Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Н. Мирошин, О многократных интегралах специального вида, *Матем. заметки*, 2007, том 82, выпуск 3, 401–410

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3849>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 14:17:08

О многократных интегралах специального вида

Р. Н. Мирошин

Многократные интегралы, обобщающие итерированные ядра интегральных операторов, представляются в виде однократных интегралов в случае специального представления ядра (теорема). Кроме интегральных уравнений эти интегралы характерны для марковских процессов. Как следствие из теоремы получаются плотности вероятности перехода некоторых марковских процессов. В качестве иллюстрации рассмотрено девять примеров.

Библиография: 5 названий.

Известно мало нетривиальных многократных интегралов, выражающихся простыми аналитическими формулами. В предыдущей нашей заметке [1] мы увеличили их число, вычислив $(2m-4)$ -х кратный интеграл, зависящий от $(m+3)$ -х параметров, при некоторых значениях которых встретившийся нам в процессе решения задач, связанных с нулями гауссовских стационарных марковских процессов [2]. Здесь m – целое число, $m > 2$. Однако, как оказалось, используемый в [1] прием мало связан со спецификой рассмотренной конкретной задачи и, будучи применен к другим многократным интегралам, существенно расширяет возможности их представления в простой аналитической форме. Завершив доказательство основного результата (теоремы), в примерах мы конкретизируем его для определенных подынтегральных функций, связанных с классическими интегральными преобразованиями (Фурье, Ганкеля, Конторовича–Лебедева). Как следствие из теоремы получается представление плотности вероятности перехода некоторых марковских процессов, ранее не известных.

Рассмотрим интеграл

$$\pi_{m-1}(x_m | a_{m-1}, \dots, a_1 | x_1) = \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} \prod_{k=1}^{m-1} \pi_1(x_{k+1} | a_k | x_k) dx_2 \dots dx_{m-1}, \quad (1)$$

в котором Ω – интервал вещественной оси (возможно, бесконечный), $x_1, \dots, x_m$ – вещественные переменные, $a_1, \dots, a_{m-1}$ – параметры (могут быть многомерными). В частности, когда все a_k равны между собой, $a_k = a$, интеграл (1) – итерированное ядро интегрального оператора

$$\int_{\Omega} \pi_1(y | a | x) f(x) dx. \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-2259.2003.1).

В [1] интеграл (1) сведен к однократному при $\Omega = [0, \infty)$, $a_k = (\mu, \lambda, b_k)$, $\operatorname{Re} \mu > 0$, $|b_k| \leq 1$, $k = 1, \dots, m-1$,

$$\pi_1(y|a_k|x) = y^{\mu-1} Y(\mu, \lambda; A_k(x, y)) x^{\mu-2}, \quad Y(\mu, \lambda; x) = 2 \left(\frac{x}{2\lambda} \right)^{(1-\mu)/2} K_{1-\mu}(\sqrt{2\lambda}x),$$

$A_k(x, y) = x^2 + 2b_kxy + y^2$, где $K_\nu(x)$ – модифицированная функция Бесселя (функция Макдональда) [3].

По аналогии с (2) функцию $\pi_1(y|a_k|x)$ в (1) будем называть *ядром*.

Предположим, что в (1) имеет место представление ядра в виде

$$\pi_1(y|a|x) = \int_{\Lambda} \psi_{\lambda}(a) u_{\lambda}(y) v_{f(\lambda)}(x) d\lambda \quad (3)$$

или

$$\pi_1(y|a|x) = \int_{\Lambda} \psi_{\lambda}(a) u_{g(\lambda)}(y) v_{\lambda}(x) d\lambda, \quad (4)$$

где Λ – интервал вещественной оси (возможно, бесконечный), $\psi_{\lambda}(a)$ – функция вещественного переменного λ и параметра a , а функции $u_{\lambda}(x)$ и $v_{\lambda}(x)$ таковы, что

$$\int_{\Omega} u_{\lambda_1}(x) v_{\lambda_2}(x) dx = \delta(\lambda_1 - \lambda_2). \quad (5)$$

Здесь $\delta(\lambda)$ – δ -функция, $f(\lambda) \in \Lambda$ и $g(\lambda) \in \Lambda$ – вещественные функции.

