Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Гайсин, Условие Левинсона в теории целых функций. Эквивалентные утверждения, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 3, 350–360

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3850>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:26:49

УДК 517.53

Условие Левинсона в теории целых функций. Эквивалентные утверждения

А. М. Гайсин

В терминах функций распределения нулей целой функции экспоненциального типа доказаны утверждения, эквивалентные билогарифмическому условию Левинсона для ассоциированной по Борелю функции. В качестве применения приведены решения двух задач, связанных с интерполяцией Павлова–Коревара–Диксона.

Библиография: 15 названий.

Так называемое условие Левинсона естественно возникает во многих вопросах комплексного анализа, спектральной теории и теории операторов (см., например, [1]–[8]). Это условие находит широкое применение и в теории целых функций.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, – последовательность, имеющая нулевую плотность,

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right), \quad z = x + iy. \quad (1)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$H(\delta) = \int_0^{\infty} Q(iy)e^{-\delta y} dy, \quad 0 < \delta < \infty. \quad (2)$$

Следуя работе [7], будем говорить, что функция H удовлетворяет условию Левинсона, если

$$\int_0^d \ln \ln H(\delta) d\delta < \infty, \quad (3)$$

где $d > 0$ такое, что $H(d) = e$.

С условием (3) связаны такие вопросы, как разрешимость некоторых интерполяционных задач с узлами в точках последовательности Λ , неполнота системы экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$ на кривых [9]–[11]. Условие Левинсона играет важную роль и при изучении асимптотических свойств рядов Дирихле с показателями $\lambda \in \Lambda$, абсолютно сходящихся во всей плоскости [11]. Но несмотря на лаконичность условие Левинсона (3) трудно проверяемо и, на первый взгляд, кажется чисто формальным требованием. Цель статьи – в терминах считающей функции последовательности Λ привести другие интерпретации условия (3).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00417-а).

Основные результаты статьи:

- 1) получены более простые эквивалентные варианты условия Левинсона (теорема C);
- 2) приведены решения двух задач из [12] (проблемы 4 и проблемы 5), возникших в связи с одной гипотезой Шереметы (по этому поводу см. [13]).

1. Свойства преобразования Лежандра. Пусть $M(x)$ – любая непрерывная возрастающая на $[0, \infty)$ функция, $M(x) = o(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Тогда функция

$$m(y) = \sup_{x>0} (M(x) - xy),$$

определенная при $y > 0$, называется *преобразованием Лежандра* функции $M(x)$. Если $M(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$, то $m(y) \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow 0$. Функция $m(y)$, как верхняя огибающая убывающих по $y > 0$ функций, также убывающая функция. Положим

$$M^*(x) = \inf_{y>0} (m(y) + yx).$$

Ясно, что M^* – наименьшая вогнутая возрастающая мажоранта функции M : $M(x) \leq M^*(x)$. Отметим, что если функция M вогнута, то $M(x)/x \downarrow$ при $x \geq a$. С другой стороны, если $0 < M(x) \uparrow$, $M(x)/x \downarrow$ при $x > 0$, то $M^*(x) < 2M(x)$, где M^* – наименьшая вогнутая мажоранта M [2; гл. VII, § D, с. 326].

ТЕОРЕМА А [2; гл. VII, § D, с. 333]. Пусть $M(x)$ – возрастающая вогнутая на $[0, \infty)$ функция, $m(y)$ – преобразование Лежандра функции $M(x)$, $a > 0$ такое, что $m(a) = 1$. Тогда интегралы

$$\int_0^a \ln m(y) dy, \quad \int_1^\infty \frac{M(x)}{x^2} dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Рассмотрим теперь конкретный случай, когда $M(x) = M(x; Q)$, где $M(x; Q) = \max_{|z|=x} |Q(z)|$, Q – функция (1).

