Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Корешков, О нильпотентности и разложении алгебр лиевского типа, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 3, 361–372

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3847>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:27:01

О нильпотентности и разложении алгебр лиевского типа

Н. А. Корешков

В работе доказан аналог теоремы Энгеля для градуированных алгебр, обладающих модулем лиевского типа. Кроме того, показано, что любая полупростая алгебра ассоциативного типа с упорядоченной градуировкой и одномерными пространствами градуировки есть прямая сумма двусторонних идеалов, являющихся простыми алгебрами.

Библиография: 8 названий.

В работах [1] и [2] был введен в рассмотрение класс алгебр, названный алгебрами лиевского типа, который содержит алгебры Ли, ассоциативные алгебры, супералгебры Ли с $\mathbb{Z}_2$ -градуировкой, цветные супералгебры Ли и квантовые алгебры Ли. В [3] было отмечено, что в этом классе содержатся конечномерные $\mathbb{Z}$ -формы модулярной алгебры Витта W_1 и гамильтоновой модулярной алгебры ранга один H_1 .

В данной статье рассматривается обобщение указанного выше класса, для которого доказывается аналог теоремы Энгеля, полученный ранее в [3] для алгебр из [1] и [2]. Заметим, что аналог теоремы Энгеля был получен ранее для некоторых классов алгебр, обобщающих понятие алгебры Ли. А именно, в [4] доказан аналог теоремы Энгеля для конечномерных алгебр Мальцева. В [5] этот результат усилен. Показано, что конечнопорожденная алгебра Мальцева, удовлетворяющая n -му условию Энгеля, нильпотентна, если характеристика основного поля равна нулю, либо больше n . Еще раньше в [6] установлена нильпотентность бинарно-лиевых энгелевых алгебр, удовлетворяющих условию максимальности для подалгебр. Кроме того, рассматриваются алгебры ассоциативного типа, являющиеся частным случаем алгебр лиевского типа. Изучение этого класса связано с тем, что модулярная алгебра W_n может быть получена редукцией в характеристику $p > 0$ коммутаторной алгебры некоторой $\mathbb{Z}$ -формы алгебры ассоциативного типа над полем нулевой характеристики. Приводятся и другие примеры алгебр ассоциативного типа.

Доказано, что однородный радикал алгебры ассоциативного типа над полем характеристики нуль совпадает с ядром некоторой формы, возникающей из функции следа со значениями в кольце многочленов. Кроме того, доказано, что полупростая алгебра ассоциативного типа над полем нулевой характеристики с одномерными пространствами градуировки, определяемая вполне упорядоченной группой, является прямой суммой простых двусторонних идеалов.

1. Алгебры лиевского типа. Пусть G – полугруппа, M – G -множество, причем для любых $\alpha, \beta \in G$, $t \in M$, $(\alpha\beta)t = \alpha(\beta t) = \beta(\alpha t)$. Обозначим через

$B = \bigoplus_{\alpha \in T} B_\alpha$ алгебру над полем k , а через $V = \bigoplus_{\gamma \in S} V_\gamma$ – пространство над тем же полем, где T и S – конечные подмножества в G и M соответственно.

Будем говорить, что линейное отображение $\rho: B \rightarrow \text{End}_k(V)$ является *представлением лиевского типа*, если

$$\rho(B_\alpha)V_\gamma \subset V_{\alpha\gamma}, \quad \alpha \in T, \quad \gamma, \alpha\gamma \in S, \quad \rho(B_\alpha)V_\gamma = 0, \quad \alpha\gamma \notin S, \quad (1)$$

и, кроме того, для любых $\alpha, \beta \in T$, $\gamma \in S$ существуют такие константы $\lambda, \mu \in k$, $\lambda \neq 0$, что

$$\rho(ab)v = \lambda\rho(a)\rho(b)v + \mu\rho(b)\rho(a)v, \quad (2)$$

когда $a \in B_\alpha$, $b \in B_\beta$, $v \in V_\gamma$.

Пространство V будем называть *модулем лиевского типа*, а соотношения (1) и (2) записывать в виде

1) $B_\alpha V_\gamma \subset V_{\alpha\gamma}$, когда $\alpha\gamma \in S$; $B_\alpha V_\gamma = 0$, когда $\alpha\gamma \notin S$;

2) $(ab)v = \lambda a(bv) + \mu b(av)$.

Если $M = G$ (действие G на M – это умножение в G), $V = B$, $T = S$, а в качестве ρ рассмотрим регулярное отображение $x \rightarrow L_x$, $x \in B$ (L_x – оператор левого умножения в B), то получим G -градуированную алгебру, в которой для элементов $a \in B_\alpha$, $b \in B_\beta$, $c \in B_\gamma$ выполняется соотношение

$$(ab)c = \lambda a(bc) + \mu b(ac), \quad \text{где } \lambda = \lambda(\alpha, \beta, \gamma), \mu = \mu(\alpha, \beta, \gamma) \in k, \quad \lambda \neq 0. \quad (3)$$

В этом случае алгебру B будем называть *алгеброй лиевского типа*. В частности, если G – коммутативная группа, то получаем определение алгебры лиевского типа из [1].

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие приведенное определение. Первый пример будет связан с модулярной алгеброй W_n картановского типа. Напомним определение алгебры W_n .