На соотношении (5) основаны классические интегральные преобразования. Например [4], [5]:

– для косинус-преобразования Фурье

$$\Omega = [0, \infty), \quad u_{\lambda}(x) = v_{\lambda}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \lambda x;$$

– для синус-преобразования Фурье

$$\Omega = [0, \infty), \quad u_{\lambda}(x) = v_{\lambda}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \lambda x;$$

– для экспоненциального преобразования Фурье

$$\Omega = (-\infty, \infty), \quad u_{\lambda}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda x}, \quad v_{\lambda}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\lambda x},$$

– для преобразования Ганкеля

$$\Omega = [0, \infty), \quad u_{\lambda}(x) = v_{\lambda}(x) = \sqrt{\lambda x} J_{\nu}(\lambda x), \quad \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2},$$

– для преобразования Конторовича–Лебедева

$$\Omega = [0, \infty), \quad u_{\lambda}(x) = \frac{2}{\pi^2} \lambda \cdot \operatorname{sh}(\pi \lambda) \cdot \frac{K_{i\lambda}(x)}{x}, \quad v_{\lambda}(x) = K_{i\lambda}(x).$$

Здесь $J_{\nu}(x)$ – функция Бесселя первого рода [3], [5], $K_{\nu}(x)$ – функция Макдональда [3], [5], i – мнимая единица.

Обозначим

$$f_n(\lambda) = \underbrace{f(f(f(\cdots(f(\lambda))))}_{n \text{ раз}} \quad (6)$$

n -ю итерацию функции $f(\lambda)$. Аналогично, $g_n(\lambda)$ обозначает n -ю итерацию функции $g(\lambda)$.

ТЕОРЕМА. Интеграл (1) с ядром вида (3) сворачивается к однократному интегралу

$$\int_{\Lambda} \left[\prod_{k=1}^{m-2} \psi_{f_k(\lambda)}(a_{m-k-1}) \right] \psi_{\lambda}(a_m - 1) u_{\lambda}(x_m) v_{f_{m-1}(\lambda)}(x_1) d\lambda, \quad (7)$$

а с ядром вида (4) – к однократному интегралу

$$\int_{\Lambda} \left[\prod_{k=1}^{m-2} \psi_{g_k(\lambda)}(a_{k+1}) \right] \psi_{\lambda}(a_1) u_{g_{m-1}(\lambda)}(x_m) v_{\lambda}(x_1) d\lambda. \quad (8)$$

Особенно простую форму приобретает интеграл (1) тогда, когда $f(\lambda) = \lambda$:

$$\int_{\Lambda} \left[\prod_{k=1}^{m-1} \psi_{\lambda}(a_k) \right] u_{\lambda}(x_m) v_{\lambda}(x_1) d\lambda. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся рекуррентным соотношением

$$\pi_{m-1}(x_m | a_{m-1}, \dots, a_1 | x_1) = \int_{\Omega} \pi_{m-2}(x_m | a_{m-1}, \dots, a_2 | x_2) \pi_1(x_2 | a_1 | x_1) dx_2. \quad (10)$$

При $m = 3$ имеем из (10)

$$\pi_2(x_3 | a_2, a_1 | x_1) = \int_{\Omega} \pi_1(x_3 | a_2 | x_2) \pi_1(x_2 | a_1 | x_1) dx_2. \quad (11)$$

Подставив в (11) вместо π_1 представление (3) и переставив интегрирование по λ_1 , λ_2 и по x_2 в получившемся тройном интеграле, находим, что

$$\pi_2(x_3 | a_2, a_1 | x_1) = \int_{\Lambda} \int_{\Lambda} \psi_{\lambda_2}(a_2) \psi_{\lambda_1}(a_1) u_{\lambda_2}(x_3) v_{f(\lambda_1)}(x_1) K(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2, \quad (12)$$