Пусть Q и H – функции, определенные формулами (1), (2), а $\gamma(t)$ – функция, ассоциированная по Борелю с $Q(z)$. Так как последовательность Λ имеет нулевую плотность, функция γ аналитична вне начала координат. Далее, для любого t , $|t| = \delta$, $0 < \delta < \infty$,

$$|\gamma(t)| \leq \int_0^\infty M(r; Q) e^{-\delta r} dr = H(\delta).$$

Но

$$Q(z) = \int_C \gamma(t) e^{tz} dt, \quad C = \{t : |t| = \delta\}.$$

Отсюда следует, что

$$|Q(z)| \leq \delta H(\delta) e^{\delta|z|} \leq \begin{cases} H(\delta) e^{\delta|z|}, & \text{если } 0 < \delta \leq 1, \\ H(\delta) e^{\delta(|z|+1)}, & \text{если } 1 \leq \delta < \infty. \end{cases}$$

Следовательно,

$$M(r; Q) \leq H(\delta) e^{\delta(r+1)}, \quad 0 < \delta < \infty. \quad (4)$$

Положим $h(\delta) = \ln H(\delta)$. Функция $h(\delta)$ непрерывна, $h(\delta) \uparrow \infty$ при $\delta \downarrow 0$, $h(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \uparrow \infty$. Пусть

$$M(x) = \inf_{\delta > 0} (h(\delta) + \delta x), \quad x > 0.$$

Как нижняя огибающая линейных функций, $M(x)$ вогнута, $M(x) \uparrow \infty$ при $x \uparrow \infty$. Пусть m – преобразование Лежандра функции M . Тогда m – наибольшая выпуклая миноранта функции h .

ТЕОРЕМА В. Пусть $\varphi(x)$ является наименьшей вогнутой мажорантой функции $\ln M(x; Q)$. Тогда условие (3) эквивалентно условию

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^2} dx < \infty. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$H(\delta) = \int_0^\infty M(x; Q) e^{-\delta x} dx \leq \int_0^\infty e^{\varphi(x) - \delta x} dx, \quad 0 < \delta < \infty.$$

Так как φ – вогнутая функция, то из (5) следует (3) [9].

Пусть выполняется условие (3). Поскольку $m(\delta) \leq h(\delta) = \ln H(\delta)$, то

$$\int_0^a \ln m(\delta) d\delta < \infty, \quad m(a) = 1.$$

Следовательно, применяя теорему А, получаем, что

$$\int_1^\infty \frac{M(x)}{x^2} dx < \infty. \quad (6)$$

Но из (4) имеем $\ln M(x; Q) \leq M(x+1) \leq M(2x)$, $x \geq 1$. Так как $M(x)$ – вогнутая функция, $M(2x) \leq 2M(x)$, и $\ln M(x; Q) \leq \varphi(x) \leq 2M(x)$ при $x \geq a$. Следовательно, из (6) получаем условие (5).

СЛЕДСТВИЕ 1. Если выполняется условие Левинсона (3), то

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda_n} < \infty. \quad (7)$$

Поскольку $n(x) \leq \varphi(ex)$ (это следует из неравенства Иенсена), то (7) вытекает из (5) и равенства

$$\sum_{\lambda_n \leq r} \frac{1}{\lambda_n} = \int_0^r \frac{dn(x)}{x},$$

где $n(x)$ – считающая функция последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}$, т.е. $n(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} 1$.

2. Применение к интерполяции. При изучении асимптотических свойств целых трансцендентных функций вида

$$f(z) = \sum_{n=1}^\infty a_n z^{p_n}, \quad 0 < p_n \uparrow \infty, \quad p_n \in \mathbb{N},$$

на кривых, уходящих в бесконечность, Павловым в [14] был применен специальный интерполяционный метод. Как самостоятельная задача, в более общей ситуации он получил дальнейшее развитие в работах [9]–[11]. С учетом теорем А и В эту задачу можно сформулировать следующим образом. Пусть $P = \{p_n\}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел (вместо P можно рассматривать произвольную вещественную последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$). Для любой последовательности $\{b_n\}$ комплексных чисел b_n , $|b_n| \leq 1$, требуется найти целую функцию экспоненциального типа такую, что [9]

$$\begin{aligned} 1^\circ. \quad & g(p_n) = b_n, \quad n \geq 1; \\ 2^\circ. \quad & \int_0^d \ln \ln H_g(\delta) d\delta < \infty, \end{aligned}$$

где $H_g(\delta) = \int_0^\infty M(r; g) e^{-\delta r} dr$, а $d > 0$ такое, что $H_g(d) = e$.

Последовательности P (или Λ) для которых данная задача разрешима, называются *интерполяционными* (в смысле Павлова–Коревара–Диксона [10]) [9]. Как следует из результатов данной статьи и работы [10], проблемы 4 и 5 из [12] можно на самом деле свести к приведенной выше интерполяционной задаче.