Пусть $O_n = F_p[x_1, \dots, x_n]/J$ – фактор-кольцо кольца многочленов над простым полем F_p характеристики $p > 0$, а J – идеал в $F_p[x_1, \dots, x_n]$, порожденный многочленами $x_i^p - 1$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $W_n = \{\sum_{i=1}^n f_i \partial_i, f_i \in O_n, i = 1, \dots, n\}$ – совокупность дифференциальных операторов, действующих на O_n , причем ∂_i – продолжение частной производной $\partial/\partial x_i$ на $F_p[x_1, \dots, x_n]$. Умножение в W_n задается правилом

$$[f\partial_i, g\partial_j] = f\partial_i(g)\partial_j - g\partial_j(f)\partial_i.$$

Тогда имеет место следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для алгебры W_n существуют алгебры $\widehat{W}_n$ и $\widetilde{W}_n$ над $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}$ -модуль V такие, что*

- 1) *пространство $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} V$ является модулем лиевского типа над $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{W}_n$ и $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{W}_n$, причем $F_p \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{W}_n \cong W_n$, а $F_p \otimes_{\mathbb{Z}} V \cong O_n$;*
- 2) *алгебра $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{W}_n$ является алгеброй лиевского типа и $F_p \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{W}_n^L \cong W_n$, где $\widetilde{W}_n^L$ – коммутаторная алгебра для $\widetilde{W}_n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $W_n^0 = \langle e(\alpha, i), \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_k \in F_p, i = 1, \dots, n \rangle$ свободный $\mathbb{Z}$ -модуль с базисом из элементов $e(\alpha, i)$. Превратим этот

модуль в алгебру $\widehat{W}_n$ над $\mathbb{Z}$, задавая на базисе следующее умножение:

$$e(\alpha, i) \circ e(\beta, j) = \bar{\beta}_i e(\alpha + \beta - \delta_i, j) - \bar{\alpha}_j e(\alpha + \beta - \delta_j, i), \quad (4)$$

где $\bar{\beta}_i, \bar{\alpha}_j \in \mathbb{Z}$, $1 \leq \bar{\beta}_i, \bar{\alpha}_j \leq p$, $\bar{\beta}_i 1_{F_p} = \beta_i$, $\bar{\alpha}_j 1_{F_p} = \alpha_j$, $\delta_s = (0, \dots, 1_s, \dots, 0)$. Легко видеть, что $F_p \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{W}_n \cong W_n$.

Пусть $G = \{(\alpha, i), \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_k \in F_p, i = 1, \dots, n\}$. Тогда G образует полугруппу относительно умножения

$$(\alpha, i)(\beta, j) = (\alpha + \beta - \delta_i, j). \quad (5)$$

Обозначим через $M = \{\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n), \gamma_k \in F_p\}$ и определим действие G на M по формуле $(\alpha, i)\gamma = \alpha + \gamma - \delta_i$. Коммутативность этого действия, т.е. $(\alpha, i)((\beta, j)\gamma) = (\beta, j)((\alpha, i)\gamma)$, очевидна.

Превратим $\mathbb{Z}$ -модуль W_n^0 в алгебру $\widetilde{W}_n$, задавая еще одно умножение по формуле

$$e(\alpha, i)e(\beta, j) = \bar{\beta}_i e(\alpha + \beta - \delta_i, j), \quad 1 \leq \bar{\beta}_i \leq p, \quad \bar{\beta}_i 1_{F_p} = \beta_i. \quad (6)$$

Тогда, полагая $T = G$, $S = M$, $V = \bigotimes_{\gamma \in S} V_\gamma$, $V_\gamma = \mathbb{Z}v_\gamma$ и определяя действие базисных элементов $e(\alpha, i)$ алгебры $\widetilde{W}_n$ на базисе V по формуле

$$e(\alpha, i)v_\gamma = \bar{\gamma}_i v_{\alpha + \gamma - \delta_i}, \quad 1 \leq \bar{\gamma}_i \leq p, \quad \bar{\gamma}_i 1_{F_p} = \gamma_i, \quad (7)$$

получим, что $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{W}_n = \bigotimes_{(\alpha, i) \in G} B_{\alpha, i}$, $B_{\alpha, i} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}e(\alpha, i)$ имеет в пространстве $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} V$ представление лиевского типа, так как

$$(e(\alpha, i)e(\beta, j))v_\gamma = \lambda e(\alpha, i)(e(\beta, j)v_\gamma),$$

где $\lambda = \bar{\beta}_i / \bar{\beta}_i + \gamma_i - \delta_{i, j}$. Заметим, что алгебра $\mathbb{Q} \otimes \widetilde{W}_n = \bigotimes_{(\alpha, i) \in G} B_{\alpha, i}$ является не только G -градуированным пространством, но и G -градуированной алгеброй, так как $B_{\alpha, i}B_{\beta, j} \subseteq B_{(\alpha, i)(\beta, j)}$ в силу формул (5) и (6).

Так как умножения (4) и (6) связаны равенством $e(\alpha, i) \circ e(\beta, j) = e(\alpha, i)e(\beta, j) - e(\beta, j)e(\alpha, i)$, то соотношения (1) и (2) опять выполняются и, следовательно, пространство $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} V$ является модулем лиевского типа и для алгебры $\mathbb{Q} \otimes \widetilde{W}_n$. Заметим, что если рассмотреть действие алгебры W_n на базисе $1_{F_p} \otimes_{\mathbb{Z}} v_\gamma$ пространства $F_p \otimes_{\mathbb{Z}} V$, определяемого редукцией в характеристику p формулы (7), то получим стандартное представление модулярной алгебры W_n в кольце срезанных многочленов O_n .

Кроме того, в пространстве $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{W}_n = \bigotimes_{(\alpha, i) \in G} B_{\alpha, i}$ возникает структура алгебры лиевского типа. Действительно,

$$(e(\alpha, i)e(\beta, j))e(\gamma, k) = \lambda e(\alpha, i)(e(\beta, j)e(\gamma, k)),$$

где $\lambda = \bar{\beta}_i / \bar{\beta}_i + \gamma_i - \delta_{i, j}$. Здесь $\mu = \mu((\alpha, i), (\beta, j), (\gamma, k)) = 0$ для всех $(\alpha, i), (\beta, j), (\gamma, k) \in G$ и $((\alpha, i)(\beta, j))(\gamma, k) = ((\beta, j)(\alpha, i))(\gamma, k)$ в G . Обозначим через $\widetilde{W}_n^L$ коммутаторную алгебру для $\widetilde{W}_n$, определяемую умножением $[b', b''] = b'b'' - b''b'$, где произведения в правой части последнего соотношения вычисляются по формуле (6). Тогда легко видеть, что $F_p \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{W}_n^L \cong W_n$.