где

$$K(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{\Omega} u_{\lambda_1}(x_2) v_{f(\lambda_2)}(x_2) dx_2. \quad (13)$$

В силу (5) интеграл (13) равен $\delta(\lambda_1 - f(\lambda_2))$, так что в (12) при $f(\lambda) \in \Lambda$ останется только один интеграл по λ_2 :

$$\pi_2(x_3 | a_2, a_1 | x_1) = \int_{\Lambda} \psi_{\lambda_2}(a_2) \psi_{f(\lambda_2)}(a_1) u_{\lambda_2}(x_3) v_{f_2(\lambda_2)}(x_1) d\lambda_2, \quad (14)$$

который совпадает при $m = 3$ и $\lambda_2 = \lambda$ с (7). Формула (7) получается теперь индукцией по $m \geq 3$, базой которой является формула (14).

Аналогично доказывается и случай с представлением ядра в виде (4) – формула (8).

Мы не акцентируем внимание читателя на обоснованиях действий с δ -функциями, поскольку они уже стали общепринятыми. Следует помнить только, что $\delta(x)$ – это “ядро” линейного функционала, сопоставляющего функции из определенного функционального пространства $\mathcal{F}$ (чаще всего берутся финитные непрерывные в нуле функции) ее значение при $x = 0$. Соответственно, фигурирующие в интегралах (3), (4) функции $\psi_\lambda(a)u_\lambda(x)$ и $\psi_\lambda(a)v_\lambda(y)$ как функции переменной λ должны принадлежать пространству $\mathcal{F}$.

Интересное видоизменение теоремы получается, когда в (1) $a_j = (t_{j+1}, t_j)$, $j = 1, \dots, m-1$, $t_j < t_{j+1}$ и для ядра вместо (3) мы имеем представление

$$\pi_1(y|(t, s)|x) = \int_{\Lambda} \frac{\psi_\lambda(t)}{\psi_\lambda(s)} u_\lambda(y)v_\lambda(x) d\lambda, \quad (15)$$

в котором $s < t$, а $\psi_\lambda(t)$ – вещественная функция аргумента λ и параметра t , и по-прежнему $u_\lambda(x)$ и $v_\lambda(x)$ удовлетворяют соотношению (5).

Подставив (15) в (12)–(14), убеждаемся, что

$$\pi_2(x_3|(t_3, t_2), (t_2, t_1)|x_1) = \pi_1(x_3|(t_3, t_1)|x_1),$$

т.е. справедливо уравнение (получается из (12))

$$\pi_1(x_3|(t_3, t_1)|x_1) = \int_{\Omega} \pi_1(x_3|(t_3, t_2)|x_2)\pi_1(x_2|(t_2, t_1)|x_1) dx_2, \quad (16)$$

которое в силу рекуррентного соотношения (10) приводит к равенству

$$\pi_{m-1}(x_3|(t_m, t_{m-1}), \dots, (t_2, t_1)|x_1) = \pi_1(x_m|(t_m, t_1)|x_1). \quad (17)$$

Если

$$\pi_1(y|(t, s)|x) \geq 0, \quad \int_{\Omega} \pi_1(y|(t, s)|x) dy \leq 1, \quad s < t, \quad (18)$$

то можно отождествить

$$\pi_1(y|(t, s)|x) = \pi_{s \rightarrow t}(x \rightarrow y) \quad (19)$$

с плотностью вероятности перехода траектории некоторого марковского процесса с непрерывным временем из начальной точки x в момент времени s в окрестность точки y в момент времени t , поскольку в этом случае уравнение (16)

$$\pi_{t_1 \rightarrow t_3}(x_1 \rightarrow x_3) = \int_{\Omega} \pi_{t_1 \rightarrow t_2}(x_1 \rightarrow x_2)\pi_{t_2 \rightarrow t_3}(x_2 \rightarrow x_3) dx_2, \quad (20)$$

