Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Васильева, Критерий существования гладкой функции при ограничениях, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 3, 335–346

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3848>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 18:30:52

Критерий существования гладкой функции при ограничениях

А. А. Васильева

В работе изучаются условия существования функции, удовлетворяющей ограничениям на ее значение в каждой точке и на ее производную.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. В этой работе рассматривается задача о существовании функции f , удовлетворяющей неравенствам $f_1(t) \leq f(t) \leq f_2(t)$ для любого t и ограничениям на производную. Множества таких функций встречаются в задачах управления при наличии фазовых ограничений.

Пусть (X, d) – метрическое пространство, $A, B \subset X$. Положим

$$\text{dist}(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y).$$

В [1] Линденштрауссом был получен следующий результат. Пусть (M, ρ) – метрическое пространство, $f_1, f_2: M \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1 \leq f_2$. Тогда для того, чтобы существовала функция $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию Липшица с константой l и такая, что $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ для любого $x \in M$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $\text{dist}([f_1(x), f_2(x)], [f_1(y), f_2(y)]) \leq l\rho(x, y)$ для любых $x, y \in M$. Если $M = [a, b]$, то последнее условие переписывается в виде

$$f_2(t_1) \geq f_1(t_2) - l(t_2 - t_1), \quad f_2(t_2) \geq f_1(t_1) - l(t_2 - t_1)$$

для любых $t_1 \leq t_2$. В [2] формулировка теоремы Линденштраусса приводится для случая, когда ρ является полуметрикой.

Пусть $f_1, f_2: T \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1 \leq f_2$. *Интервалом* $\llbracket f_1, f_2 \rrbracket$ называется множество

$$\{f: T \rightarrow \mathbb{R} : f_1(t) \leq f(t) \leq f_2(t), t \in T\}.$$

Пусть X – некоторое пространство функций $f: T \rightarrow \mathbb{R}$. *Интервалом* $\llbracket f_1, f_2 \rrbracket_X$ называется множество $\llbracket f_1, f_2 \rrbracket \cap X$. Интервалы в $C(T)$ изучались в [3]–[5], а в [6] рассматривались некоторые их обобщения в векторнозначных функциональных пространствах. В [6] было доказано, что если T – хаусдорфов компакт, $f_1, f_2: T \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1 \leq f_2$, то существуют функции $\tilde{f}_1$ и $\tilde{f}_2$ такие, что $\tilde{f}_1 \leq \tilde{f}_2$, $\tilde{f}_1$ полунепрерывна сверху, $\tilde{f}_2$ полунепрерывна снизу и $\llbracket f_1, f_2 \rrbracket_{C(T)} = \llbracket \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \rrbracket_{C(T)}$ (это следует из утверждения 1). Поэтому если $X \subset C(T)$, то можно считать, что f_1 полунепрерывна сверху, а f_2 полунепрерывна снизу.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00160-а).

В теореме 1 дается критерий существования локально липшицевой функции на области в $\mathbb{R}^n$, принадлежащей заданному интервалу и имеющей ограничение на модуль градиента при почти всех x . В одномерном случае при некоторых дополнительных ограничениях на функции f_1 и f_2 приводится критерий существования функции из $[[f_1, f_2]]_{C^1[a,b]}$ такой, что ее производная принадлежит $[[\varphi_1, \varphi_2]]_{C[a,b]}$ (теорема 2). Отсюда выводится достаточное условие того, чтобы множество таких функций было множеством существования в $C^1[a, b]$ с полунормой $\|f\|_{C^1[a,b]} = \max\{\|f'\|_{C[a,b]}, \alpha\|f\|_{C[a,b]}\}$ (теорема 3).

2. Критерий существования функции из интервала с заданным ограничением на модуль градиента. Этот критерий легко выводится из приведенной выше теоремы Линденштраусса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область, $\varphi \in C(\Omega, \mathbb{R}_+)$. Обозначим через $W_{\infty, \varphi}^1(\Omega)$ множество локально липшицевых функций f , удовлетворяющих условию $\|\nabla f(x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \varphi(x)$ в точках дифференцируемости.

По теореме Радемахера (см., например, [7]), если функция $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ локально липшицева, то она дифференцируема по Фреше при почти всех $x \in \Omega$, поэтому ограничение на модуль градиента выполнено почти всюду.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ и $f(x) \leq g(x)$ для любого $x \in \Omega$. Тогда для того, чтобы существовала функция $h \in [[f, g]] \cap W_{\infty, \varphi}^1(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы для любых $x_1, x_2 \in \Omega$ существовали точки $y_1 \in [f(x_1), g(x_1)]$ и $y_2 \in [f(x_2), g(x_2)]$ такие, что

$$|y_1 - y_2| \leq \inf_{\gamma \in \Gamma_{x_1, x_2}} \int_{\gamma} \varphi ds, \quad (1)$$

где Γ_{x_1, x_2} – множество всех ломаных в Ω , соединяющих точки x_1 и x_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим на Ω полуметрику

$$\rho_{\varphi}(x_1, x_2) = \inf_{\gamma \in \Gamma_{x_1, x_2}} \int_{\gamma} \varphi ds.$$

По теореме Линденштраусса, для того, чтобы существовала функция $h \in [[f, g]]$, удовлетворяющая условию Липшица с константой 1 в полуметрике ρ_{φ} , необходимо и достаточно, чтобы для любых $x_1, x_2 \in \Omega$ выполнялось неравенство

$$\text{dist}([f(x_1), g(x_1)], [f(x_2), g(x_2)]) \leq \rho_{\varphi}(x_1, x_2),$$

т.е. существовали $y_1 \in [f(x_1), g(x_1)]$ и $y_2 \in [f(x_2), g(x_2)]$, удовлетворяющие (1).

Обозначим через $\text{Lip}_{\varphi}(\Omega)$ множество функций, липшицевых с константой 1 в метрике ρ_{φ} , через $O_{\delta}(x)$ – δ -окрестность точки x . Докажем, что следующие условия эквивалентны:

- 1) $h \in \text{Lip}_{\varphi}(\Omega)$;
- 2) для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in \Omega$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $\xi, \eta \in O_{\delta}(x)$ выполнено неравенство $|h(\xi) - h(\eta)| \leq (\varphi(x) + \varepsilon)\|\xi - \eta\|$;
- 3) $h \in W_{\infty, \varphi}^1(\Omega)$.

Пусть $h \in \text{Lip}_{\varphi}(\Omega)$. Возьмем произвольные $x \in \Omega$ и $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta > 0$ такое, что $O_{\delta}(x) \subset \Omega$ и $\varphi(y) \leq \varphi(x) + \varepsilon$ для любого $y \in O_{\delta}(x)$. Тогда для любых $\xi, \eta \in O_{\delta}(x)$ выполнено

$$|h(\xi) - h(\eta)| \leq \int_{[\xi, \eta]} \varphi ds \leq \max_{y \in [\xi, \eta]} \varphi(y)\|\xi - \eta\| \leq (\varphi(x) + \varepsilon)\|\xi - \eta\|,$$

так что из 1) следует 2).