Пусть теперь G – конечная полугруппа. Обозначим через $k[G]$ векторное пространство над полем k с базисом e_α , $\alpha \in G$. Превратим его в алгебру, полагая $e_\alpha e_\beta = \lambda_{\alpha,\beta} e_{\alpha\beta}$, $\lambda_{\alpha,\beta} \in k$, $\lambda_{\alpha,\beta} \neq 0$. Тогда соотношение $(e_{\alpha_1} e_{\alpha_2}) e_{\alpha_3} = \lambda e_{\alpha_1} (e_{\alpha_2} e_{\alpha_3})$ выполняется при $\lambda = (\lambda_{\alpha_1, \alpha_2} \cdot \lambda_{\alpha_1 \alpha_2, \alpha_3}) / (\lambda_{\alpha_2, \alpha_3} \cdot \lambda_{\alpha_1, \alpha_2 \alpha_3})$.

Приведенные примеры показывают, что имеет смысл рассматривать следующий частный случай модуля и алгебры лиевского типа. Пусть в формуле (2) параметр $\mu = \mu(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ для всех $\alpha, \beta \in T$, $\gamma \in S$, но $\lambda = \lambda(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$. Тогда соответствующий модуль будем называть *модулем ассоциативного типа*. Если ρ – регулярное отображение, а $M = G$, $V = B$, $T = S$, то соответствующую G -градуированную алгебру будем называть *алгеброй ассоциативного типа*.

Для алгебр, обладающих модулем лиевского типа выполняется утверждение, являющееся аналогом теоремы Энгеля.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $B = \bigotimes_{\alpha \in T \subset G} B_\alpha$ – конечномерная G -градуированная алгебра, а $V = \bigotimes_{\gamma \in S \subset M} V_\gamma$ – B -модуль лиевского типа. Если для любого $x \in B_\alpha$ оператор $\rho(x)$ нильпотентен (ρ -представление, соответствующее модулю V), то ассоциативная алгебра $A(\rho(B))$, порожденная операторами $\rho(x)$, $x \in B$, нильпотентна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U = \bigotimes_{\alpha \in T} U_\alpha$, $U_\alpha = B_\alpha \cap U$, – G -градуированное подпространство в B максимальной размерности, для которого ассоциативная подалгебра $A(\rho(U))$ в $\text{End}_k(V)$ нильпотентна. Подпространство U ненулевое, так как для любого однородного элемента $x \in B_\alpha$ алгебра $A(\rho(kx))$ нильпотентна.

Если n – степень нильпотентности алгебры $A(\rho(U))$, то для любого $z \in B_\alpha$ и любых $x_{\alpha_j} \in U_{\alpha_j}$, $j = 1, \dots, 2n - 1$ $\rho((\dots (zx_{\alpha_1})x_{\alpha_2}) \dots x_{\alpha_{2n-1}}) = 0$.

Действительно, для любых однородных элементов $v \in V_\gamma$, $z \in B_\beta$, $x_{\alpha_j} \in B_{\alpha_j}$, $j = 1, \dots, k$, имеет место формула

$$\rho(\dots (zx_{\alpha_1}) \dots x_{\alpha_k})v = \sum_{i=0}^k \sum_{\pi \in S_k} \lambda_{\pi, i} \rho(x_{\alpha_{\pi(1)}}) \dots \rho(x_{\alpha_{\pi(i)}}) \rho(z) \rho(x_{\alpha_{\pi(i+1)}}) \dots \rho(x_{\alpha_{\pi(k)}}), \quad (8)$$

где $\lambda_{\pi, i} \in k$, S_k – группа подстановок k -й степени, $\rho(x_{\alpha_{\pi(0)}}) = 1$. При $k = 1$ формула (8) превращается в формулу (2). Вычислим $\rho(\dots (zx_{\alpha_1}) \dots x_{\alpha_{k+1}})v$:

$$\begin{aligned} & \rho(\dots (zx_{\alpha_1}) \dots x_{\alpha_{k+1}})v \\ &= \lambda \rho(\dots (zx_{\alpha_1}) \dots x_{\alpha_k}) \rho(x_{\alpha_{k+1}})v + \mu \rho(x_{\alpha_{k+1}}) \rho(\dots (zx_{\alpha_1}) \dots x_{\alpha_k})v \\ &= \lambda \sum_{i=0}^k \sum_{\pi \in S_k} \lambda_{\pi, i} \rho(x_{\alpha_{\pi(1)}}) \dots \rho(x_{\alpha_{\pi(i)}}) \rho(z) \rho(x_{\alpha_{\pi(i+1)}}) \dots \rho(x_{\alpha_{\pi(k)}}) \rho(x_{\alpha_{k+1}})v \\ & \quad + \mu \rho(x_{\alpha_{k+1}}) \sum_{i=0}^k \sum_{\pi \in S_k} \lambda'_{\pi, i} \rho(x_{\alpha_{\pi(1)}}) \dots \rho(x_{\alpha_{\pi(i)}}) \rho(z) \rho(x_{\alpha_{\pi(i+1)}}) \dots \rho(x_{\alpha_{\pi(k)}})v \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} \sum_{\pi \in S_{k+1}} \lambda''_{\pi, i} \rho(x_{\alpha_{\pi(1)}}) \dots \rho(x_{\alpha_{\pi(i)}}) \rho(z) \rho(x_{\alpha_{\pi(i+1)}}) \dots \rho(x_{\alpha_{\pi(k)}}) \rho(x_{\alpha_{\pi(k+1)}})v. \end{aligned}$$