Приведем формулировки и решения предложенных в [12] задач.

ЗАДАЧА 4 [12]. Пусть выполняется условие (7), а

$$\pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Тогда π есть целая функция минимального типа при порядке единица, и поэтому $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

тоже целая функция. Видно, что $a_n \geq 0$, и поэтому $0 < f(r) \uparrow \infty$ при $r \uparrow \infty$. Сходится ли интеграл

$$\int_a^\infty \frac{\ln \ln f(r)}{r^2} dr, \quad (8)$$

где $a \geq 1$ такое, что $f(a) \geq e$?

Имеем

$$\int_a^\infty \frac{\ln \ln f(r)}{r^2} dr = \int_0^{1/a} \ln \ln f\left(\frac{1}{\delta}\right) d\delta.$$

Далее,

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{t^{n+1}} = t\gamma(t),$$

где $\gamma(t)$ – функция, ассоциированная по Борелю с $\pi(z)$. Видно, что $f(1/\delta) > 0$ при $\delta > 0$, а поскольку $\pi(r) = Q(ir)$, то

$$\delta\gamma(\delta) = \delta \max_{|t|=\delta} |\gamma(t)| = \delta \int_0^\infty \pi(r) e^{-\delta r} dr = \delta H(\delta),$$

где Q и H – функции, определенные формулами (1), (2). Итак,

$$\frac{1}{\delta} f\left(\frac{1}{\delta}\right) = H(\delta), \quad 0 < \delta \leq \frac{1}{a} \leq 1.$$

Значит, $\ln \ln f(1/\delta) \leq \ln \ln H(\delta)$. С другой стороны, для δ , $0 < \delta \leq 1/a$,

$$0 \leq \ln \ln H(\delta) \leq \ln 2 + \ln^+ \ln \frac{1}{\delta} + \ln \ln f\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

Здесь $\ln^+ b = \max(0, \ln b)$, $0 < b$. Таким образом,

$$\left| \ln \ln f\left(\frac{1}{\delta}\right) - \ln \ln H(\delta) \right| \leq \ln 2 + \ln^+ \ln \frac{1}{\delta}, \quad 0 < \delta \leq \frac{1}{a}.$$

Следовательно, все интегралы

$$\int_0^{1/a} \ln \ln H(\delta) d\delta, \quad \int_0^{1/a} \ln \ln f\left(\frac{1}{\delta}\right) d\delta, \quad \int_a^\infty \frac{\ln \ln f(r)}{r^2} dr$$

сходятся и расходятся одновременно. Согласно теореме В все эти интегралы сходятся и расходятся одновременно с интегралом (5).

При условии (7) [15]

$$\int_1^\infty \frac{\ln M(x; Q)}{x^2} dx < \infty, \quad (9)$$

но при этом интеграл (5) вообще не обязан сходиться. Действительно, пусть $\{\lambda_n\}$ – возрастающая последовательность целых чисел из $\bigcup_{n=1}^\infty [a_n, b_n]$, $a_n = 2^{n^2}$, $b_n = a_n + [2^{n^2}/n^2]$ ($[a]$ – целая часть a). Ясно, что условие (7) выполнено. Далее, используя неравенство Иенсена, имеем

$$n(x) \leq \ln M(ex; Q) \leq \varphi(ex), \quad n(x) = \sum_{\lambda_n \leq x} 1. \quad (10)$$

Поскольку $b_n - a_n = (1 + o(1))b_n \ln^{-1} b_n$ при $n \rightarrow \infty$, учитывая (10), получаем, что

$$\frac{\varphi(b_n) \ln b_n}{b_n} \geq \frac{n(b_n) \ln b_n}{b_n} \geq 1 + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Но для любой неубывающей вогнутой на $[0, \infty)$ функции $\varphi(x)$, для которой интеграл (5) сходится, выполняется соотношение $\varphi(x) \ln(x) = o(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Поэтому из (11) заключаем, что интеграл (5), а следовательно, и интеграл (8) расходится.

Таким образом, ответ на сформулированный в задаче 4 вопрос является отрицательным (условие (3) сильнее условия (7)).