Докажем, что из 2) следует 3). Если выполнено 2), то функция h локально липшицева. Кроме того, для любых $x \in \Omega$, $e \in \mathbb{R}^n$, $\|e\| = 1$, и $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|h(x + te) - h(x)| \leq (\varphi(x) + \varepsilon)t\|e\| = (\varphi(x) + \varepsilon)t$$

для любого $t \in (0, \delta)$. Пусть h дифференцируема в точке x . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\|\nabla h(x)\|_{\mathbb{R}^n} = \sup_{e: \|e\|=1} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{|h(x + te) - h(x)|}{t} \leq \varphi(x) + \varepsilon.$$

Поэтому $\|\nabla h(x)\| \leq \varphi(x)$ в силу произвольности ε .

Докажем, что из 3) следует 1). Сначала докажем, что если $[\xi, \eta] \subset \Omega$, то

$$|h(\xi) - h(\eta)| \leq \int_{[\xi, \eta]} \varphi ds.$$

Функция h дифференцируема по Фреше почти всюду в Ω . Из теоремы Фубини следует, что для любого $\delta > 0$ существуют $u \in O_\delta(\xi)$ и $v \in O_\delta(\eta)$ такие, что $\|u - v\| = \|\xi - \eta\|$, функция h дифференцируема почти всюду на отрезке $[u, v]$. Положим $\psi(t) = h(u(1 - t) + vt)$, $t \in [0, 1]$. Тогда ψ дифференцируема почти всюду на $[0, 1]$ и $\psi'(t) = \nabla h(u(1 - t) + vt)(v - u)$. Значит, $|\psi'(t)| \leq \varphi(u(1 - t) + vt)\|u - v\|$ и поэтому ψ липшицева. Следовательно,

$$\begin{aligned} |h(\xi) - h(\eta)| &\leq |h(v) - h(u)| + |h(\xi) - h(u)| + |h(\eta) - h(v)| \\ &= |\psi(1) - \psi(0)| + |h(\xi) - h(u)| + |h(\eta) - h(v)| \\ &= |h(\xi) - h(u)| + |h(\eta) - h(v)| + \left| \int_0^1 \psi'(t) dt \right| \\ &\leq \|u - v\| \int_0^1 \varphi(u(1 - t) + vt) dt + |h(\xi) - h(u)| + |h(\eta) - h(v)| \\ &\leq \|\xi - \eta\| \int_0^1 \varphi(\xi(1 - t) + \eta t) dt \\ &\quad + \|\xi - \eta\| \int_0^1 |\varphi(u(1 - t) + vt) - \varphi(\xi(1 - t) + \eta t)| dt \\ &\quad + |h(\xi) - h(u)| + |h(\eta) - h(v)|. \end{aligned}$$

Сумма последних трех слагаемых стремится к 0 при $\delta \rightarrow 0$, а первое слагаемое равно $\int_{[\xi, \eta]} \varphi ds$. Значит,

$$|h(\xi) - h(\eta)| \leq \int_{[\xi, \eta]} \varphi ds. \quad (2)$$

Пусть теперь x, y – произвольные точки области Ω , $\gamma \in \Gamma_{x, y}$. Тогда γ представляется в виде объединения отрезков $[\xi_{k-1}, \xi_k]$, $k = 1, \dots, m$, где $\xi_0 = x$, $\xi_m = y$. Значит,

$$|h(x) - h(y)| \leq \sum_{k=1}^m |h(\xi_k) - h(\xi_{k-1})| \stackrel{(2)}{\leq} \sum_{k=1}^m \int_{[\xi_{k-1}, \xi_k]} \varphi ds = \int_\gamma \varphi ds.$$

В силу произвольности γ имеем $|h(x) - h(y)| \leq \rho_\varphi(x, y)$.

Для одномерного случая получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – промежуток, $f_1, f_2: I \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1 \leq f_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in C(I, \mathbb{R})$ и $\varphi_1 \leq \varphi_2$. Тогда для того, чтобы существовала локально липшицева функция $h \in [f_1, f_2]$, удовлетворяющая неравенствам $\varphi_1(t) \leq h'(t) \leq \varphi_2(t)$ в точках дифференцируемости, необходимо и достаточно, чтобы для любых $t_1, t_2 \in I$ таких, что $t_1 \leq t_2$, выполнялись неравенства

$$f_2(t_2) \geq f_1(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t) dt, \quad (3)$$

$$f_1(t_2) \leq f_2(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \varphi_2(t) dt. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t_0 \in I$. Положим

$$f(t) = f_1(t) - \int_{t_0}^t \frac{\varphi_1(\tau) + \varphi_2(\tau)}{2} d\tau, \quad g(t) = f_2(t) - \int_{t_0}^t \frac{\varphi_1(\tau) + \varphi_2(\tau)}{2} d\tau,$$

$$\varphi(t) = \frac{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)}{2}.$$

Тогда существование функции h эквивалентно существованию функции $\tilde{h} \in [f, g] \cap W_{\infty, \varphi}^1(I)$, при этом

$$\tilde{h}(t) = h(t) - \int_{t_0}^t \frac{\varphi_1(\tau) + \varphi_2(\tau)}{2} d\tau.$$

Последнее эквивалентно тому, что для любых $t_1, t_2 \in I$, $t_1 \leq t_2$, выполнено

$$\text{dist}([f(t_1), g(t_1)], [f(t_2), g(t_2)]) \leq \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) dt,$$

а это эквивалентно неравенствам (3) и (4).

3. Существование C^1 -гладкой функции из заданного интервала с ограничением на производную. Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Для любого $t \in [a, b]$ обозначим

$$D_{\pm} f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow \pm 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \quad \overline{D}_{\pm}(t) f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{\Delta t \rightarrow \pm 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t},$$

$$f'_{\pm}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow t \pm 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

(если этот предел существует).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скажем, что функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию (*), если существуют $f'_-(t)$ и $f'_+(t)$ для любого $t \in (a, b)$ и для любого $t \in [a, b]$ соответственно, функции f'_- и f'_+ непрерывны соответственно слева и справа, и если $f'_-(t) \neq f'_+(t)$, то $f'_-(\tau) = f'_+(\tau)$ в некоторой проколотой окрестности точки t .