Применяя формулу (8) для $k = 2n - 1$, получим

$$\rho(\dots(zx_{\alpha_1})\dots x_{\alpha_{2n-1}})v = 0,$$

когда $v \in V_\gamma$, $z \in B_\beta$, $x_{\alpha_j} \in U_{\alpha_j}$, $j = 1, \dots, 2n-1$. В силу произвольности γ и v имеем $\rho(\dots(zx_{\alpha_1})\dots x_{\alpha_{2n-1}}) = 0$. Предположим, что $U \neq B$. Тогда последнее соотношение выполняется и для любого однородного элемента z такого, что $z \notin U$. Если $z' = (\dots(zx_{\alpha_1})\dots x_{\alpha_{2n-2}}) \notin U$, то получаем, что для любого однородного элемента $u \in U$ $\rho(z'u) = 0 \in \rho(U) = \{\rho(u), u \in U\}$. Если $z' \in U$, но $z'' = (\dots(zx_{\alpha_1})\dots x_{\alpha_{2n-3}}) \notin U$, то $\rho(z''u) \in \rho(U)$. Следовательно, через конечное число шагов получим элемент $\tilde{z} = (\dots(zx_{\alpha_1})\dots x_{\alpha_i}) \notin U$, но $\rho(\tilde{z}u) \in \rho(U)$. Переобозначим этот элемент через z . Проверим, что ассоциативная алгебра $A(\rho(U_1))$, где $U_1 = kz \oplus U$, нильпотентна. Действительно, любое произведение $\rho(a_1) \cdots \rho(a_s)v$, где каждое однородное a_i либо принадлежит U , либо равно z , можно представить в виде линейной комбинации произведений

$$\rho(u_{\alpha_1}) \cdots \rho(u_{\alpha_q}) \rho^t(z)v, \quad u_{\alpha_j} \in U_{\alpha_j},$$

в силу соотношения

$$\rho(z)\rho(u)v = \bar{\mu}\rho(u)\rho(z)v + \bar{\lambda}\rho(zu)v,$$

$\bar{\lambda}, \bar{\mu} \in k$, v, z – однородные элементы из V и B . Последнее соотношение получается из (2) делением на λ .

В силу выбора z оператор $\rho(zu)$ равен $\rho(\tilde{u})$ для некоторого однородного элемента $\tilde{u} \in U$. Поэтому, если $s \geq nt$, где n – степень нильпотентности алгебры $A(\rho(U))$, t – показатель нильпотентности оператора $\rho(z)$, то либо $t \geq m$, либо $q \geq n$. Доказательство этого факта дословно повторяет рассуждения из [7; с. 24]. То есть $\rho(a_1) \cdots \rho(a_s) = 0$, когда $a_i \in U_1$. Получаем противоречие с максимальностью размерности пространства U . Значит, $U = B$, т.е. $A(\rho(B))$ нильпотентна.

Заметим, что в [3] аналогичное утверждение доказано при условии, что $M = G$, $S = T$, и G – коммутативная группа.

Из доказанной теоремы легко получается утверждение, дословно повторяющее классическую форму теоремы Энгеля.

ТЕОРЕМА 2. Пусть ρ – представление лиевского типа конечномерной G -градуированной алгебры $B = \bigotimes_{\alpha \in T \subset G} B_\alpha$ в конечномерном векторном пространстве $V = \bigotimes_{\gamma \in S \subset M} V_\gamma$. Если для любого элемента $x \in B_\alpha$ оператор $\rho(x)$ нильпотентен, то существует базис в V , в котором все операторы $\rho(x)$, $x \in B$, одновременно приводятся к верхнему строго треугольному виду.

Пусть теперь B – алгебра лиевского типа. Возьмем в качестве B -модуля лиевского типа саму алгебру B , а в качестве представления ρ_L – линейное отображение, ставящее каждому $x \in B$ оператор левого умножения L_x . Тогда из теоремы 1 вытекает нильпотентность ассоциативной алгебры $A(\rho_L(B))$, где $\rho_L(B) = \{L_x, x \in B\}$. Отсюда следует левая нильпотентность алгебры B . Но легко проверить, используя формулу (3) и индукцию по количеству множителей, что любое произведение однородных элементов, имеющее n множителей, является линейной комбинацией с коэффициентами из поля k левонормированных мономов вида

$$(a_1(a_2(\dots(a_{n-1}a_n)\dots))),$$

где все a_i также однородны. Эти замечания позволяют сформулировать еще одно следствие из теоремы 1.

ТЕОРЕМА 3. *Конечномерная алгебра лиевского типа $B = \bigotimes_{\alpha \in T \subset G} B_\alpha$ нильпотентна тогда и только тогда, когда для любого $x \in B_\alpha$ оператор L_x нильпотентен.*

Мы называем алгебру B нильпотентной, если существует такое натуральное число n , что произведение любых n элементов из B при любой расстановке скобок равно нулю.

Если усилить условие теоремы, потребовав нильпотентность операторов L_x для любого элемента x из B , то получим утверждение, аналогичное соответствующему результату из теории алгебр Ли.

ТЕОРЕМА 4. *Конечномерная алгебра B лиевского типа нильпотентна тогда и только тогда, когда для любого элемента $x \in B$ оператор L_x нильпотентен.*

Последние два результата также приведены в [3] при условии, что G – коммутативная группа.

2. Алгебры ассоциативного типа. Перейдем к изучению полупростых алгебр ассоциативного типа. Как и в случае ассоциативных алгебр, алгебру A будем называть *полупростой*, если в ней отсутствуют нетривиальные, двусторонние, нильпотентные идеалы.

Во-первых, заметим, что, если A – алгебра ассоциативного типа, то соотношение (3), записанное для трех одинаковых однородных элементов, примет вид $(aa)a = \lambda a(aa)$. Отсюда по индукции легко получить, что любое произведение из n одинаковых однородных элементов, обозначаемое далее $a^{[n]}$, только ненулевым множителем из k отличается от правонормированного произведения: $((\dots(aa)a)\dots a)$. Поэтому если какое-либо произведение $a^{[n]}$ равно нулю, то произведение $a^{[n]_1}$ с другой расстановкой скобок также ноль.

Имея это в виду, будем называть однородный элемент *нильпотентным*, если $a^{[n]} = 0$ при некоторой расстановке скобок.

Следуя [8], введем понятие собственно нильпотентного элемента. Будем говорить, что однородный элемент a является *собственно нильпотентным*, если ab и ba нильпотентные элементы для любого однородного элемента b .

Условие собственной нильпотентности элемента можно описать в терминах некоторой формы.

