Дирихле по приближенным значениям коэффициентов Фурье функции $f(\cdot)$ требуется знание первых $\sum_{k=0}^{m_0-1} a_k$ коэффициентов Фурье. Вычисление следующих коэффициентов Фурье (при условии, что они вычисляются с той же погрешностью) не приводит к уменьшению погрешности оптимального восстановления. Аналогичный эффект насыщения наблюдается в задачах оптимального восстановления производных по неточным коэффициентам Фурье (см. [6]) и при оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности по неточной информации о начальной температуре (см. [1]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. G. Magaril-II'yaev, K. Yu. Osipenko, V. M. Tikhomirov, "On optimal recovery of heat equation solutions", *Approximation Theory*, A volume dedicated to Borislav Bojanov, Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2004, 163–175.
- [2] К. Ю. Осипенко, "О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным", *Владикавказский матем. журн.*, **6:4** (2004), 55–62.
- [3] Е. В. Введенская, "Об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности по неточно заданной температуре в различные моменты времени", *Владикавказский матем. журн.*, **8:1** (2006), 16–21.
- [4] Е. А. Балова, "Об оптимальном восстановлении решения задачи Дирихле в кольце", *Владикавказский матем. журн.*, **8:2** (2006), 15–23.

- [5] Н. Д. Виск, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным”, *Матем. заметки*, **81**:6 (2007), 803–815.
- [6] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью”, *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 79–100.
- [7] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных”, *Функци. анализ и его прил.*, **37**:3 (2003), 51–64.
- [8] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.
- [9] К. Ю. Осипенко, “Неравенство Харди–Литтлвуда–Поля для аналитических функций из пространств Харди–Соболева”, *Матем. сб.*, **197**:3 (2006), 15–34.

Е. А. Балова

Российский государственный технологический университет
им. К. Э. Циолковского (МАТИ)

Поступило

10.11.2006