ЛЕММА 1. Пусть $f_1, f_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, для любого $t \in [a, b]$ $f_1(t) \leq f_2(t)$, f_1 полунепрерывна сверху, f_2 полунепрерывна снизу, $g_0 \in [f_1, f_2]_{C^1}$, $f \in C^1([a, b])$ и для любых $t_1 \leq t_2$ выполнено неравенство $f_1(t_1) + f(t_2) - f(t_1) \leq f_2(t_2)$. Тогда существует функция g , удовлетворяющая условию (*) и такая, что для любого $t \in [a, b]$ $f_1(t) \leq g(t) \leq f_2(t)$, $g'_+(t) \in \{f'(t), \max(f'(t), g'_0(t))\}$ и $g'_-(t) \in \{f'(t), \max(f'(t), g'_0(t))\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $f \equiv 0$ (иначе вместо f_1, f_2 и g_0 рассматриваем $f_1 - f, f_2 - f$ и $g_0 - f$). Тогда выполняется

$$\forall t_1, t_2: t_1 \leq t_2 \Rightarrow f_1(t_1) \leq f_2(t_2). \quad (5)$$

Продолжим функцию g_0 на все множество $\mathbb{R}$: для любого $t < a$ положим $g_0(t) = g_0(a) + g'_0(a)(t - a)$, для любого $t > b$ положим $g_0(t) = g_0(b) + g'_0(b)(t - b)$. Тогда $g_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Так как множество $\{t \in \mathbb{R} : g'_0(t) < 0\}$ открыто, оно представимо в виде $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$. Для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ построим функцию $g_n \in C(\mathbb{R})$ и интервал $(\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)$, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $\bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k) \subset \bigcup_{k=1}^n (\tilde{a}_k, \tilde{b}_k)$;
- 2) если $t \notin \bigcup_{k=1}^n (\tilde{a}_k, \tilde{b}_k)$, то $g_n(t) = g_0(t)$, и для любого $k = 1, \dots, n$ $g_n|_{(\tilde{a}_k, \tilde{b}_k)} \equiv \text{const}$;
- 3) для любого $t \in [a, b]$ выполняется неравенство $f_1(t) \leq g_n(t) \leq f_2(t)$.

Функция g_0 уже определена. Пусть построена функция g_n , удовлетворяющая условиям 1)–3). Построим g_{n+1} . Если $\bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \subset \bigcup_{k=1}^n (\tilde{a}_k, \tilde{b}_k)$, то положим $g_{n+1} = g_n$ и $(\tilde{a}_{n+1}, \tilde{b}_{n+1}) = (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)$. Пусть $\bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \not\subset \bigcup_{k=1}^n (\tilde{a}_k, \tilde{b}_k)$. Положим $m_{n+1} = \min\{j \in \mathbb{N} : (a_j, b_j) \not\subset \bigcup_{s=1}^n (\tilde{a}_s, \tilde{b}_s)\} \geq n + 1$. В силу свойства 2) для любого $t \in (a_{m_{n+1}}, b_{m_{n+1}})$ выполнены неравенства $g'_n(t) \leq 0, g'_{n+1}(t) \leq 0$. Следовательно, g_n убывает на отрезке $[a_{m_{n+1}}, b_{m_{n+1}}]$.

Положим $c_{n+1} = \max\{f_1(t) : t \in [a, b_{m_{n+1}}]\}$. Возможны три случая:

- а) для любого $t \in [a_{m_{n+1}}, b_{m_{n+1}}]$ $g_n(t) \geq c_{n+1}$;
- б) существует $t \in [a_{m_{n+1}}, b_{m_{n+1}}]$ такое, что $g_n(t) < c_{n+1}$, и $g_n(a_{m_{n+1}}) > c_{n+1}$;
- в) для любого $t \in [a_{m_{n+1}}, b_{m_{n+1}}]$ $g_n(t) \leq c_{n+1}$.

Рассмотрим случай а). Положим $\tilde{b}_{n+1} = b_{m_{n+1}}$. Если $g_n(t) > g_n(b_{m_{n+1}})$ для всех $t \in (-\infty, a_{m_{n+1}}]$, то $\tilde{a}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$; если существует $t \leq a_{m_{n+1}}$ такое, что $g_n(t) = g_n(b_{m_{n+1}})$, то $\tilde{a}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \max\{t \leq a_{m_{n+1}} : g_n(t) = g_n(b_{m_{n+1}})\}$. Положим

$$g_{n+1}(t) = \begin{cases} g_n(t), & t \notin [\tilde{a}_{n+1}, \tilde{b}_{n+1}], \\ g_n(\tilde{b}_{n+1}), & t \in [\tilde{a}_{n+1}, \tilde{b}_{n+1}]. \end{cases}$$

Тогда для любого $t \in (\tilde{a}_{n+1}, \tilde{b}_{n+1})$ выполнены неравенства $g_{n+1}(t) \leq g_n(t) \leq f_2(t)$ и $f_1(t) \leq c_{n+1} \leq g_{n+1}(t)$.

Рассмотрим случай б). Если для любого $t \leq a_{m_{n+1}}$ выполняется неравенство $g_n(t) > c_{n+1}$, то $\tilde{a}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$. Пусть существует $t \leq a_{m_{n+1}}$ такое, что $g_n(t) = c_{n+1}$. Тогда $\tilde{a}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \max\{t \in (-\infty, a_{m_{n+1}}] : g_n(t) = c_{n+1}\}$. Если для любого $t \geq b_{m_{n+1}}$ $g_n(t) < c_{n+1}$, то $\tilde{b}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} +\infty$. Если существует $t \geq b_{m_{n+1}}$ такое, что $g_n(t) = c_{n+1}$, то $\tilde{b}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \min\{t \in [b_{m_{n+1}}, +\infty) : g_n(t) = c_{n+1}\}$. Положим

$$g_{n+1}(t) = \begin{cases} g_n(t), & t \notin [\tilde{a}_{n+1}, \tilde{b}_{n+1}], \\ c_{n+1}, & t \in [\tilde{a}_{n+1}, \tilde{b}_{n+1}]. \end{cases}$$

При $t \in [\tilde{a}_{n+1}, b_{m_{n+1}}]$ $f_1(t) \leq c_{n+1}$ в силу выбора c_{n+1} ; при $t \in [b_{m_{n+1}}, \tilde{b}_{n+1}]$ $f_1(t) \leq g_n(t) \leq c_{n+1}$. Значит, при $t \in [\tilde{a}_{n+1}, \tilde{b}_{n+1}]$ $f_1(t) \leq c_{n+1} = g_{n+1}(t)$. Так как g_n убывает на $(a_{m_{n+1}}, b_{m_{n+1}})$ и $g_n(b_{m_{n+1}}) < c_{n+1}$, существует $t^* \in [a_{m_{n+1}}, b_{m_{n+1}}]$ такое,

что при $t \in (a_{m_{n+1}}, t^*)$ $g_n(t) \geq c_{n+1}$, при $t \in (t^*, b_{m_{n+1}})$ $g_n(t) < c_{n+1}$. Значит, при $t \in (\tilde{a}_{n+1}, t^*)$ $g_n(t) \geq c_{n+1}$ и $g_{n+1}(t) = c_{n+1} \leq g_n(t) \leq f_2(t)$. При $t \in (t^*, b_{m_{n+1}})$ $f_1(t) \leq g_n(t) < c_{n+1}$, поэтому $\{t \in [a, b_{m_{n+1}}] : f_1(t) = c_{n+1}\} \subset [a, t^*]$. Значит, существует точка $\tilde{t} \leq t^*$ такая, что $f_1(\tilde{t}) = c_{n+1}$. В силу (5) для любого $t \geq \tilde{t}$ выполнено неравенство $f_2(t) \geq f_1(\tilde{t}) = c_{n+1}$. Поэтому для любого $t \in (t^*, \tilde{b}_{n+1})$ $g_{n+1}(t) = c_{n+1} \leq f_2(t)$. Таким образом, для любого $t \in [a, b]$ $f_1(t) \leq g_{n+1}(t) \leq f_2(t)$.