Пусть $k[x]$ – кольцо многочленов одной переменной. Обозначим через $A[x] = k[x] \otimes_k A$, $V[x] = k[x] \otimes_k V$, где $V = \bigotimes_{\gamma \in S \subset M} V_\gamma$ – модуль ассоциативного типа, $A = \bigotimes_{\alpha \in T \subset G} A_\alpha$. Продолжим линейное отображение $\rho: A \rightarrow \text{End}_k(V)$, определяющее структуру A -модуля ассоциативного типа, до линейного отображения $\rho_x: A[x] \rightarrow \text{End}_{k[x]}(V[x])$ по правилу $\rho_x(f \otimes a) = f \otimes \rho(a)$, $f \in k[x]$, $a \in A$. Обозначим через δf старший коэффициент многочлена $f(x) \in k[x]$. Определим отображение $(\cdot, \cdot)$ на $A[x] \times A[x]$ со значениями в k по следующей формуле:

$$(a, b) = \delta \text{tr}(X \rho_x(a) \rho_x(b)), \quad a, b \in A[x],$$

где

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_s \end{pmatrix}, \quad X_i = x^i E_i, \quad E_i = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix},$$

$n_i = \dim V_{\gamma_i}$ – размер E_i , s – количество элементов в S .

Если $a, b \in A$, то $(a, b) = \delta \operatorname{tr}(X\rho(a)\rho(b))$, где мы отождествляем $\rho_x(1 \otimes a)$ и $\rho(a)$. Любую матрицу $\rho(a)$, $a \in A$, можно представить в виде $[\rho_{ij}(a)]$, $i, j = 1, \dots, s$, где $\rho_{ij}(a) \in \operatorname{End}_k(V_{\gamma_j}, V_{\gamma_i})$. Если выбрать в V базис, согласованный с градуировкой этого пространства, то соотношение (2) можно переписать в виде

$$\rho(ab) = \Lambda \rho(a) \rho(b), \quad \rho(a), \rho(b), \rho(ab), \Lambda \in \operatorname{End}_k(V),$$

где a, b – однородные элементы из A , $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$, причем

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_s \end{pmatrix}, \quad \Lambda_i = \lambda_i E_i, \quad E_i = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix},$$

$n_i = \dim V_{\gamma_i}$ – размер E_i . (Здесь константы $\lambda_i = \lambda_i(\alpha, \beta)$ зависят и от элементов $\alpha, \beta \in G$.)

Если A – G -градуированная алгебра, ρ – регулярное представление, G – группа, то для однородного элемента a в матрице $\rho(a)$ имеется не более одного элемента $\rho_{ij}(a)$, отличного от нуля для каждого i .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $A = \bigotimes_{\alpha \in T \subset G} A_\alpha$ – алгебра ассоциативного типа над полем нулевой характеристики, G – группа, то однородный элемент a собственно нильпотентен тогда и только тогда, когда $(a, b) = (b, a) = 0$ для любого однородного элемента $b \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a – однородный, собственно нильпотентный элемент. Если $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$ и $\alpha \cdot \beta \neq 1$, то матрица $\rho(a)\rho(b)$ (здесь ρ – регулярное представление) в качестве диагональных блоков имеет нулевые, и поэтому $(a, b) = \delta \operatorname{tr}(X\rho(a)\rho(b)) = 0$. Следовательно, достаточно рассмотреть случай, когда $\alpha \cdot \beta = 1$ и

$$\rho(a)\rho(b) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho_{ss} \end{pmatrix}$$

– блочно-диагональная матрица. Если $(ab)^{[n]} = 0$, то $(\rho(a)\rho(b))^n = 0$, так как $\rho((ab)^{[n]}) = \tilde{P}(\rho(a)\rho(b))^n$, где $\tilde{P}$ – диагональная матрица с ненулевыми элементами на диагонали. Действительно, для любого однородного элемента c имеет место соотношение

$$\rho(c)P = P'\rho(c), \quad \text{где } P = \begin{pmatrix} P_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_s \end{pmatrix}, \quad P_i = p_i E_i,$$

E_i – единичный оператор, действующий на A_i , а P' – матрица, получающаяся из P перестановкой констант p_i в диагональных блоках, т.е.

$$P' = \begin{pmatrix} P'_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P'_s \end{pmatrix},$$

$P'_i = p_{\pi(i)} E_i$, где π – некоторая перестановка индексов $\{1, 2, \dots, s\}$.

Из аналогичных соображений имеем

$$(X\rho(a)\rho(b))^n = \tilde{X}(\rho(a)\rho(b))^n, \quad \text{где} \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{X}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{X}_s \end{pmatrix}, \quad \tilde{X}_i = x^{t_i} E_i$$

для некоторых натуральных значений t_i . Следовательно, матрица

$$X\rho(a)\rho(b) = \begin{pmatrix} X_1\rho_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_s\rho_{ss} \end{pmatrix}$$

нильпотентна. Но тогда нильпотентна каждая матрица $X_i\rho_{ii}$. Поэтому $\text{tr } \rho_{ii} = 0$, $i = 1, \dots, s$, а значит, $(a, b) = \delta \text{tr}(X\rho(a)\rho(b)) = \delta \sum_{i=1}^s x^i \text{tr } \rho_{ii} = 0$.

Пусть $(a, b) = 0$ для любого однородного элемента b и некоторого элемента a . Так как $(a, b) = \delta \text{tr}(X\rho(a)\rho(b))$, то $\text{tr } \rho(a)\rho(b) = 0$. Заменим элемент b на $b_1 = b(ab)$. По условию $(a, b_1) = 0$, но $(a, b_1) = \delta \text{tr}(X\rho(a)\rho(b(ab))) = \delta \text{tr}(X\rho(a)P\rho(b)\rho(ab)) = \delta \text{tr}(X\rho(a)P'\rho(b)\rho(a)\rho(b)) = \delta \text{tr}(XP''(\rho(a)\rho(b))^2)$, где P, P', P'' – блочно-диагональные матрицы с ненулевыми коэффициентами на диагонали, причем коэффициент в каждом блоке постоянен. Следовательно, $\text{tr}(\rho(a)\rho(b))^2 = 0$. Повторяя эту процедуру, получим, что $\text{tr}(\rho(a)\rho(b))^n = 0$ для любого натурального n . Так как основное поле k имеет нулевую характеристику, то $\rho(a)\rho(b)$ – нильпотентный оператор, т.е. $(\rho(a)\rho(b))^m = 0$ для некоторого натурального m . Опять используя соотношение $\rho((ab)^{[m]}) = \tilde{P}(\rho(a)\rho(b))^m$, имеем $\rho((ab)^{[m]}) = 0$. Применяя последнее соотношение к элементу ab , получим $(ab)^{[m+1]} = 0$.