является уравнением Чепмена–Колмогорова. Мы имеем, таким образом,

СЛЕДСТВИЕ. Если в ядре $\pi_1(y|a_j|x)$ параметры a_j таковы, что $a_j = (t_{j+1}, t_j)$ и $t_1 < t_2 < \dots < t_{m+1}$, и ядро допускает представление (15), то интеграл (1) сворачивается к виду (17). Если при этом выполняются соотношения (18), то это ядро можно отождествить по формуле (19) с плотностью вероятности перехода некоторого марковского процесса с непрерывным временем t .

Перейдем к примерам, используя каждое из вышеупомянутых классических интегральных преобразований.

ПРИМЕР 1. Пусть $\Omega = [0, \infty)$, а ядро имеет вид

$$\pi_1(y|a_j|x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{|a_j|}{a_j^2 + (y+x)^2} + \frac{|a_j|}{a_j^2 + (y-x)^2} \right], \quad x > 0, \quad y > 0. \quad (21)$$

Применим к (21) косинус-преобразование Фурье [5; т. 1]:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \pi_1(y|a_j|x) \cos \lambda x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\{-|a_j|\lambda\} \cos \lambda y. \quad (22)$$

Решая уравнение (22) относительно $\pi_1(y|a_j|x)$, т.е. применяя к нему снова косинус-преобразование, находим, что

$$\pi_1(y|a_j|x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp\{-|a_j|\lambda\} \cos \lambda y \cos \lambda x d\lambda. \quad (23)$$

Следовательно, ядро (21) допускает представление (3), (5) с

$$f(\lambda) = \lambda, \quad \Lambda = [0, \infty), \quad \psi_\lambda(a_j) = e^{-|a_j|\lambda}, \quad u_\lambda(x) = v_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \lambda x,$$

и поэтому согласно теореме

$$\begin{aligned} \pi_{m-1}(x_m|a_{m-1}, \dots, a_1|x_1) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp\left\{-\lambda \sum_{j=1}^{m-1} |a_j|\right\} \cos \lambda y \cos \lambda x d\lambda \\ &= \pi_1\left(x_m \left| \sum_{j=1}^{m-1} |a_j| \right| x_1\right). \end{aligned} \quad (24)$$

Если положить $a_j = t_{j+1} - t_j$, $t_1 < t_2 < \dots < t_m$, то можно отождествить (24) с плотностью вероятности перехода марковского процесса с непрерывным временем t и со значениями на полуоси $\Omega = [0, \infty)$:

$$\pi_1(y|t_{j+1} - t_j|x) = \pi_{t_j \rightarrow t_{j+1}}(x \rightarrow y), \quad (25)$$

поскольку $\pi_1(y|t_{j+1} - t_j|x) \geq 0$ и

$$\int_0^\infty \pi_1(y|t_{j+1} - t_j|x) dy = 1,$$

т.е. выполняются условия (18) и в силу (24) удовлетворяется уравнение Чепмена–Колмогорова (20). Из (24) видим, что $\psi_\lambda(t-s) = e^{-\lambda(t-s)} = \psi_\lambda(t)/\psi_\lambda(s)$, так что данный пример является также и иллюстрацией к следствию.

Несколько слов об этом марковском процессе. Его плотность вероятности перехода (25)

– стационарна (т.е. не зависит от начала отсчета времени):

$$\pi_{s \rightarrow t}(x \rightarrow y) = p_{t-s}(x, y) \equiv p;$$

– симметрична относительно начального и конечного значений процесса:

$$\pi_{s \rightarrow t}(x \rightarrow y) = \pi_{s \rightarrow t}(y \rightarrow x);$$

– является гармонической функцией по переменным t , x и t , y :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0;$$

– удовлетворяет гиперболическому уравнению по переменным x , y :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}.$$

Из (23) следует, что $\lim_{s \rightarrow t} \pi_{s \rightarrow t}(x \rightarrow y) = \delta(y - x)$, т.е. траектория процесса не меняется скачками.