Рассмотрим случай в). Пусть для любого $t \in [a_{m_{n+1}}, b_{m_{n+1}}]$ $g_n(t) \leq c_{n+1}$. Положим $\tilde{a}_{n+1} = a_{m_{n+1}}$. Если для любого $t \geq b_{m_{n+1}}$ $g_n(t) < g_n(a_{m_{n+1}})$, то $\tilde{b}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} +\infty$, иначе $\tilde{b}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \min\{t \geq b_{m_{n+1}} : g_n(t) = g_n(a_{m_{n+1}})\}$. Положим

$$g_{n+1}(t) = \begin{cases} g_n(t), & t \notin [\tilde{a}_{n+1}, \tilde{b}_{n+1}], \\ g_n(\tilde{a}_{n+1}), & t \in [\tilde{a}_{n+1}, \tilde{b}_{n+1}]. \end{cases}$$

Для любого $t \in (\tilde{a}_{n+1}, \tilde{b}_{n+1})$ $g_n(t) \leq g_n(\tilde{a}_{n+1})$, поэтому $g_{n+1}(t) \geq f_1(t)$. Положим $t^* = \max\{t \in [\tilde{a}_{n+1}, b_{m_{n+1}}] : g_n(t) = g_n(\tilde{a}_{n+1})\}$. Тогда для любого $t \in [\tilde{a}_{n+1}, t^*]$ выполняются соотношения $g_{n+1}(t) = g_n(t) \leq f_2(t)$. Так как $g_n(t^*) \leq c_{n+1}$ и для любого $t \in (t^*, b_{m_{n+1}}]$ $g_n(t) < g_n(t^*)$, то $\{t \in [a, b_{m_{n+1}}] : f_1(t) = c_{n+1}\} \subset [a, t^*]$. В силу (5) для любого $t \geq t^*$ $f_2(t) \geq c_{n+1}$. Значит, при $t \in (t^*, \tilde{b}_{n+1})$ выполнены неравенства $g_{n+1}(t) = g_{n+1}(\tilde{a}_{n+1}) \leq c_{n+1} \leq f_2(t)$. Таким образом, $f_1(t) \leq g_{n+1}(t) \leq f_2(t)$ для любого $t \in [a, b]$.

По построению g_{n+1} непрерывна во всех трех случаях. Докажем, что

$$\bigcup_{s=1}^{n+1} (a_s, b_s) \subset \bigcup_{s=1}^{n+1} (\tilde{a}_s, \tilde{b}_s).$$

Если $m_{n+1} > n+1$, то $\bigcup_{s=1}^{n+1} (a_s, b_s) \subset \bigcup_{s=1}^n (\tilde{a}_s, \tilde{b}_s)$. Если $m_{n+1} = n+1$, то $(a_{n+1}, b_{n+1}) \subset (\tilde{a}_{n+1}, \tilde{b}_{n+1})$. По предположению индукции $\bigcup_{s=1}^n (a_s, b_s) \subset \bigcup_{s=1}^n (\tilde{a}_s, \tilde{b}_s)$, откуда следует, что $\bigcup_{s=1}^{n+1} (a_s, b_s) \subset \bigcup_{s=1}^{n+1} (\tilde{a}_s, \tilde{b}_s)$.

Осталось доказать свойство 2). Пусть $t \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} (\tilde{a}_k, \tilde{b}_k)$. Тогда по построению $g_{n+1}(t) = g_n(t)$ и по предположению индукции $g_n(t) = g_0(t)$. Докажем, что для любого $k = 1, \dots, n+1$ $g_{n+1}|_{(\tilde{a}_k, \tilde{b}_k)} \equiv \text{const}$. Если $k = n+1$, то это выполнено по построению. Пусть $k < n+1$. По предположению индукции $g_n|_{(\tilde{a}_k, \tilde{b}_k)} \equiv \text{const}$. Следовательно, $g_{n+1}|_{(\tilde{a}_k, \tilde{b}_k) \setminus (\tilde{a}_{n+1}, \tilde{b}_{n+1})} \equiv \text{const}$. Значит, g_{n+1} является кусочно-постоянной на $(\tilde{a}_k, \tilde{b}_k)$ и в силу непрерывности является постоянной.

Построим функцию g , удовлетворяющую условиям теоремы.

Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ таких, что $n \geq m$, обозначим через I_m^n связную компоненту множества $\bigcup_{k=1}^n (\tilde{a}_k, \tilde{b}_k)$, содержащую интервал $(\tilde{a}_m, \tilde{b}_m)$. Так как $g_n|_{I_m^n} \equiv \text{const}$ и непрерывна, то $g_n|_{I_m^n} \equiv \text{const}$. Если для некоторых m и n выполнено $[a, b] \subset I_m^n$, то положим $g = g_n$. Тогда $g \in \llbracket f_1, f_2 \rrbracket$ и $g' \equiv 0$, т.е. g удовлетворяет условиям леммы.

Пусть для любых $m, n \in \mathbb{N}$ $[a, b] \not\subset I_m^n$. Тогда $\alpha_m^n \stackrel{\text{def}}{=} \inf I_m^n > a$ или $\beta_m^n \stackrel{\text{def}}{=} \sup I_m^n < b$. Докажем, что для любого $t \in [a, b]$ последовательность $g_n(t)$ сходится. Если $t \in [a, b] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} (\tilde{a}_k, \tilde{b}_k)$, то $g_n(t) = g_0(t)$. Пусть $t \in (\tilde{a}_m, \tilde{b}_m)$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Так как для любого $n \geq m$ справедливо $I_m^n \subset I_m^{n+1}$, то последовательности α_m^n и β_m^n монотонны, причем $\alpha_m \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\alpha_m^n : n \geq m\} \geq a$ или $\beta_m \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\beta_m^n : n \geq m\} \leq b$. Пусть выполнено первое неравенство (второй случай рассматривается аналогично). Так как $g_n|_{I_m^n} \equiv \text{const}$, то $g_n(t) = g_n(\alpha_m^n) = g_0(\alpha_m^n) \rightarrow g_0(\alpha_m)$ ($n \rightarrow \infty$).

Для любого $t \in [a, b]$ положим $g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t)$.