Все приведенные рассуждения можно повторить и для элемента ba , что доказывает собственную нильпотентность a .

Пусть I – однородный двусторонний идеал в алгебре A . Обозначим $I_L^\perp = \{a \in A, (a, b) = 0, b \in I\}$, $I_R^\perp = \{a \in A, (b, a) = 0, b \in I\}$. Если $I = A$, то $I_L^\perp$ будем называть *левым ядром* отображения $(\cdot, \cdot)$ и обозначать $\text{Ker}_L(\cdot, \cdot)$, а $I_R^\perp$ – *правым ядром* и обозначать $\text{Ker}_R(\cdot, \cdot)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. $I_L^\perp = I_R^\perp$ и является однородным двусторонним идеалом в A . В частности, $\text{Ker}_L(\cdot, \cdot) = \text{Ker}_R(\cdot, \cdot)$, и данное множество, обозначаемое $\text{Ker}(\cdot, \cdot)$, будем называть *ядром* отображения $(\cdot, \cdot)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, отметим, что $I_L^\perp$ (соответственно $I_R^\perp$) является подпространством в A . Действительно, если $(a, b) = 0$ и $(a', b) = 0$, то $\text{tr}(X\rho(a)\rho(b)) = 0$ и $\text{tr}(X\rho(a')\rho(b)) = 0$. Из линейности функции следа и линейности

ρ получим $\text{tr}(X\rho(\alpha a + \alpha' a')\rho(b)) = 0$, $\alpha, \alpha' \in k$. Следовательно, $(\alpha a + \alpha' a', b) = 0$. Если последнее соотношение выполняется для любого $b \in I$, то $\alpha a + \alpha' a' \in I_L^\perp$, когда $\alpha, \alpha' \in k$, $a, a' \in I_L^\perp$.

Кроме того, $I_L^\perp$ и $I_R^\perp$ – однородные пространства. В силу однородности идеала I условие ортогональности достаточно проверять, когда $b = b_\beta \in I \cap A_\beta$. Пусть $(a, b_\beta) = 0$ и $a = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha$. Так как $\text{tr}(X\rho(a_\alpha)\rho(b_\beta)) = 0$, когда $\alpha \cdot \beta \neq 1$, то и $\text{tr}(X\rho(a - \sum_{\alpha \neq \beta^{-1}} a_\alpha)\rho(b_\beta)) = 0$. Следовательно, $(a_{\beta^{-1}}, b_\beta) = 0$, т.е. все компоненты элемента a ортогональны к b_β и, значит, принадлежат $I_L^\perp$.

Пусть $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$ и $(a, b) = 0$. Если $\alpha \cdot \beta \neq 1$, то $\beta \cdot \alpha \neq 1$ и поэтому $(b, a) = 0$. В случае, когда $\alpha \cdot \beta = 1$, рассмотрим подробное выражение для $\text{tr}(X\rho(a)\rho(b))$ и $\text{tr}(X\rho(b)\rho(a))$.

Так как $(a, b) = 0$, то $\text{tr}(X\rho(a)\rho(b)) = 0$, т.е.

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s x^i \text{tr}(\rho_{ij}(a)\rho_{ji}(b)) = 0,$$

где s – количество компонент градуировки в алгебре A . Если $\rho_{ji}(b) \neq 0$ для некоторого i , то номер j определяется однозначно, так как в каждом i -м блочном столбце может быть только один ненулевой блок. Поэтому коэффициент при x^i в рассмотренной выше сумме равен $\text{tr}(\rho_{ij}(a)\rho_{ji}(b))$. Значит, и в случае, когда $\rho_{ji}(b) \neq 0$, тем не менее, $\text{tr}(\rho_{ij}(a)\rho_{ji}(b)) = 0$.

Рассмотрим

$$S = \sum_{k=1}^s \sum_{t=1}^s x^k \text{tr}(\rho_{kt}(b)\rho_{tk}(a)).$$

Если $\rho_{kt}(b) \neq 0$ для некоторого k , то $\text{tr}(\rho_{tk}(a)\rho_{kt}(b)) = 0$. Но $\text{tr}(\rho_{tk}(a)\rho_{kt}(b)) = \text{tr}(\rho_{kt}(b)\rho_{tk}(a))$; следовательно, $S = 0$. Тем более $(b, a) = \delta S = 0$.

Итак, $I_L^\perp = I_R^\perp$, и это множество будем обозначать $I^\perp$. В частности, $\text{Ker}_L(\cdot, \cdot) = \text{Ker}_R(\cdot, \cdot) = \text{Ker}(\cdot, \cdot)$.

Для проверки того, что $I^\perp$ – однородный двусторонний идеал, убедимся, что если $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$, $c \in A_\gamma$, то $(ab, c) = 0 \Leftrightarrow (a, bc) = 0$.