Задача 5 [12]. Пусть $\{\lambda_n\}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию (7),

$$\Lambda_n = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^\infty \frac{\lambda_m^2}{|\lambda_m^2 - \lambda_n^2|}.$$

Имеется ли возрастающая последовательность $\{p_n\}$, $p_n \in \mathbb{N}$, такая, что

$$\int_a^\infty \frac{\ln \ln \Psi(r)}{r^2} dr < \infty, \quad (12)$$

если

$$\Psi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n p_n! \left(\frac{r}{\lambda_n} \right)^{p_n},$$

$a \geq 1$ такое, что $\Psi(a) \geq e$?

Предположим, что такая последовательность $\{p_n\}$ имеется. Тогда $\Psi(z)$ – целая функция. Поэтому

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n \left(\frac{z}{\lambda_n} \right)^{p_n}$$

– целая функция экспоненциального типа, причем она имеет минимальный тип при порядке один. Действительно, имеем

$$\sqrt[p_n]{\Lambda_n p_n! \left(\frac{1}{\lambda_n} \right)^{p_n}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Учитывая асимптотическую формулу Стирлинга

$$p_n! = (1 + o(1)) p_n^{p_n} e^{-p_n} \sqrt{2\pi p_n}, \quad n \rightarrow \infty,$$

имеем: $p_n! > (p_n/e)^{p_n}$, $n \geq n_0$. Следовательно, из (13) получаем, что

$$p_n \sqrt[p_n]{\Lambda_n \left(\frac{1}{\lambda_n} \right)^{p_n}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Учитывая формулу Адамара для вычисления типа, отсюда заключаем, что функция $\psi(z)$ имеет минимальный тип при порядке один. Следовательно, единственной особой точкой ассоциированной с ней по Борелю функции $\gamma(t) = (1/t)\Psi(1/t)$ является начало координат. Значит,

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=\delta} \frac{1}{t} \Psi\left(\frac{1}{t}\right) e^{tz} dt, \quad 0 < \delta < \infty.$$

Отсюда получаем, что

$$|\psi(z)| \leq \Psi\left(\frac{1}{\delta}\right) e^{\delta r}, \quad z = r e^{i\varphi}.$$

Следовательно,

$$\ln M(r; \psi) \leq M(r), \quad (14)$$

где

$$M(r) = \inf_{\delta} \left(\ln \Psi\left(\frac{1}{\delta}\right) + \delta r \right).$$

Как нижняя огибающая линейных функций, $M(r)$ вогнута, $M(r) \uparrow \infty$ при $r \uparrow \infty$. Если m – преобразование Лежандра функции M , то m – наибольшая выпуклая миноранта для $\ln \Psi(1/\delta)$. Значит, $m(\delta) \leq \ln \Psi(1/\delta)$. По предположению выполняется условие (12). Следовательно, сходятся и интегралы

$$\int_0^{a^{-1}} \ln m(\delta) d\delta, \quad \int_0^{a^{-1}} \ln \ln \Psi\left(\frac{1}{\delta}\right) d\delta.$$

Но тогда из теоремы В следует, что

$$\int_1^\infty \frac{M(r)}{r^2} dr < \infty. \quad (15)$$

Убедимся, что существует последовательность $\{\lambda_n\}$, удовлетворяющая условию (7), для которой интеграл (15) расходится. Действительно, пусть

$$\Delta_j = \left[e^j - \frac{e^j}{j \ln^2 j}, e^j \right], \quad j \geq 2,$$

а $\Lambda = \{\lambda_j\}$ – возрастающая последовательность всех целых чисел из $\bigcup_j \Delta_j$. Для этой последовательности условие (7) выполнено. Но последовательность Λ не является интерполяционной в смысле Павлова–Коревара–Диксона и обладает свойством [10]: существует последовательность комплексных чисел b_n , $|b_n| \leq 1$, такая, что для любой целой функции g экспоненциального типа такой, что $g(\lambda_n) = b_n$, $n \geq 1$,

$$\int_1^\infty \frac{\ln M(r; g)}{r^2} dr = \infty. \quad (16)$$

Имея это в виду, рассмотрим функцию

$$g(\lambda) = \sum_{n=1}^\infty b_n \frac{Q(\lambda)}{(\lambda - \lambda_n)} \frac{1}{Q'(\lambda_n)} \left(\frac{\lambda}{\lambda_n} \right)^{p_n+1}. \quad (17)$$