ПРИМЕР 2. Пусть $\Omega = [0, \infty)$, а ядро имеет вид [3; с. 436, № 3.762(3)]

$$\begin{aligned} \pi_1(y|a|x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-a} \cos \lambda y \cos \lambda x d\lambda \\ &= \frac{\Gamma(1-a)}{\pi} \cos \frac{(1-a)\pi}{2} [(x+y)^{a-1} + |x-y|^{a-1}], \end{aligned} \quad (26)$$

где $0 < \operatorname{Re} a < 1$. Таким образом, ядро (26) допускает представление (3), (5) с $f(\lambda) = \lambda$, $\Lambda = [0, \infty)$, $\psi_\lambda(a) = \lambda^{-a}$, $u_\lambda(x) = v_\lambda(x) = \sqrt{2/\pi} \cos \lambda x$, и поэтому согласно теореме (формула (9))

$$\pi_{m-1}(x_m|a_{m-1}, \dots, a_1|x_1) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\prod_{j=1}^{m-1} \lambda^{-a_j} \right] \cos \lambda y \cos \lambda x d\lambda = \pi_1 \left(x_m \left| \sum_{j=1}^{m-1} a_j \right| x_1 \right),$$

причем должно быть $0 < \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m-1} a_j < 1$, $x_m \neq x_1$ для сходимости интеграла (1). Если положить $a_j = t_{j+1} - t_j$, $0 < t_1 < \dots < t_m$, то из (26) вытекает справедливость уравнения Чепмена–Колмогорова

$$\pi_1(x_3|t_3 - t_1|x_1) = \int_0^\infty \pi_1(x_2|t_2 - t_1|x_1) \pi_1(x_3|t_3 - t_2|x_2) dx_2,$$

но мы не можем отождествить ядро $\pi_1(y|t-s|x)$ с плотностью вероятности перехода для некоторого марковского процесса, поскольку это ядро не интегрируемо по y в $[0, \infty)$ и, тем самым, не выполняется второе из условий (18).

ПРИМЕР 3. Согласно [3; с. 494, № 3.898(2)] ядро

$$\pi_1(y|a|x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-y)^2}{4a} \right] + \exp \left[-\frac{(x+y)^2}{4a} \right] \right\} \quad (27)$$

представляется в виде (3), (5), где $\operatorname{Re} a > 0$,

$$f(\lambda) = \lambda, \quad \psi_\lambda(a) = \exp(-a\lambda^2), \quad \Lambda = \Omega = [0, \infty), \quad u_\lambda(x) = v_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \lambda x.$$

Именно,

$$\pi_1(y|a|x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp(-a\lambda^2) \cos \lambda y \cos \lambda x d\lambda.$$

Если взять $a_j = t_{j+1} - t_j$, $t_1 < t_2 < \dots < t_m$, мы увидим, что

$$\psi_\lambda(a_j) = \exp(-(t_{j+1} - t_j)\lambda^2) = \frac{\psi_\lambda(t_{j+1})}{\psi_\lambda(t_j)},$$

т.е. справедливо представление (15) и, тем самым, и следствие из теоремы. Имеем также

$$\int_0^\infty \pi_1(y|a|x) dy = 2 - \Phi\left(\frac{-x}{\sqrt{2a}}\right) - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2a}}\right) = 1, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy. \quad (28)$$

В силу (28) выполняются неравенства (18) с $a = t - s > 0$. Таким образом, можем отождествить ядро (27) с плотностью вероятности перехода некоторого марковского процесса по формуле (19). Сам интеграл (1) вычисляется по (24).

В следующих двух примерах $f(\lambda) \neq \lambda$.