Если $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \neq 1$, то условие очевидно, так как диагональные блоки в произведениях $\rho(ab)\rho(c)$ и $\rho(a)\rho(bc)$ нулевые. Пусть $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$. Тогда

$$(ab, c) = \delta \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s x^i \text{tr}(\rho_{ij}(ab)\rho_{ji}(c)) = \delta \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \lambda_i x^i \text{tr}(\rho_{ik}(a)\rho_{kj}(b)\rho_{ji}(c)).$$

Соответственно

$$(a, bc) = \delta \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^s x^i \text{tr}(\rho_{ik}(a)\rho_{ki}(bc)) = \delta \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s \lambda'_i x^i \text{tr}(\rho_{ik}(a)\rho_{kj}(b)\rho_{ji}(c)).$$

Если $(ab, c) = 0$, то

$$\sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s \text{tr}(\rho_{ik}(a)\rho_{kj}(b)\rho_{ji}(c)) = 0$$

для любого $i = 1, \dots, s$, так как все $\lambda_i \neq 0$ ненулевые. Но тогда из выражения для (a, bc) имеем, что $(a, bc) = 0$. Это доказывает сформулированное выше условие “частичной” инвариантности.

В силу соотношения $(ab)c = \lambda a(bc)$ для однородных элементов a, b, c алгебры A легко по индукции проверить, что если I – однородный двусторонний идеал в A , то любая его степень I^k – также однородный двусторонний идеал. Отсюда вытекает, что сумма двух однородных нильпотентных идеалов также является однородным нильпотентным идеалом. Поэтому для конечномерной алгебры A существует наибольший однородный нильпотентный идеал, который будем обозначать $R_{qr(A)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Имеет место равенство $R_{qr(A)} = \text{Ker}(\cdot, \cdot)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I – однородный нильпотентный идеал в A . Тогда для любого однородного элемента x из I элемент $xa \in I$; следовательно, x собственно нильпотентен, когда a однороден. Поэтому $I \subset \text{Ker}(\cdot, \cdot)$. В частности, $R_{qr(A)} \subset \text{Ker}(\cdot, \cdot)$.

Обратно, пусть $y \in \text{Ker}(\cdot, \cdot)$. Ввиду предложения 2 элемент y собственно нильпотентен. В частности, y^2 нильпотентен. Но тогда нильпотентен и элемент y . В силу соотношения $y^{[n]}a = \lambda(y(y \dots (ya) \dots)) = \lambda L_y^n a$, $\lambda \neq 0$, получаем, что нильпотентен каждый оператор левого умножения L_y для однородных y . Тогда по теореме 3 идеал $\text{Ker}(\cdot, \cdot)$ нильпотентен, а потому $\text{Ker}(\cdot, \cdot) \subset R_{qr(A)}$. Два полученных включения доказывают сформулированное выше равенство.

Если G – вполне упорядоченная группа, то для любого двустороннего идеала I в G -градуированной алгебре $A = \bigoplus_{i=1}^s A_{\alpha_i}$, $\{\alpha_i, i = 1, \dots, s\} \subset G$, существует однородный двусторонний идеал I_{gr} , причем $\dim_k I_{\text{gr}} = \dim_k I$.

Действительно, пусть элементы $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ группы G упорядочены в соответствии с их номерами: $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_s$. Обозначим $A_{\alpha(i)} = \bigotimes_{j \geq i} A_{\alpha_j}$. Любой идеал I алгебры A является объединением подпространств $I_{\alpha(m)} = I \cap A_{\alpha(m)}$, $m = 1, \dots, s$, причем $I_{\alpha(m)} I_{\alpha(r)} \subseteq I_{\alpha(k)}$, где $\alpha_k = \alpha_m \alpha_r$. Если $x \in I_{\alpha(m)}$, но $x \notin I_{\alpha(m+1)}$, то элемент x можно представить в виде $x = x' + x''$, $x' \in A_{\alpha_m}$, $x'' \in A_{\alpha(m+1)}$, $x' \neq 0$. Назовем x' младшим членом элемента x . Обозначим через $I^{(m)}$ подпространство младших членов из $I_{\alpha(m)}$. Тогда $I_{\text{gr}} = \bigoplus_{m=1}^s I^{(m)}$ – однородный двусторонний идеал алгебры A , причем $\dim_k I_{\text{gr}} = \dim_k I$.

Как известно, полупростота конечномерной ассоциативной алгебры равносильна невырожденности билинейной формы, индуцированной формой следа, а соответственно полупростота конечномерной алгебры Ли над полем характеристики 0 равносильна невырожденности формы Киллинга. Для алгебр ассоциативного типа можно доказать аналогичный результат.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть A – конечномерная G -градуированная алгебра ассоциативного типа над полем k нулевой характеристики, причем G – вполне упорядоченная группа. Тогда A полупроста, если и только если форма $(\cdot, \cdot)$ невырождена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – полупростая алгебра; тогда в силу отсутствия в ней нильпотентных двусторонних идеалов однородный радикал $R_{qr(A)}$ равен нулю. Из предложения 4 сразу же имеем, что $\text{Ker}(\cdot, \cdot) = 0$.

Обратно если форма $(\cdot, \cdot)$ невырождена, т.е. $\text{Ker}(\cdot, \cdot) = 0$, то $R_{qr(A)} = 0$. Но в силу приведенного выше построения в алгебре A тогда отсутствуют любые нильпотентные двусторонние идеалы, т.е. A полупроста.

Введем отображение φ из $A \times A$ в k по правилу $\varphi(a, b) = \sum_{\alpha, \beta \in T} (a_\alpha, b_\beta)$, где $a = \sum_{\alpha \in T} a_\alpha$, $b = \sum_{\beta \in T} b_\beta$. Так как $\varphi(a, b) = (a, b)$, когда a и b – однородные элементы, то предложение 2 о собственной нильпотентности однородного элемента можно переформулировать в терминах отображения φ .