Докажем, что функция g удовлетворяет условиям леммы. Если $t \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)$, то существуют $m \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ такие, что $(t - \delta, t + \delta) \subset (\tilde{a}_m, \tilde{b}_m)$. Значит, для любого $\tau \in (t - \delta, t + \delta)$ либо $g(\tau) = g_0(\alpha_m)$ (если $\alpha_m \geq a$), либо $g(\tau) = g_0(\beta_m)$ (если $\beta_m \leq b$). Следовательно, $g \in C^1(t)$ и $g'(t) = 0$. Если t является внутренней точкой множества $[a, b] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)$, то $g \in C^1(t)$ и $g'(t) = g'_0(t) \geq 0$ (так как в этом случае $t \in [a, b] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$).

Пусть t_0 – граничная точка множества $[a, b] \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n))$. Докажем существование и непрерывность справа $g'_+(t_0)$. Пусть для некоторого $\delta > 0$ выполнено включение $(t_0, t_0 + \delta) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)$. Тогда для любого $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ $g'(t) = 0$ и, следовательно, $g'_+(t_0) = 0$. Пусть для некоторого $\delta > 0$ $(t_0, t_0 + \delta) \subset [a, b] \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n))$. Тогда для любого $t \in (t_0, t_0 + \delta)$ $g'(t) = g'_0(t)$ и поэтому $g'_+(t_0) = g'_0(t_0)$ и g'_+ непрерывна справа в t_0 . Так как $\bigcup_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$, то $g'_0(t_0) \geq 0$ и $g'_+(t_0) \geq 0$. Пусть для любого $\delta > 0$ $(t_0, t_0 + \delta) \cap ([a, b] \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n))) \neq \emptyset$ и $(t_0, t_0 + \delta) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)) \neq \emptyset$. Тогда существует $t_1 \in (t_0, t_0 + \delta)$ такое, что $g'_0(t_1) < 0$ (так как для некоторого n выполняется $(a_{m_n}, b_{m_n}) \subset (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n) \subset (t_0, t_0 + \delta)$) и существует $t_2 \in (t_0, t_0 + \delta)$ такое, что $g'_0(t_2) \geq 0$. Поэтому $g'_0(t_0) = 0$. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta' > 0$ такое, что для любого $t \in (t_0, t_0 + \delta')$ $|g_0(t) - g_0(t_0)| \leq \varepsilon|t - t_0|$. Если $t \in (t_0, t_0 + \delta') \cap ([a, b] \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)))$, то $g(t) = g_0(t)$ и $|g(t) - g(t_0)| = |g_0(t) - g_0(t_0)| \leq \varepsilon|t - t_0|$; если $t \in (t_0, t_0 + \delta') \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n))$, то для некоторого $t^* \in (t_0, t) \cap ([a, b] \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)))$ $g(t) = g(t^*)$ и $|g(t) - g(t_0)| = |g(t^*) - g(t_0)| \leq \varepsilon|t^* - t_0| \leq \varepsilon|t - t_0|$. Значит, $g'_+(t_0) = 0$. Таким образом, для любого $t \in [a, b]$ существует $g'_+(t)$, причем либо $g'_+(t) = 0$, либо $g'_+(t) = g'_0(t)$. Так как $g'_+(t_0) = g'_0(t_0) = 0$ и $g_0 \in C^1([a, b])$, то g'_+ непрерывна справа в точке t_0 .

Аналогично доказывается, что для любого $t \in [a, b]$ существует $g'_-(t)$ и g'_- непрерывна слева.

Докажем, что множество $T = \{t \in (a, b) : g'_+(t) \neq g'_-(t)\}$ состоит только из изолированных точек. Если $t \in T$, то t является граничной точкой множества $[a, b] \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n))$. Тогда возможны следующие случаи:

- 1) любая левая или правая полуокрестность точки t имеет непустое пересечение с $\bigcup_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)$ и с $[a, b] \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n))$. Тогда $g'_0(t) = 0$ и поэтому $g'_+(t) = g'_-(t) = 0$, т.е. $t \notin T$;
- 2) для некоторого $\delta > 0$ $(t - \delta, t) \cup (t, t + \delta) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)$. Тогда $g'_+(t) = g'_-(t) = 0$ и $t \notin T$;
- 3) для некоторого $\delta > 0$ $(t, t + \delta) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)$ и $(t - \delta, t) \subset [a, b] \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n))$ или $(t - \delta, t) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)$ и $(t, t + \delta) \subset [a, b] \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n, \tilde{b}_n))$. Тогда для любого $\tau \in (t - \delta, t) \cup (t, t + \delta)$ $g'_-(\tau) = g'_+(\tau)$, поэтому t является изолированной точкой множества T .

ЛЕММА 2. Пусть $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f_1 полунепрерывна сверху, f_2 полунепрерывна снизу и для любого $t \in [a, b]$ выполнены неравенства $f_1(t) \leq f_2(t)$, $\underline{D}_- f_1(t) \leq \overline{D}_+ f_1(t)$ и $\overline{D}_- f_2(t) \geq \underline{D}_+ f_2(t)$. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in C([a, b], \mathbb{R})$, $\varphi_1 \leq \varphi_2$, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет (*), для любого $t \in [a, b]$ выполнены неравенства $f_1(t) \leq g(t) \leq f_2(t)$, $\varphi_1(t) \leq g'_\pm(t) \leq \varphi_2(t)$. Тогда существует функция $\tilde{g} \in \llbracket f_1, f_2 \rrbracket_{C^1[a, b]}$ такая, что $\tilde{g}' \in \llbracket \varphi_1, \varphi_2 \rrbracket_{C[a, b]}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T = \{t \in [a, b] : g'_-(t) \neq g'_+(t)\}$. Так как функция g удовлетворяет (*), то множество T не более чем счетно. Пусть $T = \{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $g \in C^1(\bar{O}_{\delta_n}(t_n))$, $O_{\delta_i}(t_i) \cap O_{\delta_j}(t_j) = \emptyset$. Пусть для определенности $g'_-(t_n) < g'_+(t_n)$. Тогда, так как $\bar{D}_- f_2 \geq \underline{D}_+ f_2$, то $g(t_n) < f_2(t_n)$. Из полунепрерывности снизу функции f_2 следует, что существуют $\varepsilon_n > 0$ и $\delta'_n \in (0, \delta_n)$ такие, что для любого $t \in [t_n - \delta'_n, t_n + \delta'_n]$ выполнено $g(t) < f_2(t) - \varepsilon_n$. Положим для любого $t \in O_{\delta_n}(t_n)$

$$h_n^+(t) = \begin{cases} g'(t), & t > t_n, \\ \min\{\varphi_2(t), g'_+(t_n)\}, & t \leq t_n, \end{cases} \quad h_n^-(t) = \begin{cases} g'(t), & t < t_n, \\ \max\{\varphi_1(t), g'_-(t_n)\}, & t \geq t_n. \end{cases}$$