Убедимся, что g – целая функция экспоненциального типа. Действительно,

$$\left| \frac{1}{Q'(\lambda_n)} \right| = \frac{\lambda_n}{2} \Lambda_n, \quad n \geq 1. \quad (18)$$

Далее,

$$\left| \frac{Q(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \right| = \frac{1}{\lambda_n} \left| 1 + \frac{\lambda}{\lambda_n} \right| \left| \prod_{k \neq n} \left| 1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2} \right| \right|. \quad (19)$$

Поскольку

$$\frac{1}{\lambda_n} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\lambda_n^2} \right) \leq M(1; Q), \quad (20)$$

$$1 + \frac{r}{\lambda_n} \leq 2 \left(1 + \frac{r^2}{\lambda_n^2} \right), \quad r = |\lambda|, \quad (21)$$

то из (19)–(21) видим, что

$$\left| \frac{Q(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \right| \leq M(1; Q) M(r; Q), \quad r \geq 0.$$

Следовательно, из (17), (18) получаем оценку

$$|g(\lambda)| \leq M(1; Q)M(r; Q)M(r; \psi)r.$$

Таким образом, с учетом (9), (14), (16) заключаем, что

$$\int_1^\infty \frac{M(r)}{r^2} dr = \infty.$$

Получили противоречие с (15). Таким образом, ответ на задачу 5 отрицательный.

3. Эквивалентные условия. Через L обозначим класс всех непрерывных функций $w = w(x)$ таких, что $0 < w(x) \uparrow \infty$, $x \rightarrow \infty$. Пусть

$$W = \left\{ w : w \in L, \int_1^\infty \frac{w(x)}{x^2} dx < \infty \right\}.$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА С. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – последовательность, имеющая нулевую плотность, а Q и H функции, определенные формулами (1) и (2). Тогда следующие условия равносильны:

- 1) $\int_0^d \ln \ln H(\delta) d\delta < \infty$, $H(d) = e$;
- 2) для наименьшей вогнутой мажоранты $\varphi(x)$ функции $\ln M(x; Q)$ выполняется условие (5);
- 3) существует функция $\omega \in \Omega$ такая, что $n(t) \leq \omega(t)$, где $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$ – считающая функция последовательности Λ , а

$$\Omega = \left\{ \omega : \omega \in W, \frac{\omega(x)}{x} \downarrow 0 \text{ при } x \uparrow \infty \right\};$$

- 4) существует функция $w \in W$ такая, что для любых a, A, B , $0 < a \leq A < B$,

$$\int_A^B \frac{n(t)}{t^2} dt \leq \frac{w(a)}{a} \ln \frac{B}{A} + \frac{w(a)}{a};$$

- 5) существует функция $w \in W$ такая, что для любых $a, a_0 \leq a$, $t \geq a$

$$n(t) \leq \frac{w(a)}{a} t.$$

Эквивалентность условий 1)–3). Согласно теореме В условия 1), 2) равносильны. Далее, из 1), применяя теорему В и оценки (10), получаем 3). Пусть, обратно, для некоторой функции $\omega \in \Omega$ имеет место оценка $n(t) \leq \omega(t)$, $t > 0$. Тогда имеем

$$\ln M(x; Q) = 2x^2 \int_{\lambda_1}^\infty \frac{n(t)}{t(t^2 + x^2)} dt \leq 2x^2 \int_{\lambda_1}^\infty \frac{\omega(t)}{t(t^2 + x^2)} dt = g(x).$$

Поскольку $\omega \in \Omega$, очевидно, $g \in W$. Убедимся, что $g \in \Omega$, т.е. $g(x)/x \downarrow 0$ при $x \uparrow \infty$. Действительно, имеем

$$\frac{1}{2} \left(\frac{g(x)}{x} \right)' = \int_{\lambda_1}^x \frac{\omega(t)}{t} \frac{t^2 - x^2}{(t^2 + x^2)^2} dt + \int_x^\infty \frac{\omega(t)}{t} \frac{t^2 - x^2}{(t^2 + x^2)^2} dt.$$

Пользуясь монотонностью функции $\omega(x)/x$, можно показать, что $(g(x)/x)' < 0$ при $x \geq a$. Значит, $g \in \Omega$. Так как $\varphi(x) \leq g(x)$, $x \geq b$, то 2), а следовательно и 1), имеет место.