ПРИМЕР 4. Согласно [3; с. 409, № 3.697(7)] при $x > 0$, $y > 0$

$$\pi_1(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \left(\cos \frac{y}{4x} + \sin \frac{y}{4x} \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos x \lambda^2 \cos y \lambda d\lambda.$$

Как видим, это ядро допускает представление (3), в котором параметра a нет, $f(\lambda) = \lambda^2$, $\psi_\lambda(a) = 1$, $\Omega = \Lambda = [0, \infty)$, $u_\lambda(x) = v_\lambda(x) = \cos \lambda x$, так что по теореме интеграл (1) сворачивается к однократному интегралу (7), в котором в силу (6) $f_k(\lambda) = \lambda^{2^k}$.

В последующем примере в интегральном представлении ядра $\Lambda = [0, \pi]$, т.е. в равенстве (3) интегрирование производится по конечному интервалу.

ПРИМЕР 5. Согласно [3; с. 415, № 3.715(8)] имеем

$$\pi_1(y|x) = -\frac{2y}{\pi} \sin y\pi \cdot s_{-1,y}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \lambda) \cos y \lambda d\lambda,$$

где $s_{\mu,\nu}(x)$ – функция Ломмеля [3]. Таким образом, это ядро записывается в виде (3), в котором параметр a отсутствует, $\psi_\lambda(a) = 1$, $f(\lambda) = \sin \lambda$, $\Lambda = [0, \pi]$, $\Omega = [0, \infty)$, $u_\lambda(x) = v_\lambda(x) = \cos \lambda x$. Условия теоремы выполнены, и $(m-2)$ -кратный интеграл (1) представляется однократным интегралом (7), причем в силу (6)

$$f_k(\lambda) = \underbrace{\sin(\sin(\sin(\dots(\sin \lambda))))}_{k \text{ раз}}.$$

Наконец, приведем примеры, в которых в качестве $u_\lambda(x)$ и $v_\lambda(x)$ используются ядра других, отличных от косинус-преобразования Фурье, классических интегральных преобразований.

ПРИМЕР 6 (с синус-преобразованием Фурье). Пусть в (1) $\Omega = [0, \infty)$, а ядро имеет вид

$$\pi_1(y|a_j|x) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{|a_j|}{a_j^2 + (y-x)^2} - \frac{|a_j|}{a_j^2 + (y+x)^2} \right], \quad x > 0, \quad y > 0. \quad (29)$$

Дважды применяя к (29) синус-преобразование Фурье, находим, что [5]

$$\pi_1(y|a_j|x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp\{-|a_j|\lambda\} \sin \lambda y \sin \lambda x d\lambda.$$

Следовательно, ядро имеет вид (3) с $f(\lambda) = \lambda$, $\Lambda = [0, \infty)$, $\psi_\lambda(a) = \exp(-|a|\lambda)$, $u_\lambda(x) = v_\lambda(x) = \sqrt{2/\pi} \sin \lambda x$, и согласно теореме

$$\begin{aligned} \pi_{m-1}(x_m|a_{m-1}, \dots, a_1|x_1) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp\left\{-\lambda \sum_{j=1}^{m-1} |a_j|\right\} \sin \lambda y \sin \lambda x d\lambda \\ &= \pi_1\left(x_m \left| \sum_{j=1}^{m-1} |a_j| \right| x_1\right). \end{aligned} \quad (30)$$

Так как ядро (29) неотрицательно и

$$\int_0^\infty \pi_1(y|a_j|x) dy = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{|a_j|} \leq 1, \quad (31)$$

то можем отождествить это ядро с плотностью вероятности перехода некоторого марковского процесса по формуле $\pi_1(y|a_j|x) = \pi_{t_j \rightarrow t_{j+1}}(x \rightarrow y)$, если положить $a_j = t_{j+1} - t_j$, $t_1 < t_2 < \dots < t_m$, поскольку в силу (30) выполняется уравнение Чепмена–Колмогорова (20).