Существует $\delta''_n < \delta'_n$ такое, что $h_n^+(t) > g'(t)$ для любого $t \in (t_n - \delta''_n, t_n)$, $h_n^-(t) < g'(t)$ для любого $t \in (t_n, t_n + \delta''_n)$ и

$$\int_{t_n - \delta''_n}^{t_n} (h_n^+(t) - g'(t)) dt + \int_{t_n}^{t_n + \delta''_n} (g'(t) - h_n^-(t)) dt < \varepsilon_n. \quad (6)$$

Докажем, что существует непрерывная функция $\psi_n : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ такая, что

$$\psi_n|_{[a, t_n - \delta''_n]} \equiv 0, \quad \psi_n|_{[t_n + \delta''_n, b]} \equiv 1, \quad (7)$$

$$g(t_n - \delta''_n) + \int_{t_n - \delta''_n}^{t_n + \delta''_n} [h_n^+(t)\psi_n(t) + h_n^-(t)(1 - \psi_n(t))] dt = g(t_n + \delta''_n). \quad (8)$$

В самом деле, пусть $\psi_n^0 \in C([a, b], [0, 1])$ удовлетворяет (7). Если выполнено (8), то $\psi_n = \psi_n^0$. Пусть

$$g(t_n - \delta''_n) + \int_{t_n - \delta''_n}^{t_n + \delta''_n} [h_n^+(t)\psi_n^0(t) + h_n^-(t)(1 - \psi_n^0(t))] dt > g(t_n + \delta''_n)$$

(случай противоположного неравенства рассматривается аналогично). Рассмотрим для $r \in [0, 1]$ семейство функций $\psi_n^r : [a, b] \rightarrow [0, 1]$, непрерывных по совокупности (t, r) , удовлетворяющих (7) и таких, что $\psi_n^1|_{[a, t_n]} \equiv 0$. Тогда

$$g(t_n - \delta''_n) + \int_{t_n - \delta''_n}^{t_n + \delta''_n} [h_n^+(t)\psi_n^1(t) + h_n^-(t)(1 - \psi_n^1(t))] dt < g(t_n + \delta''_n)$$

и поэтому при некотором $r \in [0, 1]$ выполнено (8) с $\psi_n := \psi_n^r$.

При $t \in O_{\delta_n}(t_n)$ положим

$$\tilde{g}(t) = g(t_n - \delta_n) + \int_{t_n - \delta_n}^t [h_n^+(s)\psi_n(s) + h_n^-(s)(1 - \psi_n(s))] ds.$$

Тогда для любого $t \in O_{\delta_n}(t_n)$

$$\tilde{g}'(t) = h_n^+(t)\psi_n(t) + h_n^-(t)(1 - \psi_n(t)) \in [\varphi_1(t), \varphi_2(t)],$$

$$\begin{aligned} f_1(t) &\leq g(t) \leq \tilde{g}(t) \leq g(t) + \int_{t_n - \delta_n}^{t_n} (h_n^+(s) - g'(s))\psi_n(s) ds \\ &\quad + \int_{t_n}^{t_n + \delta_n} (g'(s) - h_n^-(s))(1 - \psi_n(s)) ds \\ &\leq g(t) + \int_{t_n - \delta_n}^{t_n} (h_n^+(s) - g'(s)) ds \\ &\quad + \int_{t_n}^{t_n + \delta_n} (g'(s) - h_n^-(s)) ds \leq g(t) + \varepsilon_n \leq f_2(t). \end{aligned}$$

При $t \notin \bigcup_n O_{\delta_n}(t_n)$ положим $\tilde{g}(t) = g(t)$. Докажем, что $\tilde{g} \in C^1([a, b])$. Если $t_0 \in \text{int}([a, b] \setminus \bigcup_n O_{\delta_n}(t_n))$, то $\tilde{g} \in C^1(t_0)$, так как $g \in C^1(t_0)$. Если $t_0 \in \bigcup_n O_{\delta_n}(t_n)$, то $\tilde{g} \in C^1(t_0)$ по построению. Пусть $t_0 \in \partial(\bigcup_n O_{\delta_n}(t_n))$. Докажем, что тогда $\tilde{g}'(t_0) = g'(t_0)$. Если $t_0 = t_n - \delta_n$ для некоторого n , то $\tilde{g}'_+(t_0) = g'_+(t_0)$ по построению. Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ такого, что $t_n > t_0$, выполняется $t_n - \delta_n > t_0$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любого $t \in (t_0, t_0 + \delta_0)$ выполнено неравенство $|g(t) - g(t_0) - g'(t_0)(t - t_0)| \leq \varepsilon|t - t_0|$. Пусть $t \in (t_0, t_0 + \delta_0) \setminus (\bigcup_n O_{\delta_n}(t_n))$. Тогда $\tilde{g}(t) = g(t)$ и $|\tilde{g}(t) - \tilde{g}(t_0) - g'(t_0)(t - t_0)| \leq \varepsilon|t - t_0|$. Пусть $t \in O_{\delta_n}(t_n) \cap (t_0, t_0 + \delta_0)$. Тогда

$$\begin{aligned}
 \tilde{g}(t) &= g(t_n - \delta_n) + \int_{t_n - \delta_n}^t (\psi_n(s)h_n^+(s) + (1 - \psi_n(s))h_n^-(s)) ds, \\
 |\tilde{g}(t) - \tilde{g}(t_0) - g'(t_0)(t - t_0)| &\leq |g(t_n - \delta_n) - g(t_0) - g'(t_0)(t_n - \delta_n - t_0)| \\
 &\quad + |g(t_n - \delta_n) - \tilde{g}(t) - g'(t_0)(t_n - \delta_n - t)| \\
 &\leq \varepsilon|t_n - \delta_n - t_0| + \left| \int_{t_n - \delta_n}^t [\varphi_n(s)h_n^+(s) + (1 - \varphi_n(s))h_n^-(s) - g'(t_0)] ds \right| \\
 &\leq \varepsilon|t_n - \delta_n - t_0| + \int_{t_n - \delta_n}^t |h_n^+(s) - g'(t_0)| ds + \int_{t_n - \delta_n}^t |h_n^-(s) - g'(t_0)| ds \\
 &\leq \varepsilon|t_n - \delta_n - t_0| + |t - t_n + \delta_n| \sup_{s \in [t_n - \delta_n, t]} |h_n^+(s) - g'(t_0)| \\
 &\quad + |t - t_n + \delta_n| \sup_{s \in [t_n - \delta_n, t]} |h_n^-(s) - g'(t_0)|.
 \end{aligned}$$

Так как $g'_+(s) \rightarrow g'(t_0)$ ($s \rightarrow t_0 + 0$) и $g'_-(s) \rightarrow g'(t_0)$ ($s \rightarrow t_0 + 0$), $\varphi_1, \varphi_2 \in C([a, b])$, для некоторого $\delta \in (0, \delta_0)$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ выполнены неравенства $\sup_{s \in [t_n - \delta_n, t]} |h_n^+(s) - g'(t_0)| < \varepsilon$ и $\sup_{s \in [t_n - \delta_n, t]} |h_n^-(s) - g'(t_0)| < \varepsilon$. Поэтому при $t \in O_{\delta_n}(t_n) \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ $|\tilde{g}(t) - \tilde{g}(t_0) - g'(t_0)(t - t_0)| \leq 3\varepsilon|t - t_0|$. Аналогично доказывается, что $\tilde{g}'_-(t_0) = g'(t_0)$.