Эквивалентность условий 3), 4). Пусть $0 < a \leq A < B$. Из 3) имеем

$$\int_A^B \frac{n(t)}{t^2} dt \leq \int_A^B \frac{\omega(t)}{t^2} dt \leq \frac{\omega(a)}{a} \ln \frac{B}{A},$$

если $0 < a_0 \leq a$. Если положить

$$w(t) = \begin{cases} \omega(a_0), & \text{если } 0 \leq t \leq a_0, \\ \omega(t), & \text{если } a_0 < t, \end{cases}$$

то для любого $a > 0$

$$\int_A^B \frac{n(t)}{t^2} dt \leq \frac{w(a)}{a} \ln \frac{B}{A} + \frac{w(a)}{a},$$

и условие 4) выполнено. Убедимся, что из 4) следует 3).

Пусть $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$, а $\varphi(t)$ — непрерывная возрастающая мажоранта $n(t)$, определенная следующим образом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 0, \\ n(t), & \text{если } t = \lambda_n, \\ \text{линейна,} & \text{если } t \neq 0, t \neq \lambda_n. \end{cases}$$

Ясно, что $n(t) \leq \varphi(t)$, $|n(t) - \varphi(t)| \leq 1$. Поскольку последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет нулевую плотность, то $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)/t = 0$, $\varphi(t) \uparrow \infty$, $t \uparrow \infty$. Функция $\varphi(t)/t$ непрерывна при $t > 0$. Положим $D(r) = \max_{t \geq r} \varphi(t)/t$. Ясно, что $D(r)$ — непрерывная и невозрастающая при $r > 0$ функция, $D(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Ясно, что $D(r)$ — наименьшая невозрастающая мажоранта функции $\varphi(r)/r$. Пусть $\{I_n\}$ — последовательность всех отрезков $I_n = [t_n, t_{n+1}]$ из $[\lambda_1, \infty)$, на которых $D(r)$ постоянна. Пусть $D(r) = d_n$, если $t_n \leq t \leq t_{n+1}$. Если $D(r) \downarrow$ при $r \uparrow \infty$, то последовательность $\{d_n\}$ ограничена. В противном случае $t_n \uparrow \infty$. Имеем

$$D(r) = \begin{cases} \frac{\varphi(r)}{r}, & \text{если } r \notin I, I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \\ \frac{\varphi(t_n)}{t_n}, & \text{если } r \in I_n. \end{cases}$$

Далее, из определения $D(r)$ следует, что $\varphi(r) \leq rD(r) = g(r)$. Функция $g(r)$ непрерывна и возрастающая при $r > 0$, а $g(r)/r$ не возрастает. Поэтому существует непрерывная функция $\epsilon(r)$, $\epsilon(r) \downarrow 0$ при $r \uparrow \infty$, $(g(r)/r)(1 + \epsilon(r)) \downarrow$, $g(r)(1 + \epsilon(r)) \uparrow$ при $r \uparrow$. Положим $\omega(r) = g(r)(1 + \epsilon(r))$. Поскольку $n(r) \leq \varphi(r) < \omega(r)$, для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\int_1^{\infty} \frac{g(r)}{r^2} dr < \infty.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{g(r)}{r^2} dr &= \int_I \frac{g(r)}{r^2} + \int_{[\lambda_1, \infty) \setminus I} \frac{g(r)}{r^2} dr \\ &= \int_I \frac{D(r)}{r} dr + \int_{[\lambda_1, \infty) \setminus I} \frac{\varphi(r)}{r^2} dr \leq \int_I \frac{D(r)}{r} dr + \int_{\lambda_1}^\infty \frac{n(r)+1}{r^2} dr.\end{aligned}$$

В силу условия (7) последний интеграл сходится. Убедимся, что

$$\int_I \frac{D(r)}{r} dr = \sum_{n=1}^\infty \int_{I_n} \frac{D(r)}{r} dr < \infty.$$