Данный марковский процесс интересен тем, что из любой конечной точки x в начальный момент времени s его траектория к любому моменту времени $t > s$ не обязательно окажется в интервале $y \in [0, \infty)$ (вероятность этого события в силу (31) меньше 1), причем отсев траекторий происходит в силу внутренних причин, а не за счет границ. Только траектории, начинающиеся в момент s в бесконечно удаленной точке (при $x = \infty$), сохраняются в интервале $[0, \infty)$ к любому моменту времени $t > s$. Если использовать метафору, отождествляя марковский процесс, порожденный парой $F(x)$, $\pi_{s \rightarrow t}(x \rightarrow y)$, где $F(x)$ – функция распределения начальных значений, с процессом переноса “воды” $F(x)$ в “сосуде” $\pi_{s \rightarrow t}(x \rightarrow y)$, то марковский процесс в рассматриваемом примере – это перенос воды в друшлагае, а в примере 1 – в обычном, не дырявом ведре.

ПРИМЕР 7 (с экспоненциальным преобразованием Фурье). Пусть в (1)

$$\Omega = (-\infty, \infty), \quad \pi_1(y|a_j|x) = \frac{e^{-\alpha_j x}}{(e^{-y/\gamma_j} + e^{-x/\gamma_j})^{\nu_j}} \exp\{y(\alpha_j - \nu_j/\gamma_j)\}, \quad (32)$$

где $\operatorname{Re} \nu_j/\gamma_j > \operatorname{Re} \alpha_j > 0$, $a_j = (\alpha_j, \gamma_j, \nu_j)$. Согласно [5; т. 1] экспоненциальное преобразование Фурье от ядра (32) имеет вид

$$\int_{-\infty}^\infty \pi_1(y|a_j|x) e^{-ix\lambda} dx = \gamma_j e^{-i\lambda y} B(\gamma_j(\alpha_j + i\lambda), \nu_j - \gamma_j(\alpha_j + i\lambda)), \quad (33)$$

где $B(x, y)$ – бета-функция. Обращая это преобразование, т.е. умножая (33) на $\exp(i\lambda x)/2\pi$ и интегрируя по λ в $(-\infty, \infty)$, получаем ядро $\pi_1(y|a_j|x)$ в форме

$$\pi_1(y|a_j|x) = \frac{\gamma_j}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda(x-y)} B(\gamma_j(\alpha_j + i\lambda), \nu_j - \gamma_j(\alpha_j + i\lambda)) d\lambda,$$

которая совпадает с представлением (3) при $f(\lambda) = \lambda$, $\Lambda = (-\infty, \infty)$,

$$\begin{aligned}\psi_\lambda(a_j) &= \gamma_j B(\gamma_j(\alpha_j + i\lambda), \nu_j - \gamma_j(\alpha_j + i\lambda)), \\ u_\lambda(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda x}, \quad v_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\lambda x}.\end{aligned}$$

Следовательно, по теореме интеграл (1) запишется в виде однократного интеграла (9).

ПРИМЕР 8 (с преобразованием Ганкеля). Пусть в (1) $\Omega = (0, \infty)$,

$$\pi_1(y|a_j|x) = \frac{\sqrt{xy}}{r_1 r_2} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} \right)^\nu,$$

где a_j – параметры, $\operatorname{Re} a_j > 0$, $x > 0$, $y > 0$, $\operatorname{Re} \nu > -1$, а

$$r_1 = \sqrt{a_j^2 + (x - y)^2}, \quad r_2 = \sqrt{a_j^2 + (x + y)^2}.$$

Согласно [3; с. 686, № 6.522(3)] в этом случае имеет место представление

$$\pi_1(y|a|x) = \int_0^\infty K_0(a\lambda) \sqrt{y\lambda} J_\nu(y\lambda) \sqrt{x\lambda} J_\nu(x\lambda) d\lambda, \quad (34)$$

где $a = a_j$, $J_\nu(x)$ – функция Бесселя первого рода, $K_0(x)$ – функция Бесселя третьего рода (функция Макдональда). Полагая $f(\lambda) = \lambda$,

$$\Lambda = [0, \infty), \quad \psi_\lambda(a_j) = K_0(a_j \lambda), \quad u_\lambda(x) = v_\lambda(x) = \sqrt{x\lambda} J_\nu(x\lambda), \quad (35)$$

обнаруживаем, что ядро (34) совпадает с (3), так что вследствие теоремы интеграл (1) имеет вид (9) в обозначениях (35).