Таким образом, $\tilde{g}'(t) = g'(t)$ для любого $t \in [a, b] \setminus (\bigcup_n O_{\delta_n}(t_n))$. Осталось доказать, что если $t_0 \in \partial(\bigcup_n O_{\delta_n}(t_n))$, то $\tilde{g}' \in C(t_0)$. В самом деле, если $t \in \bigcup_n O_{\delta_n}(t_n)$, то для некоторого $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 |\tilde{g}'(t) - \tilde{g}'(t_0)| &= |\psi_n(t)h_n^+(t) + (1 - \psi_n(t))h_n^-(t) - g'(t_0)| \\
 &\leq |h_n^+(t) - g'(t_0)| + |h_n^-(t) - g'(t_0)| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow t_0),
 \end{aligned}$$

если $t \in [a, b] \setminus (\bigcup_n O_{\delta_n}(t_n))$, то $|\tilde{g}'(t) - \tilde{g}'(t_0)| = |g'(t) - g'(t_0)| \rightarrow 0$ ($t \rightarrow t_0$).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f_1, f_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ полунепрерывны соответственно сверху и снизу, для любого t выполнены неравенства $\underline{D}_- f_1 \leq \overline{D}_+ f_1$ и $\overline{D}_- f_2 \geq \underline{D}_+ f_2$, и множество $\{f \in C^1([a, b]) : f_1 \leq f \leq f_2\}$ непусто. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in C([a, b])$, $\varphi_1 \leq \varphi_2$. Тогда для того, чтобы множество

$$\{f \in C^1([a, b]) : \forall t \in [a, b] f(t) \in [f_1(t), f_2(t)], f'(t) \in [\varphi_1(t), \varphi_2(t)]\}$$

было непустым, необходимо и достаточно, чтобы для любых $a \leq t_1 \leq t_2 \leq b$ выполнялись неравенства (3) и (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем необходимость. Пусть $f \in C^1([a, b])$, для любого $t \in [a, b]$ выполнены неравенства $f_1(t) \leq f(t) \leq f_2(t)$, $\varphi_1(t) \leq f'(t) \leq \varphi_2(t)$. Тогда для любых $t_1 \leq t_2$

$$f_2(t_2) \geq f(t_2) = f(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f'(t) dt \geq f_1(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t) dt,$$

откуда следует (3). Аналогично доказывается (4).

Докажем достаточность. Пусть $g_0 \in \llbracket f_1, f_2 \rrbracket_{C^1}$. Положим $f(t) = \int_a^t \varphi_1(s) ds$. Из (3) и леммы 1 следует, что существует функция $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая (*) и такая, что для любого $t \in [a, b]$ выполнены неравенства $f_1(t) \leq g(t) \leq f_2(t)$, $g'_\pm(t) \in \{f'(t), \max(f'(t), g'_0(t))\} = \{\varphi_1(t), \max(\varphi_1(t), g'_0(t))\}$ (откуда следует, что $g'_\pm(t) \geq \varphi_1(t)$). По лемме 2 существует функция $g_1 \in \llbracket f_1, f_2 \rrbracket_{C^1}$ такая, что $g'_1(t) \geq \varphi_1(t)$ для любого $t \in [a, b]$.

Положим $\tilde{f}(t) = \int_a^t \varphi_2(s) ds$. Тогда из (4) и леммы 1 следует, что существует функция $g_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяющая (*) и такая, что для любого $t \in [a, b]$ выполнены неравенства $f_1(t) \leq g_2(t) \leq f_2(t)$, $g'_{2\pm}(t) \in \{\tilde{f}'(t), \min(\tilde{f}'(t), g'_1(t))\} = \{\varphi_2(t), \min(\varphi_2(t), g'_1(t))\}$. Значит, $\varphi_1(t) \leq g'_{2\pm}(t) \leq \varphi_2(t)$. Из леммы 2 следует, что существует функция $h \in \llbracket f_1, f_2 \rrbracket_{C^1}$ такая, что $h' \in \llbracket \varphi_1, \varphi_2 \rrbracket_C$.

От условий $\underline{D}_- f_1 \leq \overline{D}_+ f_1$ и $\overline{D}_- f_2 \geq \underline{D}_+ f_2$ отказаться нельзя. Пусть, например, $f_1(t) = -2t$ при $t \in [0, 1]$, $f_1(t) = 2t - 4$ при $t \in [1, 2]$ и $f_2(t) = f_1(t) + 1$. Тогда $f_1(0) = f_1(2) = 0$, $f_2(1) = -1$. Легко видеть, что $\llbracket f_1, f_2 \rrbracket$ содержит C^1 -гладкую функцию. При этом функция $f \in \llbracket f_1, f_2 \rrbracket$, удовлетворяющая условию Липшица с константой 1, единственна и имеет вид $f(t) = -t$ при $t \in [0, 1]$ и $f(t) = t - 2$ при $t \in [1, 2]$, т.е. не принадлежит пространству $C^1[0, 2]$.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – линейное пространство с полунормой. Множество $M \subset X$ называется множеством существования, если для любого $x \in X$ существует точка $y \in M$ такая, что

$$\|x - y\| = \inf_{y' \in M} \|x - y'\|.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f_1, f_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ полунепрерывны сверху и снизу соответственно, для любого t выполнены неравенства $\underline{D}_- f_1 \leq \overline{D}_+ f_1$ и $\overline{D}_- f_2 \geq \underline{D}_+ f_2$. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in C([a, b])$ и множество $M = \{f \in C^1([a, b]) : f_1 \leq f \leq f_2, \varphi_1 \leq f' \leq \varphi_2\}$ непусто. Тогда M является множеством существования в пространстве $C^1([a, b])$ с полунормой $\|f\|_{C^1[a, b]} = \max\{\|f'\|_{C[a, b]}, \alpha\|f\|_{C[a, b]}\}$, где $\alpha \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g_0 \in C^1[a, b]$. Тогда $P_M(g_0) = P_{M-g_0}(0) + g_0$, а множество $M - g_0$ удовлетворяет условиям теоремы. Поэтому достаточно доказать, что $P_M(0) \neq \emptyset$. Пусть $d = \text{dist}(0, M)$. Тогда существует последовательность функций $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty \subset M$ такая, что $\|\psi_n\|_{C^1[a, b]} = d + \varepsilon_n \rightarrow d$ ($n \rightarrow \infty$). Значит, для любого $t \in [a, b]$ выполнены неравенства $\alpha f_1(t) \leq \alpha \psi_n(t) \leq d + \varepsilon_n$, $\alpha f_2(t) \geq \alpha \psi_n(t) \geq -d - \varepsilon_n$, откуда следует

$$f_1(t) \leq \frac{d}{\alpha}, \quad f_2(t) \geq -\frac{d}{\alpha} \quad (9)$$

при $\alpha > 0$. Если $\alpha = 0$, то положим $\tilde{f}_j = f_j$. При $\alpha > 0$ положим $\tilde{f}_1 = \max\{f_1, -d/\alpha\}$, $\tilde{f}_2 = \min\{f_2, d/\alpha\}$. Тогда $\tilde{f}_1$ полунепрерывна сверху, $\tilde{f}_2$ полунепрерывна снизу и для любого t выполнены неравенства

$$\underline{D}_- \tilde{f}_1(t) \leq \overline{D}_+ \tilde{f}_1(t), \quad \overline{D}_- \tilde{f}_2(t) \geq \underline{D}_+ \tilde{f}_2(t), \quad t \in (a, b). \quad (10)$$