Для любого подмножества I из A рассмотрим его левое ортогональное дополнение $I_{L, \varphi}^\perp = \{a \in A, \varphi(a, b) = 0, b \in I\}$. Если I – однородное пространство, $I_{L, \varphi}^\perp = \{a \in A, \varphi(a, b_\beta) = 0, b_\beta \in I_\beta = I \cap A_\beta, \beta \in T\}$. Так как $\text{tr}(X\rho(a_\alpha)\rho(b_\beta)) = 0$, когда $\alpha\beta \neq 1$ (см. доказательство предложения 2, то $I_{L, \varphi}^\perp = \langle a_\alpha \in A_\alpha, \alpha \in T, \varphi(a_\alpha, b_\beta) = 0, b_\beta \in I_\beta, \beta \in T \rangle$. В силу равенства $\varphi(a_\alpha, b_\beta) = (a_\alpha, b_\beta)$, $a_\alpha \in A_\alpha$, $b_\beta \in A_\beta$, немедленно получаем, что $I_{L, \varphi}^\perp$ – однородное подпространство в A . Кроме того, $\varphi(a_\alpha, b_\beta) = 0 \Leftrightarrow \varphi(b_\beta, a_\alpha) = 0$, $a_\alpha \in A_\alpha$, $b_\beta \in A_\beta$. Поэтому $I_{L, \varphi}^\perp = I_{R, \varphi}^\perp = \{a \in A, \varphi(b, a) = 0, b \in I\}$. Обозначим последнее подпространство через $I_\varphi^\perp$. Из условия $\varphi(a_\alpha b_\beta, c_\gamma) = 0 \Leftrightarrow \varphi(a_\alpha, b_\beta c_\gamma) = 0$, $a_\alpha \in A_\alpha$, $b_\beta \in A_\beta$, $c_\gamma \in A_\gamma$, как и в доказательстве предложения 3, получаем, что $I_\varphi^\perp$ – однородный двусторонний идеал в A , если I – однородный двусторонний идеал в A . В частности, таковым будет $\text{Ker } \varphi = A_\varphi^\perp$.

Так как в доказательстве предложения 4 используются только однородные элементы, то, дословно повторяя его, имеем $R_{qT} = \text{Ker } \varphi$.

Поэтому теорему 5 можно переформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 6. Пусть A – конечномерная G -градуированная алгебра ассоциативного типа над полем k нулевой характеристики, причем G – вполне упорядоченная группа. Тогда A полупроста, если и только если форма φ невырождена.

Заметим, что если все компоненты градуировки A_α , $\alpha \in T$, одномерны, то φ – билинейная форма. Используя этот факт, докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $A = \bigotimes_{\alpha \in T} A_\alpha$ – конечномерная полупростая G -градуированная алгебра ассоциативного типа над полем нулевой характеристики, причем G – вполне упорядоченная группа и $\dim A_\alpha = 1$, $\alpha \in T \subset G$. Тогда $A = \bigoplus_{k=1}^s I_k$, где каждое I_k – двусторонний идеал, являющийся простой алгеброй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I – однородный двусторонний идеал в A . Тогда $I_\varphi^\perp$ – также однородный двусторонний идеал. Обозначим $J = I \cap I_\varphi^\perp$. Если $a \in J \cap A_\alpha$, $b \in J \cap A_\beta$, $c \in A_\gamma$, то $\varphi(ab, c) = 0$, т.е. $J^2 = 0$. Из условия полупростоты алгебры A следует, что $J = 0$. Итак, $I^\perp \cap I = 0$.

Так как билинейная форма φ невырождена, то $\dim I + \dim I_\varphi^\perp = \dim A$. Следовательно, $A = I \oplus I_\varphi^\perp$.

Пусть I – минимальный однородный двусторонний идеал; тогда I – простая алгебра. Действительно, если J – нетривиальный идеал в I , то, как было показано выше, в I существует и нетривиальный однородный идеал J_{gr} . Последний является идеалом всей алгебры, поскольку $I_\varphi^\perp \cdot I_{\text{gr}} \subset I_\varphi^\perp \cap I = 0$ (соответственно, $J_{\text{gr}} \cdot I_\varphi^\perp \subset I \cap I_\varphi^\perp = 0$).

В силу того же соображения $I_\varphi^\perp$ – полупростая алгебра и к ней можно применить предыдущее построение. Конечномерность алгебры A позволяет через конечное число шагов получить утверждение теоремы.

В заключение заметим, что если G – конечная группа, то алгебра ассоциативного типа $k[G]$, рассмотренная в примерах в начале работы, является простой алгеброй,

если все константы $\lambda_{1,\beta}$ различны, когда $\beta \neq \beta'$, $\beta, \beta' \in G$, 1 – единица группы G . Действительно, если I – ненулевой идеал в $k[G]$, а $x = \sum_{\alpha \in G} x_\alpha \neq 0$, $x \in I$, то из условий принадлежности элементов $L_{e_1}^n x$ идеалу I (для любого натурального n) легко получить, что все компоненты x_α принадлежат I . Используя разрешимость уравнения $az = b$ в группе G , получим $I = k[G]$.

Алгебра ассоциативного типа $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{W}_n$ также проста, поскольку проста алгебра Ли $F_p \otimes_{\mathbb{Z}} \widetilde{W}_n^L \cong W_n$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Y. Bahturin, M. Zaicev, “Identities of graded algebras”, *J. Algebra*, **205**:1 (1998), 1–12.
- [2] Ю. А. Бахтурин, М. В. Зайцев, С. К. Сегал, “ G -тождества неассоциативных алгебр”, *Матем. сб.*, **190**:11 (1999), 3–14.
- [3] Н. А. Корешков, “О нильпотентности энгелевых алгебр лиевского типа”, *Изв. вузов. Матем.*, 2004, № 3, 36–40.
- [4] К. А. Жевлаков, “Ниль-радикал алгебры Мальцева”, *Алгебра и логика*, **4**:5 (1965), 67–78.
- [5] В. Т. Филиппов, “Об энгелевых алгебрах Мальцева”, *Алгебра и логика*, **15**:1 (1976), 89–109.
- [6] Е. Н. Кузьмин, “Об антикоммутативных алгебрах, удовлетворяющих условию Энглея”, *Сиб. матем. журн.*, **8**:5 (1967), 1026–1034.
- [7] И. Капланский, *Алгебры Ли и локальные компактные группы*, Мир, М., 1974.
- [8] Н. Г. Чеботарев, *Введение в теорию алгебр*, Гостехиздат, М.–Л., 1949.

Н. А. Корешков

Казанский государственный университет

E-mail: Nikolai.Koreshkov@ksu.ru

Поступило

15.03.2004

Исправленный вариант

11.01.2007