Пусть $r \in I_n = [t_n, t_{n+1}]$. Тогда $D(r) = \varphi(t_{n+1})/t_{n+1} = \varphi(t_n)/t_n$. Для $r \geq \lambda_1$ имеем: $\varphi(r) \leq n(r) + 1 \leq 2n(r)$. Следовательно, пользуясь условием 4), для любого $a \in I_n$ получаем, что для некоторой функции $w \in W$

$$\frac{\varphi(t_{n+1})}{t_{n+1}} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \int_{t_{n+1}}^{et_{n+1}} \frac{\varphi(r)}{r^2} dr \leq 2 \int_{t_{n+1}}^{et_{n+1}} \frac{n(r)}{r^2} dr \leq 4 \frac{w(a)}{a}.$$

Так что для любого $a \in I_n$

$$D(a) = \frac{\varphi(t_{n+1})}{t_{n+1}} \leq 4 \frac{e}{e-1} \frac{w(a)}{a}.$$

Следовательно, $g(r) = rD(r) \leq (4e/(e-1))w(r)$, $r \in I_n$, $n \geq 1$. Значит,

$$\int_I \frac{D(r)}{r} dr \leq \frac{4e}{e-1} \int_I \frac{w(r)}{r^2} dr < \infty.$$

Таким образом, $n(r) \leq \omega(r) = g(r)(1 + \epsilon(r))$, $\omega \in \Omega$.

Эквивалентность условий 3)–5). Из 3) следует, что $n(t) \leq (\omega(t)/t)t \leq (\omega(a)/a)t$, если $t \geq a \geq a_0$. Пусть имеет место 5), $a_0 \leq a \leq A < B$. Тогда

$$\int_A^B \frac{n(t)}{t^2} dt \leq \frac{w(a)}{a} \int_A^B \frac{dt}{t} = \frac{w(a)}{a} \ln \frac{B}{A}.$$

Значит, условие 4), а следовательно, и условие 3) имеет место.

Теорема C полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] N. Levinson, *Gap and Density Theorems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **26**, Amer. Math. Soc., New York, 1940.
- [2] P. Koosis, *The Logarithmic Integral. I*, Cambridge Stud. Adv. Math., **12**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.
- [3] Е. М. Дынькин, “Операторное исчисление, основанное на формуле Коши–Грина, и квазианалитичность классов $D(h)$ ”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*, т. 1, Записки науч. сем. ЛОМИ, **19**, Наука, Л., 1970, 221–226.
- [4] Е. М. Дынькин, “О росте аналитической функции вблизи множества ее особых точек”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*, т. 3, Записки науч. сем. ЛОМИ, **30**, Наука, Л., 1972, 158–160.

- [5] Е. М. Дынькин, “Функции с заданной оценкой $\partial f/\partial \bar{z}$ и теорема Н. Левинсона”, *Матем. сб.*, **89**:2 (1972), 182–190.
- [6] А. Л. Вольберг, Б. Ёрикке, “Суммируемость логарифма почти аналитических функций и обобщение теоремы Левинсона–Картрайт”, *Матем. сб.*, **130**:3 (1986), 335–348.
- [7] В. Э. Кацнельсон, “Целые функции класса Картрайт с нерегулярным поведением”, *Функц. анализ и его прил.*, **10**:4 (1976), 35–44.
- [8] J. E. Brennan, “Weighted polynomial approximation and quasianalyticity for general sets”, *Алгебра и анализ*, **6**:4 (1994), 69–89.
- [9] J. Korevaar, M. Dixon, “Interpolation, strongly nonspanning powers and Macintyre exponents”, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, **40**:2 (1978), 243–258.
- [10] B. Berndtsson, “A note on Pavlov–Korevaar–Dixon interpolation”, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, **40**:4 (1978), 409–414.
- [11] А. М. Гайсин, “Усиленная неполнота системы экспонент и проблема Макинтайра”, *Матем. сб.*, **182**:7 (1991), 931–945.
- [12] М. М. Sheremeta, “Five open problems in the theory of entire functions”, *Математичні студії*, **6** (1996), 157–159.
- [13] А. М. Гайсин, “Оценка роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых”, *Матем. сб.*, **194**:8 (2003), 55–82.
- [14] А. И. Павлов, “О росте по кривым целых функций, заданных лакунарными степенными рядами”, *Сиб. матем. журн.*, **13**:5 (1972), 1169–1181.
- [15] А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976.

А. М. Гайсин

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН

E-mail: gaisin@imat.rb.ru

Поступило

05.10.2004

Исправленный вариант

06.06.2006