Докажем это утверждение для функции f_2 . Если $f_2(t_0) > d/\alpha$, то $\tilde{f}_2(t) = d/\alpha$ в некоторой окрестности точки t_0 . Если $f_2(t_0) \leq d/\alpha$, то $\tilde{f}_2(t_0) = f_2(t_0)$. Пусть

$$t_n \rightarrow t_0 - 0, \quad s_n \rightarrow t_0 + 0,$$

$$\frac{f_2(t_n) - f_2(t_0)}{t_n - t_0} \rightarrow \overline{D}_- f_2(t_0), \quad \frac{f_2(s_n) - f_2(t_0)}{s_n - t_0} \rightarrow \underline{D}_+ f_2(t_0)$$

при $n \rightarrow \infty$. Если $f_2(t_0) < d/\alpha$, то при больших n выполнено $\tilde{f}_2(t_n) = f_2(t_n)$ и $\tilde{f}_2(s_n) = f_2(s_n)$ и поэтому

$$\overline{D}_- \tilde{f}_2(t_0) \geq \overline{D}_- f_2(t_0) \geq \underline{D}_+ f_2(t_0) \geq \underline{D}_+ \tilde{f}_2(t_0).$$

Пусть $f_2(t_0) = d/\alpha$. Если $\overline{D}_- f_2(t_0) > 0$, то $\tilde{f}_2(t_n) = f_2(t_n)$; если $\overline{D}_- f_2(t_0) < 0$, то $\tilde{f}_2(t_n) = d/\alpha$ при достаточно больших n . Если $\overline{D}_- f_2(t_0) = 0$, то $\overline{D}_- \tilde{f}_2(t_0) = 0$. Таким образом, $\overline{D}_- \tilde{f}_2(t_0) \geq 0$. Аналогично доказывается, что $\underline{D}_+ \tilde{f}_2(t_0) \leq 0$.

В силу (9) для любого $t \in [a, b]$ выполнено неравенство $\tilde{f}_1(t) \leq \tilde{f}_2(t)$.

По условию теоремы существует функция $f \in C^1([a, b])$ такая, что $f_1 \leq f \leq f_2$. Положим

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} d/\alpha, & \text{если } f(t) > d/\alpha, \\ f(t), & \text{если } -d/\alpha \leq f(t) \leq d/\alpha, \\ -d/\alpha, & \text{если } f(t) < -d/\alpha. \end{cases}$$

Тогда $\tilde{f}_1 \leq \tilde{f} \leq \tilde{f}_2$ и функция $\tilde{f}$ удовлетворяет условию (*). Действительно, если $f(t) \neq \pm d/\alpha$, то $\tilde{f} \in C^1(O(t))$, где $O(t)$ – некоторая окрестность точки t . Пусть $f(t_0) = d/\alpha$. Если $f'(t_0) < 0$, то $\tilde{f}(t) = d/\alpha$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0]$ и $\tilde{f}(t) = f(t)$ при $t \in [t_0, t_0 + \delta)$ для некоторого $\delta > 0$. Аналогично рассматривается случай $f'(t_0) > 0$. Если $f'(t_0) = 0$, то $\tilde{f}'(t_0) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow t_0} \tilde{f}'_{\pm}(t) = 0$, так как $\tilde{f}'_{\pm}(t) \in \{0, f'(t)\}$ и f' непрерывна.

Из леммы 2 и (10) следует, что существует функция $g_0 \in \llbracket \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \rrbracket_{C^1[a, b]}$. Возьмем произвольные $t_1 \leq t_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \min \left\{ f_2(t_2), \frac{d + \varepsilon_n}{\alpha} \right\} &\geq \psi_n(t_2) = \psi_n(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \psi'_n(t) dt \\ &\geq \max \left\{ f_1(t_1), -\frac{d + \varepsilon_n}{\alpha} \right\} + \int_{t_1}^{t_2} \max \{ \varphi_1(t), -d - \varepsilon_n \} dt. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем неравенство

$$\tilde{f}_2(t_2) \geq \tilde{f}_1(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \max \{ \varphi_1(t), -d \} dt.$$

Аналогично доказывается, что

$$\tilde{f}_1(t_2) \leq \tilde{f}_2(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \min \{ \varphi_2(t), d \} dt.$$

По теореме 2 существует функция $g \in \llbracket \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \rrbracket_{C^1[a, b]}$ такая, что выполнено $g' \in \llbracket \max \{ \varphi_1, -d \}, \min \{ \varphi_2, d \} \rrbracket_{C[a, b]}$. Значит, $g \in \llbracket f_1, f_2 \rrbracket_{C^1[a, b]}$, $g' \in \llbracket \varphi_1, \varphi_2 \rrbracket_{C[a, b]}$, $-d \leq g' \leq d$ и $-d \leq \alpha g \leq d$, т.е. $g \in P_M(0)$.

В заключение автор приносит благодарность своему научному руководителю профессору И. Г. Царькову за постановку задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Lindenstrauss, “On nonlinear projection in Banach spaces”, *Michigan Math. J.*, **11**:3 (1964), 263–287.
- [2] P. Shvartsman, “On Lipschitz selections of affine-set valued mappings”, *Geom. Funct. Anal.*, **11**:4 (2001), 840–868.
- [3] C. Franchetti, E. W. Cheney, “The embedding of proximinal sets”, *J. Approx. Theory*, **48**:2 (1986), 213–225.
- [4] В. Н. Замятин, М. В. Кадец, “Чебышевские центры в пространстве $C[a, b]$ ”, *Теор. функций, функцион. анализ и прилож.*, 1968, № 7, 20–26.
- [5] С. Я. Хавинсон, “Аппроксимативные свойства некоторых множеств в пространствах непрерывных функций”, *Anal. Math.*, **29**:2 (2003), 87–105.
- [6] А. А. Васильева, “Замкнутые промежутки в векторнозначных функциональных пространствах и их аппроксимативные свойства”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:4 (2004), 75–116.
- [7] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **153**, Springer-Verlag, New York, 1969.

А. А. Васильева

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: vasilyeva_nastya@pochta.ru

Поступило

26.05.2006