ПРИМЕР 9 (с преобразованием Конторовича–Лебедева). Пусть в (1)

$$\Omega = (0, \infty), \quad \pi_1(y|a_j|x) = y^{a_j-1} x^{a_j} |x - y|^{-a_j} K_{a_j}(|x - y|), \quad (36)$$

где a_j – параметры, $0 < \operatorname{Re} a_j < 1/2$, $K_a(x)$ – функция Макдональда. Согласно [5; т. 2]

$$\int_0^\infty \pi_1(y|a|x) \frac{K_{i\gamma}(x)}{x} dx = \frac{1}{2^a y \sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - a\right) \Gamma(a + i\gamma) \Gamma(a - i\gamma) K_{i\gamma}(y), \quad a \equiv a_j.$$

Решим это интегральное уравнение относительно $\pi_1(y|a|x)$, воспользовавшись парой взаимно-обратных преобразований [4], [5]

$$g(y) = \int_0^\infty f(x) K_{ix}(y) dx, \quad f(x) = \frac{2}{\pi^2} x \operatorname{sh}(\pi x) \int_0^\infty g(y) \frac{K_{i\xi}(y)}{y} dy.$$

Мы получаем равенство

$$\pi_1(y|a|x) = \frac{2^{1-a}}{\pi^2 \sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - a\right) \int_0^\infty \Gamma(a + i\gamma) \Gamma(a - i\gamma) K_{i\gamma}(x) \frac{K_{i\gamma}(y)}{y} \gamma \operatorname{sh}(\pi \gamma) d\gamma,$$

т.е. ядро (36) оказывается представимым в виде (3) при $\lambda = \gamma$, $f(\lambda) = \lambda$, $a = a_j$, $\Lambda = [0, \infty)$, $2^{a_j} \sqrt{\pi} \psi_\lambda(a_j) = \Gamma(1/2 - a_j) \Gamma(a_j + i\gamma) \Gamma(a_j - i\gamma)$,

$$u_\lambda(x) = \frac{2\lambda}{\pi^2} \operatorname{sh}(\pi\lambda) \frac{K_{i\lambda}(x)}{x}, \quad v_\lambda(x) = K_{i\lambda}(x), \quad (37)$$

и по теореме интеграл (1) сводится к однократному интегралу (9) в обозначениях (37).

Таким образом, представление ядра в виде (3)–(5) позволяет сворачивать многократные интегралы (1) к однократному, пользуясь таблицами интегральных преобразований. Приведенные примеры не исчерпывают все возможности. Так, даже при беглом просмотре таблиц только косинус-преобразования Фурье [3] нашлось около тридцати ядер, представимых в виде (3)–(5), мы же в примерах указали только пять.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Н. Мирошин, “Об одном классе многократных интегралов”, *Матем. заметки*, **73**:3 (2003), 390–401.
- [2] Р. Н. Мирошин, “Сходимость рядов Райса и Лонге–Хиггинса для стационарных гауссовских марковских процессов первого порядка”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **26**:1 (1981), 101–120.
- [3] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, М., 1971.
- [4] В. А. Диткин, А. П. Прудников, *Интегральные преобразования и операционное исчисление*, Наука, М., 1974.
- [5] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований*, т. 1, Наука, М., 1969; т. 2, Наука, М., 1970.

Р. Н. Мирошин

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступило

17.05.2006

Исправленный вариант

13.02.2007